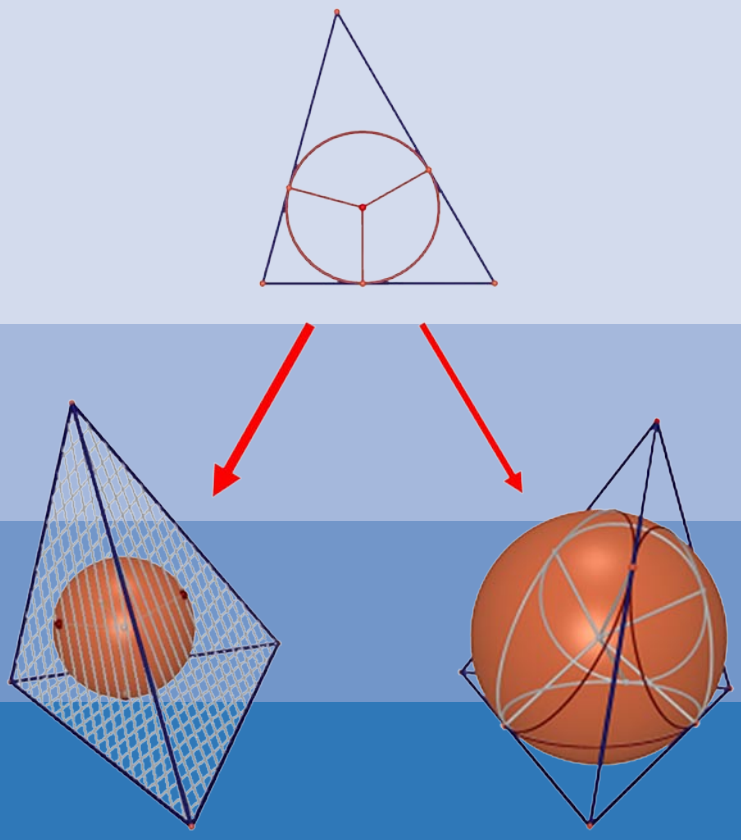
Heinz Schumann

Elementare Tetraedergeometrie

Eine Einführung in die Raumgeometrie



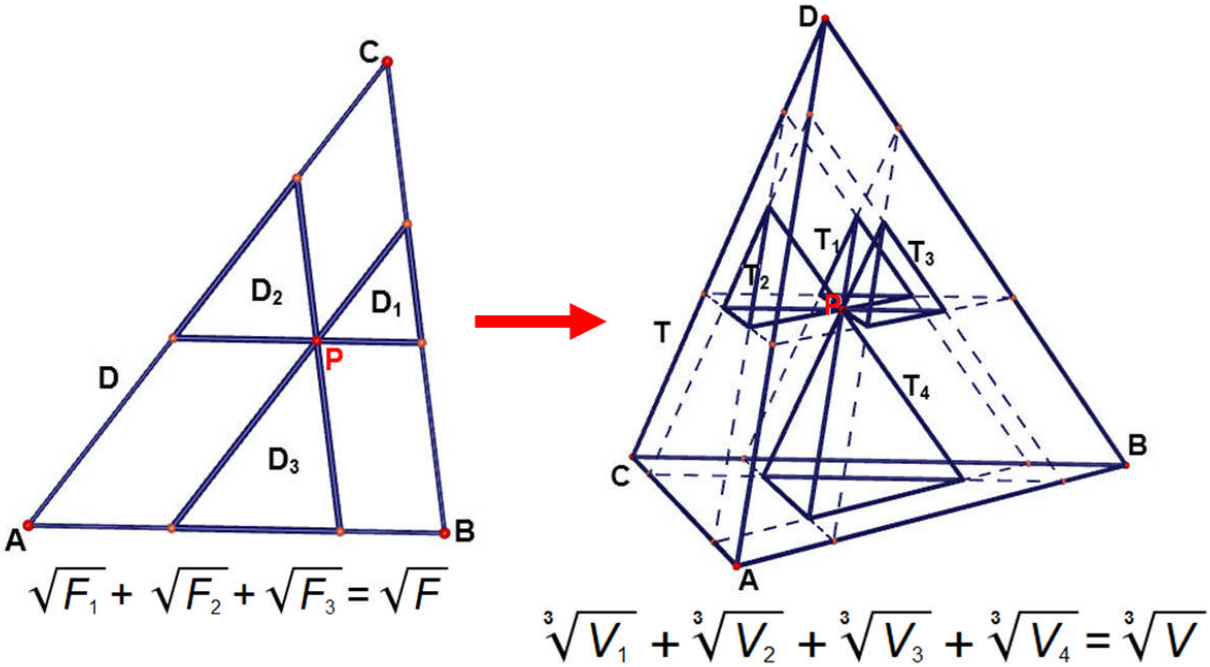
Franzbecker

Zum Inhalt des Buches und der Hypertext-CD

Interaktive Dynamische Raumgeometrie-Systeme eröffnen heute einen direkten Zugang zu den Phänomenen der elementaren Raumgeometrie. Es stellt sich aber die Frage nach der Anwendung der mathematischen Standardmethode der Erkenntnisbildung, dem Beweisen: hier dem Beweisen der im virtuellen Raum gefundenen bzw. repräsentierten Aussagen. In dieser Arbeit werden raumgeometrische Beweise und Gefüge von entsprechenden Begriffen und Sätzen der „Elementaren Tetraedergeometrie“, einem wesentlichen Analogon der elementaren Dreiecksgeometrie, entwickelt. Dabei unterstützen oben genannte Systeme wie Cabri 3D die Beweisführung durch Visualisierung mittels räumlicher Beweisfiguren, die in dieser Arbeit eine zentrale Stellung einnehmen.

Der Autor, Hochschullehrer für Mathematik und ihre Didaktik, hat dieses Buch über Tetraedergeometrie in der Art einer figurgebundenen Einführung in die Raumgeometrie verfasst, das sich an einen breiten Leserkreis richtet, vor allem an Studierende für das Lehramt Mathematik, mit der Lehrerbildung befasste Lehrkräfte, Teilnehmer an mathematischen Zirkeln und Arbeitsgemeinschaften, Schüler/Schülerinnen der Mittelstufe und der Sekundarstufe II, Mathematiklehrer und -lehrerinnen und am Thema interessierte Laien. Es ist eine erste umfassendere deutschsprachige Monografie über diesen Gegenstand.

Dem Buch liegt eine CD mit der digitalen Version des Buches als Hypertext bei. Sie besteht aus einer pdf-Datei, deren farbige Abbildungen mit den entsprechenden Cabri 3D-Dateien verlinkt sind. Nach dem Anklicken der betreffenden Abbildung in der pdf-Datei öffnet sich die zur Abbildung gehörende Cabri 3D-Datei in einer vorher zu installierenden kostenfreien Demo-Version von Cabri 3D. Zur Unterstützung der Raumanschauung kann man die entsprechenden Raumfiguren im virtuellen Raum direkt manipulieren, um sie von allen Seiten zu betrachten, um sie zu vergrößern und um sie in ihrer Form zu verändern. Andere Links beziehen sich auf ergänzende Informationen im Internet.



Heinz Schumann

Elementare Tetraedergeometrie

Eine Einführung in die Raumgeometrie

0. **Einleitung** ... 1

1. **Besondere Tetraeder** ... 11

1.1. **Das gleichkantige oder regelmäßige Tetraeder** ... 13
1.1.1. Konstruktionen des regelmäßigen Tetraeders ... 13
1.1.2. Deckabbildungen des regelmäßigen Tetraeders ... 17
1.1.3. Besondere Geraden und Punkte des regelmäßigen Tetraeders ... 19
1.1.4. Berechnungen am regelmäßigen Tetraeder ... 20
1.1.5. Sätze über das regelmäßige Tetraeder ... 22
1.1.6. Lückenhafte Raumfüllung mit regelmäßigen Tetraedern ... 26

1.2. **Gleichseitige Tetraeder** ... 29
1.2.1. Eine erste Konstruktion gleichseitiger Tetraeder und erste Aussagen ... 29
1.2.2. Eine zweite Konstruktion gleichseitiger Tetraeder und weitere Aussagen ... 38
1.2.3. Einige weitere Kennzeichnungen gleichseitiger Tetraeder ... 43
1.2.4. Berechnungen am gleichseitigen Tetraeder ... 46
1.2.5. Die besonderen Kugeln gleichseitiger Tetraeder ... 49
1.2.6. Das Höhen-Hyperboloid gleichseitiger Tetraeder ... 57

1.3. **Rechtwinklige Tetraeder** ... 63
1.3.1. Konstruktionen rechtwinkliger Tetraeder ... 63
1.3.2. Berechnungen an rechtwinkligen Tetraedern ... 69
1.3.3. Räumliche Analogisierung des Pythagoras-Satzes ... 74
1.3.4. Tetraeder mit „Pythagoras-Eigenschaft“ ... 79
1.3.5. Einige Ungleichungen an rechtwinkligen Tetraedern ... 87

1.4. **„Rechteckige“ Tetraeder** ... 91
1.4.1. Existenz und Eigenschaften rechteckiger Tetraeder ... 91
1.4.2. Weitere Konstruktionen rechteckiger Tetraeder ... 93
1.4.3. Berechnungen am rechteckigen Tetraeder ... 94
1.4.4. Symmetrische rechteckige Tetraeder ... 99

2. **Das allgemeine Tetraeder** ... 101

2.1. **Tetraeder-Klassifikationen** ... 103
2.1.1. Klassifikation nach Symmetrie-Eigenschaften ... 103
2.1.2. Klassifikation nach Kantengleichheit ... 121
2.1.3. Klassifikation nach Innenwinkeln der Seitendreiecke ... 125
2.1.4. Klassifikation nach Winkeln zwischen zwei Seitendreiecken ... 130
2.1.5. Abschließende Bemerkung zu den Klassifikationen nach Winkeln ... 136

2.2. **Winkelmessungen am Tetraeder** ... 139
2.2.1. Die Summe der Kantenwinkel eines Tetraeders ... 139
2.2.2. Abschätzung der Flächenwinkel-Summe eines Tetraeders ... 139
2.2.3. Abschätzung der Raumwinkel-Summe eines Tetraeders ... 143

2.3. **Tetraederkonstruktionen** ... 149
2.3.1. Tetraederkonstruktionen aus Seitendreiecken und Flächenwinkeln ... 149
2.3.2. Kongruenzsätze für Tetraeder mittels Seitendreiecken und Flächenwinkel ... 155
2.3.3. Tetraederkonstruktionen aus Kanten und Kantenwinkeln ... 156
2.3.4. Konstruktionen ähnlicher Tetraeder aus Kantenwinkeln ... 160
2.3.5. Ähnlichkeitssätze über Tetraeder mittels Flächen- und Kantenwinkel ... 166

2.4. **Die Umkugel des Tetraeders** ... 169
2.4.1. Die Mittelsenkrechte einer Dreiecksfläche ... 169
2.4.2. Konstruktion der Umkugel des Tetraeders ... 171
2.4.3. Zur Lage des Umkugelmittelpunkts ... 173
2.4.4. Der Umkugelradius als Term aus den Kantenlängen ... 175
2.4.5. Eine analytische Berechnung der Lage des Umkugelmittelpunkts ... 183
2.5. **Die Inkugel des Tetraeders** ... 187
2.5.1. Abstandsgleiche Halbebenen ... 187
2.5.2. Kanten- und Flächenabstandsgleiche einer dreikantigen Ecke ... 188
2.5.3. Konstruktion der Inkugel des Tetraeders ... 192
2.5.4. Analogien zwischen Um- und Inkreisen und Um- und Inkugeln ... 195
2.5.5. Der Inkugelradius des Tetraeders ... 198
2.5.6. Eine Beziehung zwischen In- und Umkugelradius des Tetraeders ... 198
2.5.7. Tetraeder-Teilung durch Flächenabstandsgleiche und Flächenwinkel-halbierende ... 199
2.5.8. Eine analytische Berechnung der Lage des Inkugelmittelpunkts ... 201
2.5.9. Ein Satz über die Winkel an den Inkugel-Berührpunkten ... 202
2.6. **Die flächenberührenden Kugeln des Tetraeders** ... 205
2.6.1. Die Raumteilung mittels eines Tetraeders ... 205
2.6.2. Die flächenberührenden Kugeln und ihre Radienbeziehungen ... 206
2.6.3. Zusammenfassung über die flächenberührenden Kugeln ... 216
2.7. **Der Schwerpunkt des Tetraeders** ... 217
2.7.1. Konstruktion des Tetraeder-Schwerpunkts ... 217
2.7.2. Vektorielle Berechnung des Schwerpunkts ... 219
2.7.3. Das Schwerpunktetetraeder ... 221
2.7.4. Die Schwerpunktekugel ... 222
2.7.5. Die Mittenparallelogramme und das Mittenoktaeder ... 223
2.7.6. Beziehungen zwischen den Kanten eines Tetraeders und seinen Schwerlinien ... 226
2.8. **Die physikalischen Schwerpunkte des Tetraeders** ... 229
2.8.1. Die physikalischen Schwerpunkte des Dreiecks ... 231
2.8.2. Der Ecken- und der Volumenschwerpunkt des Tetraeders ... 234
2.8.3. Der Flächenschwerpunkt des Tetraeders ... 236
2.8.4. Der Kantenschwerpunkt des Tetraeders ... 240
2.8.5. Vektorielle Konstruktion der physikalischen Schwerpunkte ... 243
2.9. **Die Höhen des Tetraeders** ... 247
2.9.1. Aussagen über die Tetraederhöhen ... 247
2.9.2. Der Punkt von Monge ... 254
2.9.3. Das Höhen-Hyperboloid des Tetraeders ... 259
2.10. **Berechnungen am Tetraeder** ... 263
2.10.1. Die Standard-Volumenformel des Tetraeders ... 263
2.10.2. Weitere Volumenformeln des Tetraeders ... 268
2.10.3. Sinussätze am Tetraeder ... 279
2.10.4. Kosinussätze am Tetraeder ... 281
2.10.5. Einige vektorielle Berechnungsergebnisse am Tetraeder ... 289
2.11. **Ungleichungen am Tetraeder** ... 291
2.11.1. Von der Dreiecksungleichung zu Tetraederungleichungen ... 291
2.11.2. Existenzaussagen für Tetraeder ... 296
2.11.3. Anwendung von Standard-Ungleichungen ... 302

2.12. **Die Sätze von Menelaos und Ceva** 303
2.12.1. Der Satz von Menelaos für Dreiecke und für Tetraeder 303
2.12.2. Der Satz von Ceva für Dreiecke und für Tetraeder 307
2.12.3. Eine Anwendung des Satzes von CEVA auf Dreiecke und auf Tetraeder 314
2.13. **Verschiedenes** 323
2.13.1. Ebene Tetraederschnitte 323
2.13.2. Minimierung der Tetraederoberfläche 337
2.13.3. Der Lote-Satz von Jacob Steiner 350
2.13.4. Satz von Miquel 360
2.13.5. Der Satz von Desargues 366
3. **Besondere Tetraeder (Fortsetzung)** 373
3.1. **Tetraeder mit Höhenschnittpunkt (orthozentrische Tetraeder)** 375
3.1.1. Einfache Konstruktionen orthozentrischer Tetraeder 375
3.1.2. Lage des Höhenschnittpunkts 376
3.1.3. Weitere Aussagen über orthozentrische Tetraeder 377
3.1.4. Die Zwölfpunktekugeln 379
3.1.5. Einige Berechnungen an orthozentrischen Tetraedern 388
3.2. **Tetraeder mit kantenberührender Kugel** 395
3.2.1. Notwendige Bedingungen für Tetraeder mit Kantenkugel-Eigenschaft 395
3.2.2. Hinreichende Bedingungen für ein Tetraeder mit Kantenkugel-Eigenschaft 396
3.2.3. Konstruktion eines Tetraeders zu vorgegebener Kantenkugel 402
3.2.4. Flächenwinkel-Kennzeichnung des Tetraeders mit Kantenkugel 404
3.2.5. Formel für den Radius der Kantenkugel 406
3.2.6. Beziehung des Tetraeders mit Kantenkugel zu den orthozentrischen und gleichseitigen Tetraedern 409
3.3. **Tetraeder mit gleichen Gegenkantenprodukten (isodynamische Tetraeder)** 411
3.3.1. Eine Konstruktion isodynamischer Tetraeder 411
3.3.2. Beziehung isodynamischer Tetraeder zu anderen Tetraedertypen 411
3.3.3. Kennzeichnungen isodynamischer Tetraeder 412
3.3.4. Die Lemoine-Kreise und die Lemoine-Kugeln 415
Quellenverzeichnis 419
Anhang 435
A1 Raumgeometrische Basisbegriffe und -aussagen 437
A2 Geometrische Konstruktionen im Raum 449

Das Buch enthält **464 Seiten, 848 Abbildungen, 5 Diagramme, 11 Tabellen**.
Die raumgeometrischen Figuren sind mit Cabri 3D (**www.cabri.com**) konstruiert.

Anlage: CD mit Buch als Hypertext, Cabri 3D (30-Tage-Version) und Handbuch
Hinweise zur Installation und Benutzung in der Liesmich-Datei auf der CD.

ISBN 978-3-88120-520-7 (Buch mit CD), **978-3-88120-521-4 (nur CD)**

Verkaufspreis (Buch plus CD): 37,80 €; Verkaufspreis nur CD: 20,– €

Verlag Franzbecker, Hildesheim und Berlin 2011

http://www.franzbecker.de

Zum Inhalt: Eine neue Ära des Geometrieunterrichts hat begonnen, in welcher der geometrisierte Raum als virtueller Handlungsraum computergrafischer Art für das Lernen und Lehren von Raumgeometrie genutzt werden kann. Abgesehen von der beschränkten Verwendbarkeit entsprechender Skizzen, Zeichnungen und physischer Modelle musste man bisher, um raumgeometrisch arbeiten zu können, die Methoden der Darstellenden Geometrie mehr oder weniger gut beherrschen. Erfahrungsgemäß bildet aber die Aneignung solcher Methoden eine erhebliche Barriere für den Zugang zur Raumgeometrie. U. a. ist deshalb die Raumgeometrie ein Stiefkind des Geometrieunterrichts, – obwohl „der Raum“ ein wesentliches Medium des Menschen ist.
Dank der weiterentwickelten Methoden der 3D-Computergrafik, Software-Ergonomie und leistungsfähiger Hardware verfügen wir mit dem für den Raumgeometrieunterricht entwickelten Cabri 3D ein prototypisches interaktives und dynamisches Geometriesystem, das uns die Anwendung der Methoden der Darstellenden Geometrie abnimmt und trotz der Interaktion mit einem zweidimensionalen Bildschirm gestattet, einen relativ offenen geometrisierten virtuellen Raum visuell wahrzunehmen und mental zu konstruieren, in dem wir komfortabel raumgeometrisch arbeiten können. Mit Cabri 3D gewinnen wir einen interaktiven und dynamischen Zugang zu den gegenständlichen Phänomenen der Raumgeometrie als eine Voraussetzung für Theoriebildung.

Heinz Schumann

Schulgeometrie im virtuellen Handlungsraum

Ein Lehr- und Lernbuch der interaktiven Raumgeometrie mit Cabri 3D

Vorwort

I Einführung

1. Der virtuelle Raum als Handlungsraum für den Geometrie-Unterricht
2. Interaktives Konstruieren, Erzeugen, Abbilden, Messen und Berechnen im virtuellen Raum
3. Dynamisches Visualisieren und Variieren im virtuellen Raum
4. Gestaltung interaktiver Lernumgebungen für die Raumgeometrie

II Ausgewählte Themen

1. Ebene Geometrie analogisieren – ein Weg zur Raumgeometrie
2. Sätze der ebenen Geometrie raumgeometrisch beweisen
3. Elemente der Darstellenden Geometrie auf andere Art
4. Parallelprojektive Schattenbilder
5. Zentralprojektion
6. Namensgemäße Behandlung der Kegelschnitte
7. Exemplarische Formenkunde
8. Die Platonischen Körper: ein Zugang in Bildern
9. Raumfüllungen mit halbregelmäßigen Polyedern
10. Polyederkonstruktionen: Offene Aufgaben
11. Polyedrische Körper-Approximation
12. Durchdringungsobjekte konstruieren
13. Raumobjekte modellieren und entwerfen
14. Experimentelles Lösen raumgeometrischer Berechnungsaufgaben
15. Dynamisches Bearbeiten raumgeometrischer Extremwertaufgaben
16. Lösung analytisch-geometrischer Aufgaben des Raumes mittels Konstruieren und Messen

Literaturverzeichnis
Internetquellen

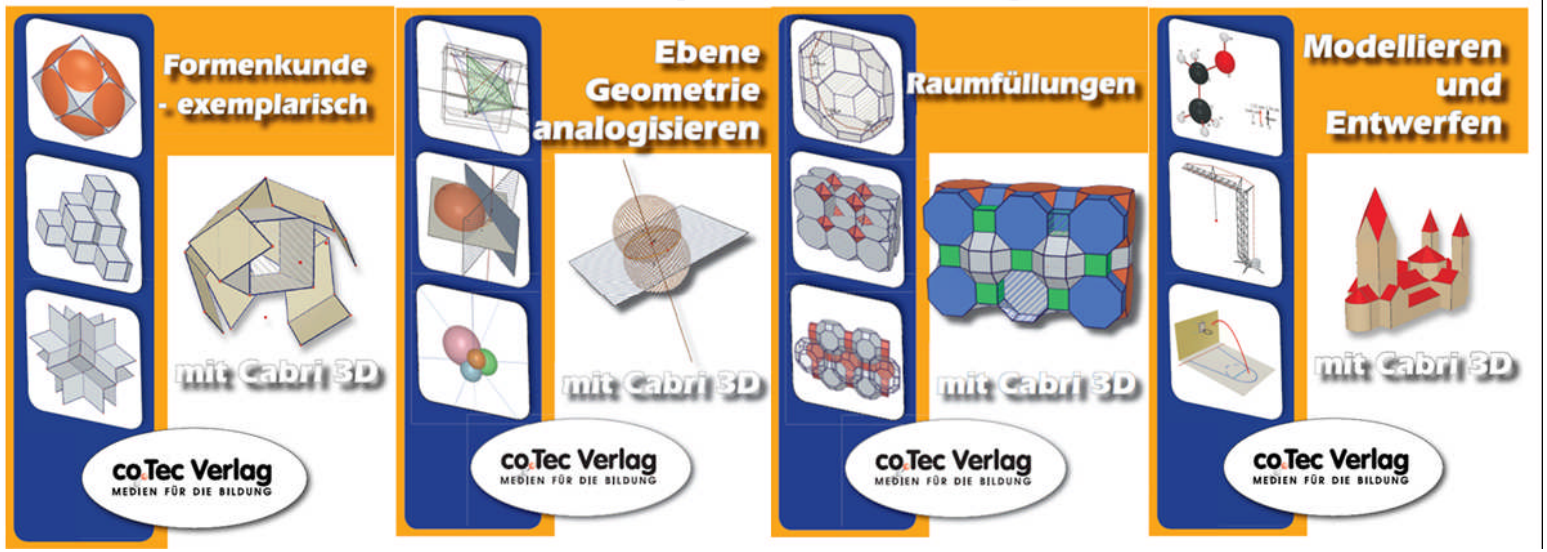
Anlage: CD mit pdf-Datei des Buches, Demo-Version (30-Tage-Vollversion) und Handbuch von Cabri 3D

ISBN 978-3-88120-463-7
550 Seiten, ca. 1400 mit Cabri 3D konstruierten Abbildungen
Preis: 32,80 € (Buch und CD); 22,80 € (nur CD)
1. Aufl. 2007
www.franzbecker.de

„Insgesamt ein bemerkenswertes, Pionierarbeit leistendes Buch, welches geradezu einlädt, in ihm zu schmökern und aus dem überreichen Angebot das eine oder andere auszuprobieren, für sich und/oder für den Unterricht….
Ich wünsche dem Werk weite Verbreitung und Nutzung. Wegen seiner didaktisch-methodischen Verankerung und seiner umfassenden Orientierung wird es auch dann hilfreich sein, wenn man (auf dem Markt befindliche oder zukünftige) konkurrierende Dynamische Raumgeometriesystem-Produkte benutzt.“

Prof. Dr. Hans Schupp, Universität des Saarlandes

Interaktive Skripte zur Raumgeometrie



Extremwert-
aufgaben
bearbeiten
mit Cabri 3D
co.Tec Verlag
MEDIEN FÜR DIE BILDUNG

Konkrete
Kunst
modellieren
mit Cabri 3D
co.Tec Verlag
MEDIEN FÜR DIE BILDUNG

Cabri 3D
Video
Glossar
co.Tec Verlag
MEDIEN FÜR DIE BILDUNG