Heinz Schumann

Körperschnitte

Raumgeometrie interaktiv mit dem Computer

- Begleitbuch zur Software SCHNITTE
- Unterrichtlicher Einsatz
- Projekte
- Aufgaben
- Didaktische und methodische Grundlagen

Mit zahlreichen Abbildungen,
Beispielen und Aufgaben.
Dümmlerbuch 4598

FERD. DÜMMLERS VERLAG · BONN

Dieses Begleitbuch wird nur zusammen mit einer der nachfolgenden **Systemdisketten** in 3,5" DD, verfaßt von M. Doorman, Freudenthal-Institut Utrecht, und H. Schumann, PH-Weingarten, abgegeben.

- Einzelplatz-Lizenz. DM 49,80 (Dümmlerbuch 45992)
- Schul-Lizenz. DM 198,– (Dümmlerbuch 45996)
- Erweiterte Schul-Lizenz: zusätzlich zur Schul-Lizenz zu erwerben. Nur diese Erweiterung gestattet Lehrern und Schülern die Benutzung der Software auch auf eigenen Computern. DM 100,– (Dümmlerbuch 45997)
- Handbuch. 120 Seiten. DM 24,80 (Dümmlerbuch 4598)

Weitere DÜMMLERbücher und Disketten zur Geometrie in der Reihe Computer-Praxis Mathematik:

- Holland: GEOLOG. Geometrische Konstruktionen mit dem Computer. Handbuch Version 3.0 mit einer Beilage für Version 3.5. (Dümmlerbuch 4576/45760)
- Weth: Arbeitsbuch GEOLOG. Geometrie mit dem Computer. Konstruieren, Definieren, Variieren. Sek. I. (Dümmlerbuch 4582)
- Holland: GEOEXPERT. Konstruieren, Beweisen, Berechnen, Problemlösen mit dem Computer. Benutzerhandbuch. (Dümmlerbuch 4596)
- Henn/Jock: Arbeitsbuch CABRI Géomètre. Konstruieren mit dem Computer. Arbeitsbuch für die Sek. I. (Dümmlerbuch 4574)
- Schupp/Berg: PROgramme für den GEOmetrie-Unterricht. Ausbaufähiges Software-Paket zur experimentellen Geometrie für Sek. I und II. (Dümmlerbuch 4548)
- Elschenbroich/Meiners: Computer-Graphik und Darstellende Geometrie im Unterricht der Linearen Algebra. Arbeitsbuch für die Sek. II. (Dümmlerbuch 4584)

ISBN 3-427-**45981**-0 (Preis-)Änderungen vorbehalten.

Printed in Germany by WB-Druck, 87669 Rieden

Vorwort

Die tradierten Lehrpläne beinhalten im wesentlichen nur, was sich mit traditionellen Medien im Unterricht mehr oder weniger gut realisieren läßt. So zum Beispiel muß die Behandlung des (dreidimensionalen) Raumes und seiner Modellierungen als vernachlässigt bezeichnet werden, obwohl der Raum das 'Medium des Menschen' ist.

Dreidimensionale Computergrafik, die den Raum zwar auf einen planaren Bildschirm abbildet und so noch der taktilen Wahrnehmung entzogen bleibt, kann auf vielfältige, die bisherigen medialen Möglichkeiten übersteigende Weise helfen, räumliche Sachverhalte darzustellen und zu konstruieren.

Die durch das Computerwerkzeug SCHNITTE definierbare Lernumgebung soll exemplarisch verdeutlichen, welche Chancen der räumlichen Geometrie nicht nur im Rahmen des Mathematikunterrichts erwachsen. - Ein noch so tragfähiges Computerprogramm kann seinen Einsatz in einem allgemeinbildenden Unterricht aber nicht nur durch seine bloße Existenz legitimieren, sondern seine Verwendung als Unterrichtssoftware bedarf einer Begründung in einem allgemeinbildenden Kontext.

Welche Probleme und Gefahren induziert das Lernen in einer Scheinwelt auf dem Bildschirm, in der der Schüler / die Schülerin Dinge tun kann, die in der Realität unmöglich oder folgenschwer wären ?

Zu Dank verpflichtet bin ich Michiel Doorman vom Freudenthal-Institut in Utrecht, ohne dessen Computerwerkzeug 'Doorzien' (Durchblick), dem Vorgänger von SCHNITTE, diese Monographie nicht entstanden wäre.
Dank auch an Gerhard Schlosser, der mein Manuskript zu diesem Buch in einen druckfertigen Zustand gebracht hat.

Waldburg/Weingarten, im Dezember 1994

Heinz Schumann

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Situation des derzeitigen Geometrieunterrichts in der Sekundarstufe I ist u.a. gekennzeichnet durch ein Mißverhältnis der Behandlung der räumlichen zur ebenen Geometrie, das sich zeitlich quantifiziert etwa mit 1:3 angeben läßt. Lehrpläne anderer Länder, wie z.B. die NCTM-Empfehlungen in den USA, der niederländische Lehrplan und der (neue) russische Lehrplan werden der Bedeutung der drei-dimensionalen Geometrie als Werkzeug zur und Ergebnis einer Modellierung der uns umgebenden dreidimensionalen Welt besser gerecht.

Als Erklärungshypothesen für dieses Mißverhältnis können angeführt werden:
- Die Lehrpläne der deutschen Bundesländer spiegeln die Beschränktheit der traditionellen Medien zur Darstellung und Konstruktion raumgeometrischer Sachverhalte wider.
- Die Ausbildung der Mathematiklehrer und Mathematiklehrerinnen in der Elementargeometrie, insbesondere in der räumlichen, ist mangelhaft, - falls diese überhaupt stattfindet.
- Das schulische Lernen von zweidimensionaler "Geometrie" ist weitgehend ein Vorratslernen und -lehren, das keine ausreichende Übertragung auf die und Anwendung in der Raumgeometrie findet.

Gliedert man den Bereich der schulischen Raumgeometrie in die einander überlappenden Stoffsäulen Formenlehre, Konstruktionslehre und Berechnungslehre (vgl. Fig. 1.1), so sind folgende raumgeometrischen Defizite vor allem in der Formenlehre und in der Konstruktionslehre auszumachen, während die Berechnungslehre - wegen ihrer traditionellen Prüfungsrelevanz - relativ gut repräsentiert ist: Es herrscht ein Mangel an geometrischen Formen und ihren Darstellungen, raumgeometrische Konstruktionen in Analogie zu den planimetrischen Konstruktionen fehlen gänzlich.

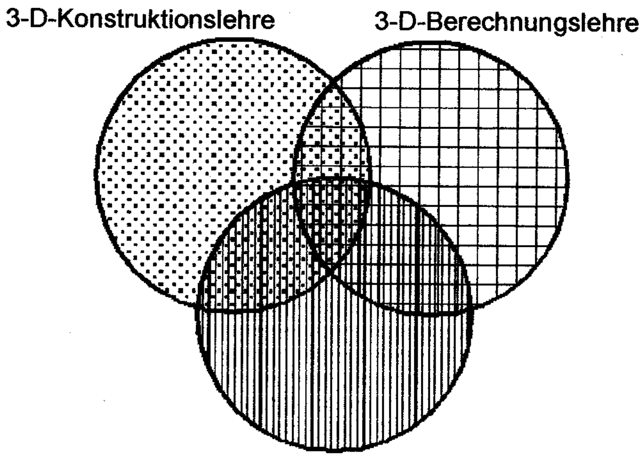


Fig. 1.1

1 Einleitung

Das Ziel dieser Arbeit ist es, am Beispiel des Themas "Körperschnitte" - einer Facette der Raumgeometrie - zu zeigen, wie die mediale Schwäche des bisherigen Geometriecurriculums und die durch sie bedingten raumgeometrischen Defizite mit Hilfe geeigneter Unterrichtssoftware ansatzweise überwunden werden kann.

Ein ebener Körperschnitt ist definiert als Schnittmenge einer Ebene mit dem betreffenden Körper; im Falle eines Vollkörpers besteht die Schnittmenge aus einer Fläche oder aus mehreren Flächen, im Falle eines Flächenkörpers aus einer Linie oder mehreren Linien, im Grenzfall kann die Schnittfläche mit den Körperseitenflächen übereinstimmen oder zu Körperkanten oder -punkten degenerieren. Die Zerlegung oder Zerfällung eines (konvexen) Körpers längs einer Schnittfläche hat zwei Schnitt- bzw. Teilkörper zur Folge, falls die Schnittfläche innere Körperpunkte enthält.
Auf den Körperbegriff soll hier nicht problematisiert werden. Im folgenden unterscheiden wir i.a. nicht streng zwischen dem "geometrischen Körper" und dem materialen oder digitalen Realisat eines solchen Körpers.

Bei der Behandlung von Körperschnitten sind also zwei Aspekte zu unterscheiden:

- die Behandlung der Schnittfläche bzw. der Schnittlinien (Betrachtung der Form, Lage, Verlagerung usw.)

- die Behandlung der Schnittkörper (Formbetrachtung und Betrachtung der Formvariation)

Bevor auf die computerunterstützte Erzeugung und Darstellung von Körperschnitten näher eingegangen wird, beleuchten wir verschiedene legitimative Aspekte der Behandlung von Körperschnitten in einem **allgemeinbildenden** Geometrieunterricht, vorwiegende in der Sekundarstufe I.

Als wesentlich kann man folgende reich- und beziehungshaltigen Aspekte ansehen:
- Körperschnitte und Training der Raumvorstellung
- Körperschnitte in erkenntnistheoretischer Sicht
- Körperschnitte in einem allgemein pädagogischen Kontext
- Körperschnitte als künstlerisches Ausdrucksmittel
- Körperschnitte bei der Produktion von Zweck- und Nutzformen
- Körperschnitte und geometrische Problemlösungsaufgaben
- Körperschnitte und dreidimensionale Computergrafik

Um den Rahmen einer Einleitung nicht zu sprengen, können diese allgemeinbildenden Bezüge oft nur exemplarisch und unvollständig skizziert werden.

1.1 Körperschnitte und Training des Raumvorstellungsvermögens

Raumvorstellung ist ein Primärfaktor unserer kulturspezifischen Intelligenz. Eine gute Raumvorstellung ist Voraussetzung für die Eignung zu vielen Berufen und für den Erwerb schulischen Wissens in den meisten Fächern. Die Bedeutung der Körperschnitte, insbesondere der Schnittflächen bzw. Schnittlinien, für die Messung und das Training von Raumvorstellungsleistungen haben E. Fay und O. Grömminger erkannt und einen Test des Namens "Schnitte" entwickelt, den sie bezeichnen als "Ein neues Verfahren zur differenzierten Erfassung des räumlichen Vorstellungsvermögens im oberen Leistungsbereich. Von den auf dem Markt befindlichen Raumvorstellungstests unterscheidet es sich u.a. durch seine extrem niedrige Wahrnehmungsgebundenheit bedingt durch die fast ausschließlich verbale Aufgabenstellung.Diese zwingt den Probanden zum 'vorstellungsmäßigen Operieren im mentalen Raum'. Darüber hinaus werden dem Probanden gleichzeitig sowohl Visualisierungsleistungen im Sinne der Manipulation von Teilelementen einer Gesamtkonfiguration, als auch Orientierungsleistungen, also die Betrachtung eines dreidimensionalen Körpers aus unterschiedlichen Perspektiven abverlangt. Nur 'kontinuierliches Operieren' führt zur richtigen Lösung, diskrete mentale Operationen reichen im Gegensatz zu den meisten gängigen Raumvorstellungstests nicht aus. Da es stets um Körpertypen geht und so grundsätzlich bei jeder Aufgabe unendlich viele Schnittpositionen möglich sind, muß der Proband 'divergent produzieren', d.h. er kann sich nie auf ein einziges Vorstellungsbild beschränken." (Zitiert nach Fay, E. et al. 1991, S. 36).

Zur Veranschaulichung des Tests "Schnitte" zeigen wir hier nur eine modifizierte und an den Sprachgebrauch der Schulgeometrie angepaßte Fassung eines Instruktionsitems (vgl. Fig. 1.1.1 a ohne Körperbilder), das für leistungsschwächere Schüler zur Unterstützung ihrer Vorstellung mit Schrägbildern ergänzt werden könnte. (Fig. 1.1.1 b mit Körperbildern).
Im Gegensatz zu den Aufgaben des Tests "Schnitte" sind die Testaufgaben in Figur 1.1.2 von konvergenterer Art.

Voraussetzung für die im Test "Schnitte" geforderten spezifischen Raumvorstellungsleistungen ist überhaupt ein entsprechender Entwicklungsstand der (räumlichen) Intelligenz. Im Rahmen der qualitativ-empirischen Studien, auf denen Jeans Piaget's Stufentheorie der kognitiven Entwicklung gründet, haben Piaget und seine Mitarbeiter mittels nicht standardisierter Interviews u.a. untersucht, wie Kinder konkrete Schnittoperationen an Körpern ausführen, die Ergebnisse solcher Operationen antizipieren und interpretieren und wie sich die adäquaten Vorstellungen mit zunehmendem Alter entwickeln (vgl. J. Piaget et al.: Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde. S. 291 - 316). Die Ergebnisse Piaget's resumierend ist davon auszugehen, daß sich das räumliche Denken 'des Kindes' im Alter von 7 - 11/12 Jahren, d.h. im konkret-operativen Stadium, soweit entwickelt, daß es einfache Schnittoperationen an einfachen Körpern (Prisma,

Instruktionsitem

Ein Körper wird mit einer Ebene geschnitten.
Als Schnittfläche entsteht ein nicht-quadratisches Rechteck.
Mit welchen oder welchem der folgenden Körper ist dies möglich ?

I. Würfel

II. Quadratische Pyramide

III. Pyramidenstumpf mit quadratischer Grundfläche

(A) mit allen
(B) nur mit I. und II.
(C) nur mit I. und III.
(D) nur mit II. und III.
(E) nur mit I.

Fig. 1.1.1 a

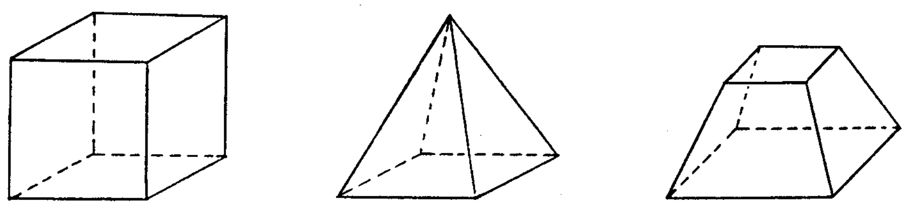


Fig. 1.1.1 b

Parallelepiped, Zylinder, Kegel, Kugel) bei konkreter Repräsentation geistig bewältigen kann. Damit ist die lernpsychologische Voraussetzung für eine entsprechende Behandlung von Körperschnitten in der Grundschule und in der Sekundarstufe I gegeben.

Den allgemeinen Bildungs- und Erziehungsauftrag, der in den Mathematiklehrplänen, z.B. des Lehrplans für die Sekundarstufe I (Hauptschule, Realschule, Gymnasium) B.-W. festgelegt ist, kann u.a. entnommen werden: ... Ziel des Mathematikunterrichts ist es, Raumanschauungsvermögen und Vorstellungskraft auszubilden... .

U.a. haben H. Wölpert / K.P. Müller (1983) und H. Besuden (1994) auf die Bedeutung von Körperschnitten für die Entwicklung und das Training der Raumvorstellung hingewiesen. Ansonsten findet sich in der didaktischen Literatur und auch der Schulbuchliteratur des deutschen Sprachraumes nur wenig zum Thema Körperschnitte. (Einen Raumvorstellungstest anhand von Würfelschnittkörpern, bei denen im Vergleich zum Würfel die Oberflächengröße vermindert bzw. vergrößert wird bzw. erhalten bleibt, hat H. Schumann 1989 entwickelt). Die (ehemals) sowjetische Literatur zur Geometriedidaktik und -methodik ist eine Fundgrube für Materialien zum Raumvorstellungstraining mit und ohne Körperschnitte (vgl. auch Abschnitt 1.6).

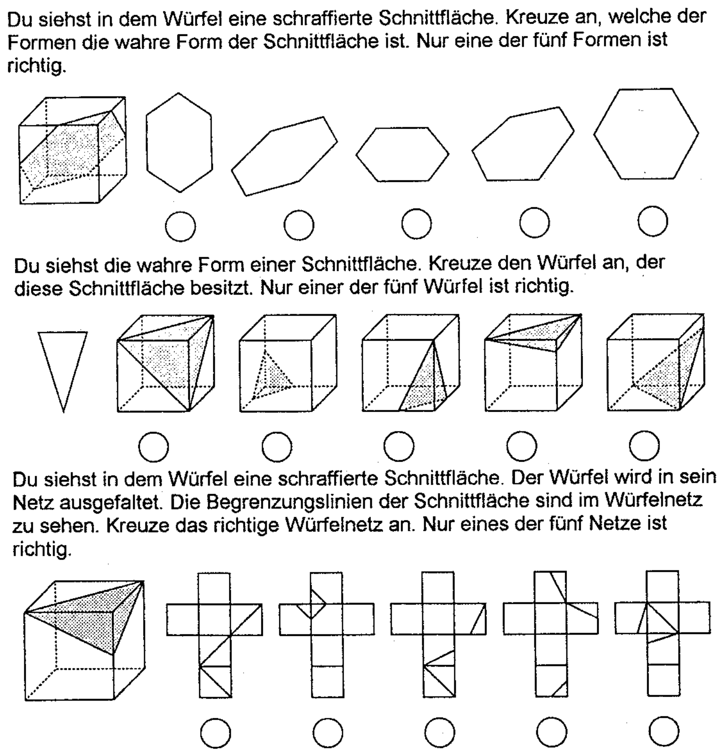


Fig. 1.1.2

1.2 Erkenntnistheoretisches über Körperschnitte

Ein grundlegendes Schema der Erkenntnisgewinnung im Bereich der konstruktiven Körperlehre ist das Schema 1.2.1, das folgendermaßen interpretiert werden kann:
Erste Interpretation: Welche Körper ergeben sich durch Anwendung entsprechender Operationen ? - Ausgehend von einem oder mehreren Körpern werden durch einzelne oder mehrere (mathematisierte) Operationen (z.B. Vereinigungsbildungen, Differenzbildungen, Schnittmengenbildungen, Durchdringungen, äquiforme Transformationen, affine Transformationen, topologische Transformationen, Symmetrisierungen, Schnittoperationen) neue Körper erzeugt - "vom Bekanntem zu Neuem". Die Frage nach der Varianz und Invarianz der Eigenschaften der Ausgangskörper bei den ausgeführten Operationen dient der Findung von Erkenntnissen über die erzeugten Körper.
Zweite Interpretation: Wie müssen die Operationen beschaffen sein, um aus bestimmten Körpern andere zu erzeugen ? - Diese Frage konzentriert sich auf die Eigenschaften der Operationen.
Dritte Interpretation: Auf welchen Körper lassen sich die durch Anwendung bestimmter Operationen generierten Körper zurückführen ? Diese Frage beinhaltet das Umkehrproblem bzw. das Problem der Zurückführung ("von Neuem auf schon Bekanntes").
Das Schema 1.2.2 zeigt die Spezialisierung des allgemeinen Schemas auf die Schnittoperationen.
Die Figur 1.2.1 veranschaulicht nicht ebene Schnittoperationen an einem Würfel mit ihrem Ergebnis. Im folgenden schränken wir uns auf ebene Schnitte ein. Ebene Schnittoperationen bestehen aus der Festlegung der Schnittebenen und der sich daraus ergebenden Schnittflächen sowie der Separierung der entstandenen Schnittkörper. (Die Zerfällung längs der Schnittflächen läßt das Ergebnis der Schnittoperationen sichtbar werden.) Es kann unterschieden werden zwischen einfachen Schnitten, d.h. Schnittkörperbildung mittels einer Ebene, und kombinierten Schnitten, d.h. simultane Schnittkörperbildung mittels mehreren Ebenen. Die kombinierten Schnitte sind durch sukzessive Ausführung einzelner Schnitte ersetzbar. Ein anderes Unterscheidungsmerkmal von Schnittoperationen ist die Auswahl von Schnittkörpern nach bestimmten Kriterien oder die 'Gleichbehandlung' aller Schnittkörper: Die selektive Schnittkörperbildung (bei der restliche Schnittkörper als 'Abfallprodukte' unbeachtet bleiben) oder die nicht selektive Schnittkörperbildung (bei der alle Schnittkörper beachtet werden). - Bei einer iterativen Schnittkörperbildung wird der Schnittkörper oder werden die Schnittkörper derselben oder denselben Schnittoperationen unterzogen bis ein Abbruchkriterium (z.B. Ecken- oder Kantenanzahl) erfüllt ist (vgl. Schema 1.2.3). In der Figur 1.2.2 ist die Erzeugung des Kuboktaeders als iterative und selektive Schnittkörperbildung zu sehen.

$$\text{KÖRPER} \xrightarrow{\text{Operation(en)}} \text{KÖRPER'}$$

Schema 1.2.1

$$\text{KÖRPER} \xrightarrow[\text{Operation(en)}]{\text{Schnitt-}} \text{SCHNITTKÖRPER}$$

Schema 1.2.2

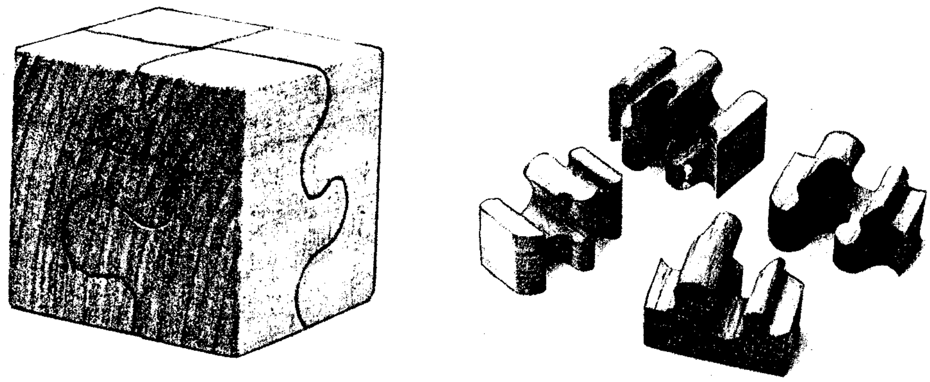


Fig. 1.2.1

$$\begin{tikzcd} \text{KÖRPER} \arrow[r, "\text{Schnitt-}", "\text{Operation(en)}"'] & \text{SCHNITTKÖRPER} \arrow[l, bend left=60] \end{tikzcd}$$

Schema 1.2.3

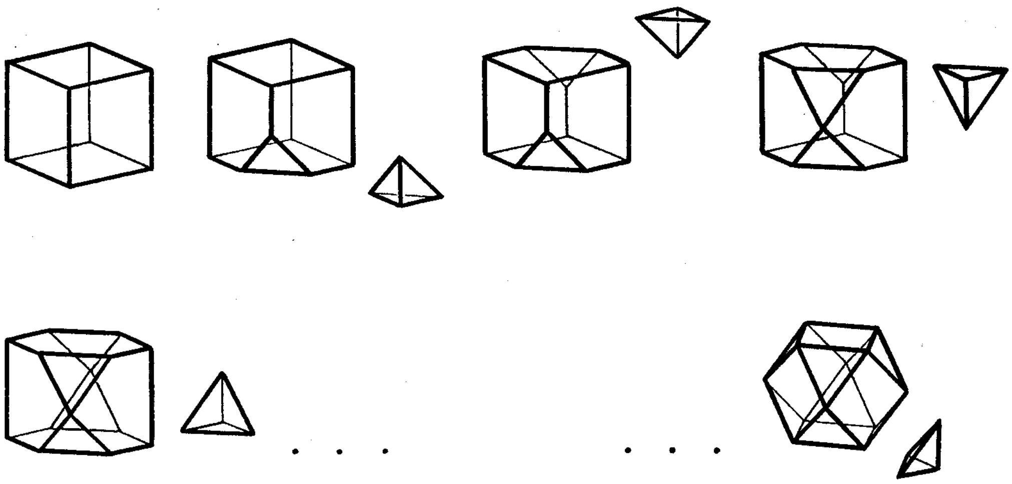


Fig. 1.2.2

Ausgangskörper und Ergebniskörper der selektiven Schnittoperationen können in Gruppierungen angeordnet werden. Da die Schnittoperationen auf die Körper abbauend wirken, kann man von 'Körperabbau-Gruppierungen' sprechen. Eine solche Abbaugruppierung, beispielsweise des Würfels zeigt die Figur 1.2.3 (mit den halbregelmäßigen Phasenbildern); die kombinierten Schnittoperationen (Einzelschnitte in der ersten Zeile der Figur 1.2.3) sind hier das 'gleichmäßige Eckenabschneiden' bzw. Stumpfen mit einer kontinuierlichen Verlagerung der Schnittflächen bis von den ursprünglichen Würfelflächen nur noch die Mitten übrigbleiben (kleinstes Element der Gruppierung: das Oktaeder). In der Figur 1.2.4 (Phasenbilder) ist die Abbaugruppierung abgebildet, die durch 'gleichmäßiges Abkanten' des Würfels bei stetiger Verlagerung der Schnittflächen entsteht (kleinstes Element der Gruppierung: das Rhombendodekaeder). - Von der äquiformen Erzeugung der Körper her gesehen, ist die Operation des gleichmäßigen Eckenabschneidens eine Art Umkehroperation, die auf das Oktaeder angewandt, wieder zum Würfel führt (Figur 1.2.5, Schnittflächen weiß). Das Stumpfen ist auch für die Abbaugruppierung in Figur 1.2.4 Umkehroperation; das zeigt das gestumpfte Rhombendodekaeder in Figur 1.2.6. - Neben den linearen Abbaugruppierungen gehen wir noch auf eine nicht lineare Gruppierung ein: Von einem Tetraeder als größtem Körper aus können durch Legen von entsprechenden Schnitten (Figur 1.2.7 mit Fallunterscheidungen für die Lage von Schnitten; es ist nur die erste Generation von Schnittkörpern dargestellt) Polyeder mit größerer Flächenanzahl gewonnen

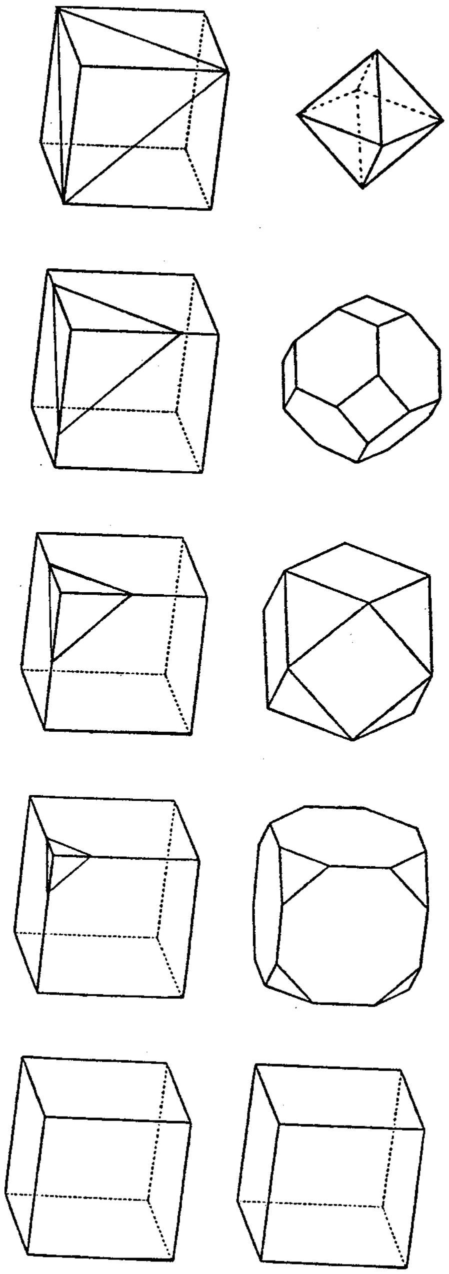


Fig. 1.2.3

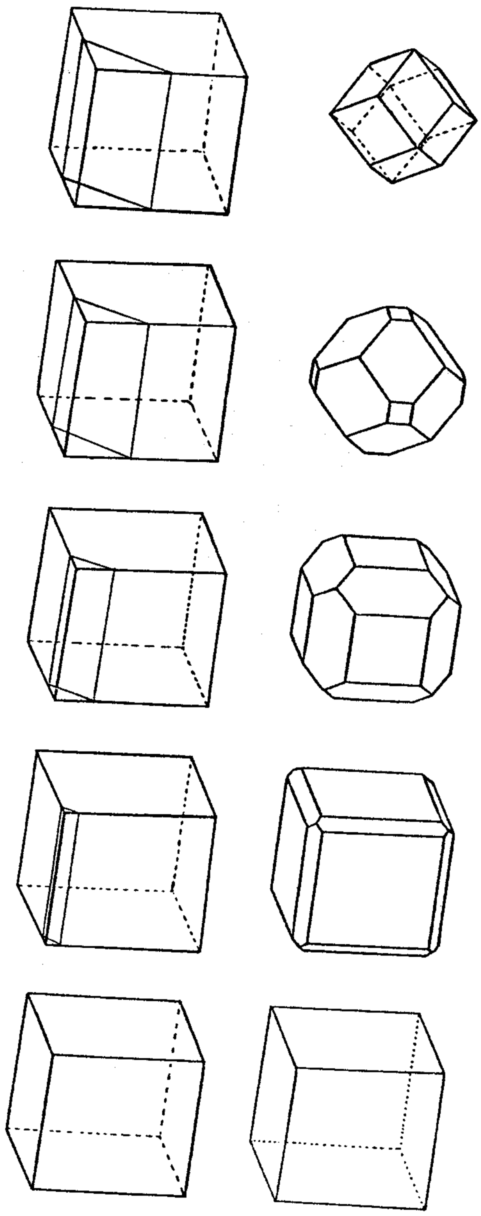


Fig. 1.2.4

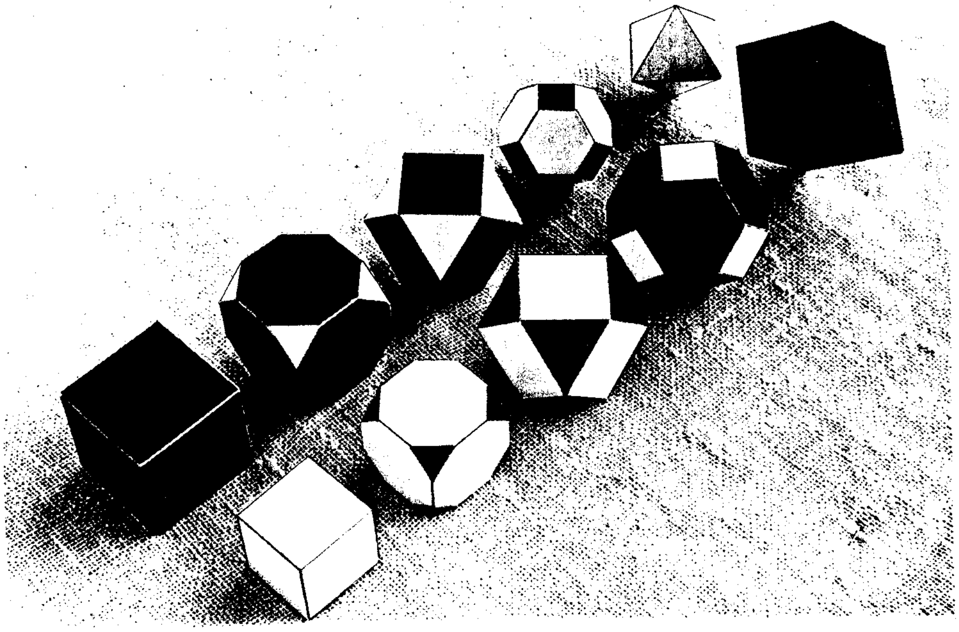
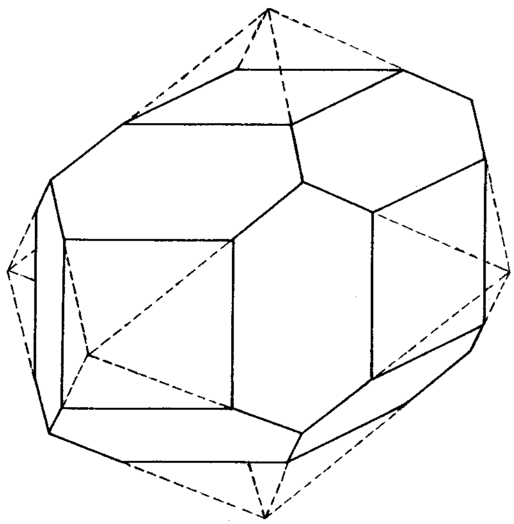


Fig. 1.2.5



werden (vgl. auch Kapitel 2, Abschnitt 5). Die Schnittpolyeder sind Repräsentanten von Klassen (topologisch) äquivalenter Polyeder.

Wir kehren noch einmal zum Schema 1.2.2 zurück und betrachten die sich aus ihm ergebenden drei Grundaufgaben für Körperschnitte (Schemata 1.2.4 a - c):

Gegeben sind in der ersten Grundaufgabe (Schema 1.2.4 a) der zu schneidende Körper und eine Beschreibung der Schnittoperation(en). Gesucht sind die Schnittkörper bzw. eine Auswahl von Schnittkörpern.

Beispiel (Fig. 1.2.8): Gegeben ist eine quadratische Pyramide, die durch eine Ebene parallel zur Grundfläche geschnitten werden soll. Das Ergebnis ist eine quadratische Pyramide und ein quadratischer Pyramidenstumpf.

Gegeben sind in der zweiten Grundaufgabe (Schema 1.2.4 b) der zu schneidende Körper und eine Beschreibung der Schnittkörper. Gesucht sind die entsprechenden Schnittoperationen.

Beispiel (Fig. 1.2.9): Gegeben ist ein quadratischer Pyramidenstumpf, der so geschnitten werden soll, daß als Schnittkörper die (schon bekannten) Prismen und Pyramiden entstehen. Es müssen vier Schnitte senkrecht zur Grundfläche durch die Kanten der Deckfläche gelegt werden. - Hier z.B. kann das Schema zum Schema des zerlegungsgleichen Verwandelns (Schema 1.2.5) erweitert werden, indem die Schnittkörper noch umgeordnet und so zusammengesetzt werden, daß sie neben der quadratischen Säule eine quadratische Pyramide und einen Quader bilden. Man sagt: Der quadratische Pyramidenstumpf ist diesen Körpern zerlegungsgleich.

Hier können auch die Körperpuzzles als Umkehraufgaben eingeordnet werden: Gegeben ist ein Satz von Schnittkörpern, den man sich durch Zerlegen bzw. Zerschneiden aus einem Körper entstanden denken kann. Gesucht ist das Zusammensetzen (als eine Umkehroperation zum Zerschneiden) der Teile zur vorgegebenen Körperform.

In der dritten Grundaufgabe (Schema 1.2.4 c) sind gegeben der (die) Schnittkörper und eine Beschreibung der Schnittoperation(en). Gesucht sind Körper aus denen mittels Schnittoperation(en) die Schnittkörper erzeugt werden.

Beispiel (Fig. 1.2.10): Gegeben ist das Kuboktaeder, das mittels Eckenabschneiden generiert worden ist. Diese Aufgaben hat zwei Lösungen: Das Kuboktaeder kann durch Stumpfen eines Würfels oder eines Oktaeders gewonnen werden.

Wir schließen diesen Abschnitt mit einer Erweiterung des Begriffs der Schnittoperationen. Körper, wie sie in Figur 1.2.11 und 1.2.12 dargestellt sind, sind nicht durch ebene Schnitte herstellbar. Operationen, die solche Körper produzieren, können folgendermaßen erklärt werden: Man bildet den (die) zu subtrahierenden Schnittkörper als Schnittmenge von Halbräumen, die zu den "Schnittflächen" gehören, und dem Körper. Die konkrete Durchführung solcher Operationen mit Schnittwerkzeugen, z.B. mit Messer oder Säge an Körperrealisaten ist zwar noch am Beispiel Fig. 1.2.11 vorstellbar, versagt aber am Beispiel 1.2.12. Hier müssen andere Werkzeuge, z.B. Stemmeisen, Stanzwerkzeuge oder spezielle Bohrer (Releaux-Bohrer) benutzt werden. - Jedenfalls ist mit der erweiterten Schnittoperation z.B. die in der Volumenlehre übliche Zerlegung eines konvexen Polyeders in konvexe Pyramiden von einem inneren Punkt des Polyeders aus als Schnittkörperbildung beschreibbar (Fig. 1.2.13, das Ausführen der einzelnen Schnitte ist vorstellbar mit einem Messer, das die Form eines variablen Winkelfeldes hat).

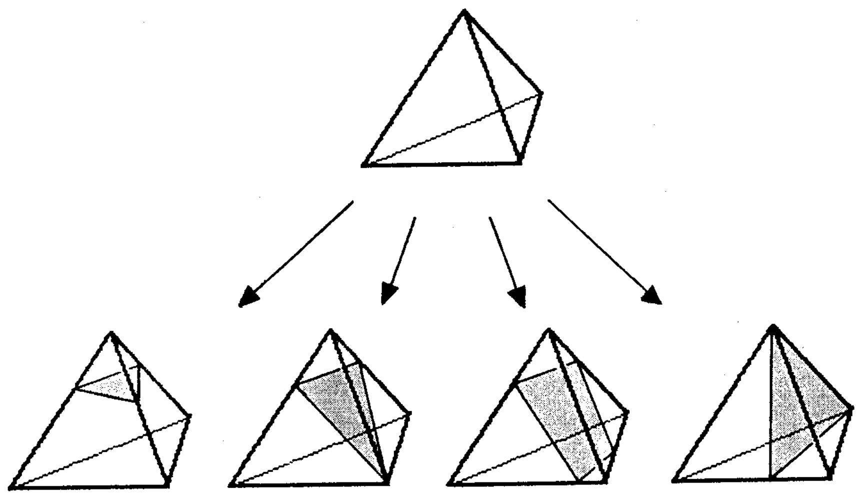


Fig. 1.2.7

$$\text{KÖRPER} \xrightarrow[\text{Operation(en)}]{\text{Schnitt-}} \;?$$

$$\text{KÖRPER} \xrightarrow{\;?\;} \text{SCHNITTKÖRPER}$$

$$? \xrightarrow[\text{Operation(en)}]{\text{Schnitt-}} \text{SCHNITTKÖRPER}$$

Schemata 1.2.4 a - c

$$\text{POLYEDER} \xrightarrow[\text{Schnitte}]{\text{zerlegende}} \text{TEILPOLYEDER} \xrightarrow[\text{Zusammensetzen}]{\text{Umgruppieren}} \text{POLYEDER'}$$

Schema 1.2.5

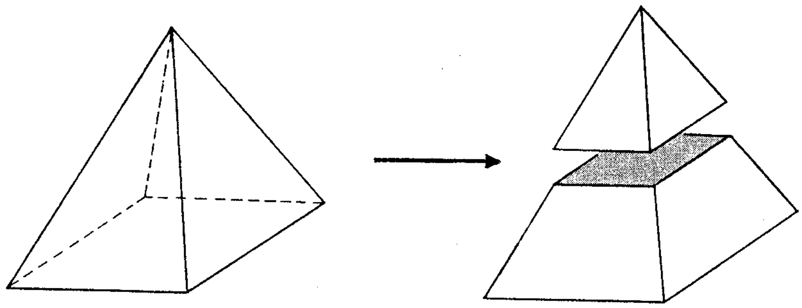


Fig. 1.2.8

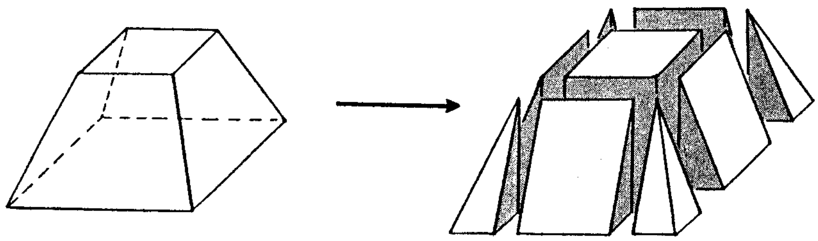


Fig. 1.2.9

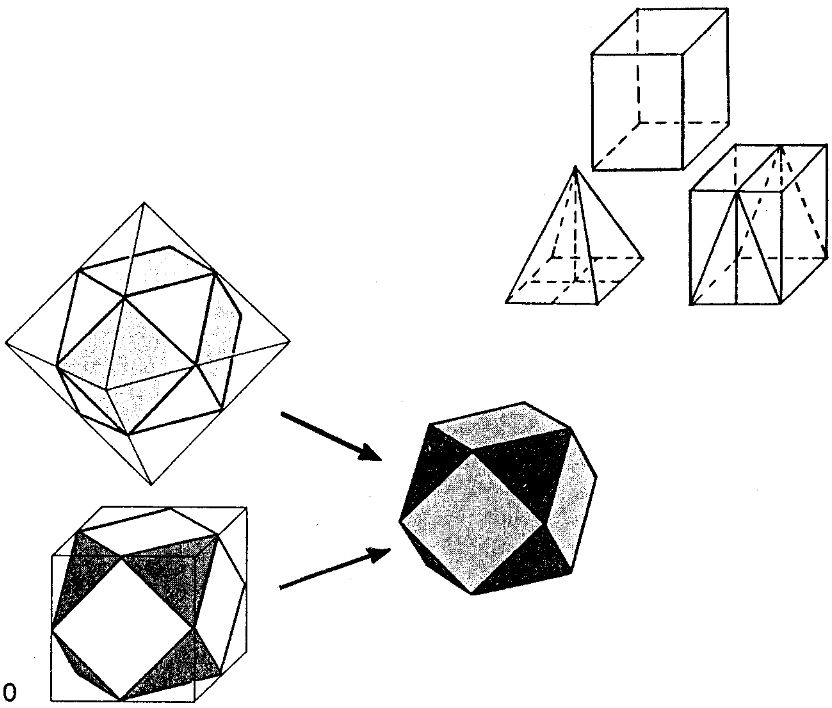


Fig. 1.2.10

Exkurs: Die Volumenbestimmung von Polyedern kann durch zerlegende Schnitte auf die Bestimmung des Rauminhalts dreiseitiger Pyramiden zurückgeführt werden (vgl. Schemata 1.2.6 a - c). Eine weitere Analogisierung der Flächeninhaltslehre von Polygonen, die ohne infinitesimale Prozesse auskommt, ist aber nicht möglich: Es gibt dreiseitige Pyramiden, die nicht zerlegungsgleich entsprechenden dreiseitigen Prismen bzw. Würfeln sind, d.h. das Schema 1.2.6 d ist generell nicht ausführbar. Folglich sind i.a. zwei dreiseitige Pyramiden gleicher Grundflächen und Höhe nicht zerlegungsgleich. - Einen aktualisierten geschichtlichen Abriß dieser Problematik, die der große Mathematiker David Hilbert im Jahre 1900 auf dem Internationalen Mathematikerkongreß zu Paris als drittes seiner berühmten dreiundzwanzig Probleme formulierte, gibt u.a. H. Schumann 1982.

$$\text{POLYEDER} \xrightarrow[\text{Schnitte}]{\text{zerlegende}} \text{KONVEXE POLYEDER}$$

$$\text{KONVEXES POLYEDER} \xrightarrow[\text{Schnitte}]{\text{zerlegende}} \text{KONVEXE PYRAMIDEN}$$

$$\text{KONVEXE PYRAMIDE} \xrightarrow[\text{Schnitte}]{\text{zerlegende}} \text{DREISEITIGE PYRAMIDEN}$$

$$\text{DREISEITIGE PYRAMIDE} \xrightarrow[\text{Verwandeln}]{\text{Zerlegungsgleiches}} \text{DREISEITIGES PRISMA}$$

$$?$$

Schemata 1.2.6 a - d

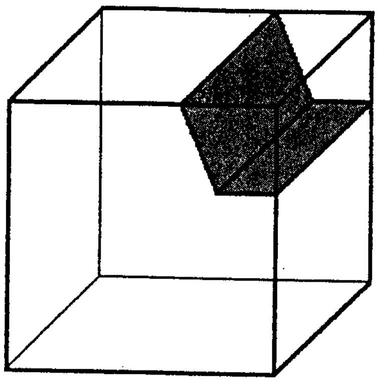


Fig. 1.2.11

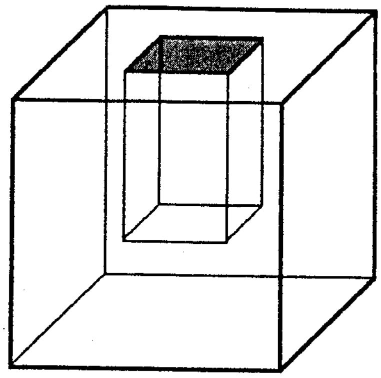


Fig. 1.2.12

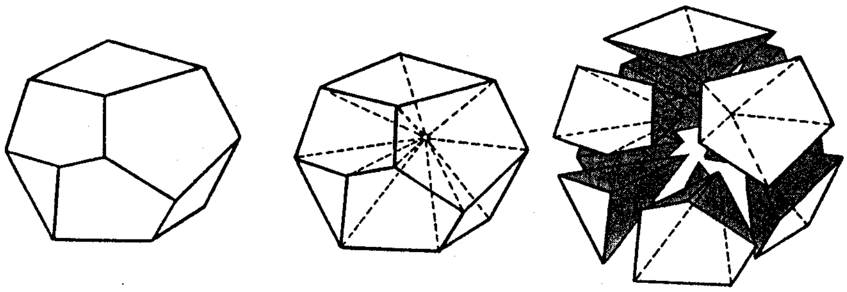


Fig. 1.2.13

1.3 Körperschnitte in einem allgemeinen pädagogischen Kontext

Friedrich Fröbel (1782-1852) hat wohl als erster Pädagoge die Körperschnitte für pädagogische Zwecke genutzt. - Seine metaphysisch begründete und in der Gedankenwelt der Romantik und des Idealismus wurzelnde elementare Erziehungslehre und Didaktik ist von großen deutschen Pädagogik des 20. Jahrhunderts ausführlich gewürdigt worden (vgl. u.a. Bollnow 1967, Klafki 1964, Nohl 1965, Spranger 1964). Um den Rahmen unserer Arbeit nicht zu sprengen, müssen wir auf die genannte Literatur und auch auf Friedrich Fröbel's gesammelte pädagogische Schriften (F.F.g.p.S.) verweisen. Wir beschränken uns hier auf eine kommentierende Wiedergabe wesentlicher Stellen in Fröbel's Lernspielprogramm für die 'Vorschule', die sich auf Körperschnitte beziehen.
Ebenso wie bei Herbart und bei Pestalozzi, als dessen Schüler Fröbel bezeichnet werden kann, kommt bei Fröbel der 'elementaren Mathematik' eine zentrale Rolle bei der Bildung des Kindes zu. Die Mathematik ist für Fröbel Ausdruck der göttlichen Ordnung in der gesamten Welt. Diese Ordnung äußert sich besonders in den geometrischen Raumformen, weshalb Fröbel im Elementarunterricht besonderen Wert auf deren Erarbeitung und Behandlung legt - im Gegensatz zu Herbart und Pestalozzi, die sich im wesentlichen in der Geometrie auf die ebenen Formen beschränken.
Über das passive Teilhaben des Kindes an Körperwandlungen hinaus fordert Fröbel das selbsttätige Erzeugen und Bearbeiten von geometrischen Formen. Das kann u.a. dem Teilbereich seiner Formenlehre, der vom Umwandeln der Formen handelt, entnommen werden. Er unterscheidet das Umformen bei Invarianz der 'Masse' und das Umformen bei Verringerung der 'Masse'. Die letztere Umformungsart beinhaltet neben dem Ausschneiden planarer Formen auch das schneidende Bearbeiten von Kugel-, Zylinder-, Kegel-, und Würfelmodellen:

"Das Umwandeln der Körper aus weichem, schneidbaren Stoffe, z.B. Thon, Lehm, Kartoffeln, Rüben, Krautstrunken, weichem Holze, und zwar zunächst des Würfels und der Kugel durch Abschneiden 1. der Ecken, 2. der Kanten. Es thut sich hier ganz besonders das Streben des Kindes kund: im äußern das Innere zu schauen, am äußeren das Innere darzustellen, wie umgekehrt, in der Mannigfaltigkeit die Einheit zu finden und aus der Einheit die Mannigfaltigkeit zu entwickeln. Wie diese Kinderbethätigung zur höheren und wahren (religiösen) Erfassung der Natur und des eigenen Lebens hinführt, liegt am Tage... .

Zum getheilten R u n d e n. Zuerst werden
a) **K u g e l n getheilt:**
1. gleichlaufend der Umfassungsfläche, also Halbkugeln und Kugeln ineinander;
2. gleichlaufend einem größten Kreise, also Scheiben gebend;
3. durch die drei größten sich rechtwinkelig durchschneidenden Kreise; also in acht gleiche vierflächige Körper.

b) **Die W a l z e wird getheilt,** ebenfalls zunächst
1. gleichlaufend der Walzenfläche, also in Cylinder verschiedener Größe;
2. gleichlaufend der Fuß- und Deckfläche; also in gleichgroße Scheiben;
3. durch die zwei größten sich rechtwinklig durchschneidenden Theilungsebenen, also in vier Säulige, 2 und 1 flächige Körper;
4. in Kreise oder Ringe aus Nr. 1.

c) **Der K e g e l wird getheilt,** wiederum
1. gleichlaufend der gebogenen Fläche;
2. gleichlaufend der Fußfläche in Scheiben;
3. durch die zwei sich rechtwinkelig in der Achse schneidenden Theilungsebenen;
4. die Theilung nach den Kegelschnitten."

(Zitiert nach F.F.g.p.S., 2.Abtlg., S. 280/281)

Fröbels Formenlehre, die auch die Spracherziehung mit einbezieht, offenbart die inhaltliche und methodische Verarmung, die der heutige Anfangsunterricht in der räumlichen Formenkunde erfahren hat, und die sich bis in die Sekundarstufe I fortsetzt.
Unter den genannten räumlichen Formen ist für Fröbel der Würfel die grundlegende Form (vgl. u.a. F.F.g.p.S., 2.Abtlg., S. 268/269).

In der sogenannten 3. Spielgabe, einer der vielen spielerischen Lernumgebungen, wird die Teilung des Würfels in 8 kongruente Teilwürfel behandelt (zitiert nach F.F.g.p.S., 2.Abtlg., S. 140/141):

"Als Würfel steh' ich jetzt vor dir;
Als Tafel (Fläche) nun erschein' ich hier;
Doch bleib' ich stets gleich viel.
Schön dünkt mich dieses Spiel. -
Doch auch ohn' Verweilen
Kannst du leicht mich theilen,
Mit einem Schnitte
Durch die Mitte
In zwei gleiche Halbe.

Während dem die Mutter oder die Kinderpflegerin dieß dem Kinde singend zuspricht theilt sie durch e i n e Bewegung das Ganze in zwei gleiche Theile. Allein auf zweierlei Weise ist diese Theilung auszuführen: bald von oben nach unten, bald von einer Seite zur anderen. Indem die Mutter dieses darstellt, singt sie vom Geviert aus dem Kinde zu:

Theilst du mich von oben ab,
Senkrecht sich die Halben zeigen;
Theilst du mich der Quere ab,
Wagrecht sich die Halben neigen.
Zwar ist nicht die Lage gleich,
Stetes ist doch die Größe gleich: -
Halbes ist gleich Halbem."

Die drei Schnitte und ihr Ergebnis zeigt die Figur 1.3.1. Mit den Teilwürfeln werden neue räumliche Formen als symbolische Zweckformen gebaut und sogenannte planare Schönheitsformen entwickelt. Die Teilung des Würfels wird in weiteren Spielgaben analysiert für 3 mal 2 Schnitte und 3 mal 4 Schnitte, wobei auch ein vertikaler Diagonalschnitt zu Teilkörpern führt, mit denen nicht nur Körper mit rechtwinkligen Kanten zusammengebaut werden können.

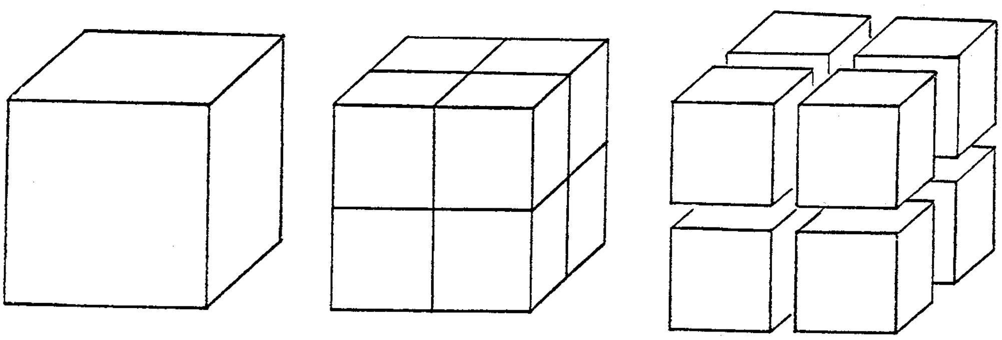
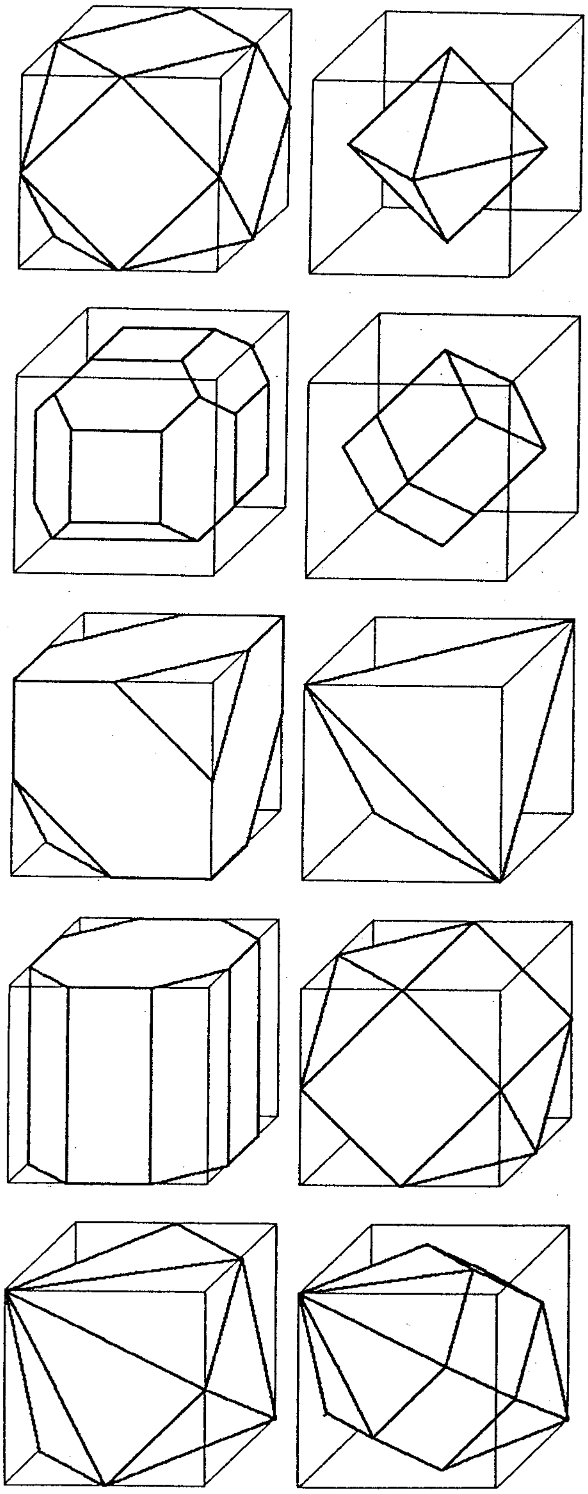


Fig. 1.3.1

In einem Brief an eine seiner Schülerinnen (Emma), in dem er eine leicht verständliche Darstellung des Bildungsprogramms für die Vorschule gibt, beschreibt Fröbel u.a. die dynamische und selbsttätige materiale Konstruktion von Schnittkörpern aus dem Würfel (Anlaß für solche Konstruktionen ist das Gesetz der Umwandlung nach dem sich z.B. die Ecken bzw. Kanten zu Flächen verwandeln):
"Wollen Sie dies (Anm.: die Konstruktion des Kuboktaeders aus dem Würfel) nun ... in dem Kindergarten von den Kindern ... an Töpferthon oder sonst leicht schneidbarem Stoff (Rüben) ausführen lassen, so geben Sie den Kindern vollkommene Würfel dieser Stoffe und fordern die Kinder nun auf durch weniges oder geringes oder gleichmäßiges Abschneiden an allen acht Ecken jede Ecke ... in eine ... Fläche zu verwandeln, gleichsam nach dem Wunsche des Würfels, bis dahin, wo die

Flächen in der Mitte der Kanten sich berühren, und so entsteht durch die Thätigkeit der Kinder der ... Sechs(acht)flächner." (Zit. nach F.F.g.p.S., Allg. 2, S. 511/512). Entsprechend entsteht durch weitere Verlagerung des 'gleichmäßigen' Eckenabschneidens des Oktaeder (der 'reine' Achtflächner).
Das gleichmäßige Kantenabschneiden führt zum 6-12Flächner und zum 'reinen' Zwölfflächner (Rhombendodekaeder).
Fröbel entwickelte so aus dem Würfel durch mehr oder weniger systematische Kombination von Eckschnitten und/oder Kantenschnitten sechs weitere Körper, die zusammen mit der Kugel, dem Zylinder, dem Würfel und dem dreifach 'durchbrochenen' Würfel als sogenannte Festgestalten eine Sammlung von Spielmaterialien bilden. Wir geben im folgenden die zehn Würfelabkömmlinge jeweils mit dem Ausgangswürfel in der Anordnung wieder, wie sie in dem o.g. Brief verbal beschrieben sind (vgl. F.F.g.p.S. S. 552). In der Figur 1.3.2 befinden sich die von Fröbel gewählten Bezeichnungen und zusätzlich in Klammern geometrische Bezeichnungen.
Die beim Schneiden am Würfel entstehenden Teile (Ergänzungsformen) fallen bei Fröbel nicht unbeachtet weg, sondern, sie werden dem betreffenden Körper beigefügt. Fröbel schreibt dazu: "Die Ergänzungsformen zu den Körperformen können zu ganz neuen schönen Zusammenstellungen benutzt werden und bieten jede unter sich wieder sehr viel Belehrendes dar, wie angenehm spielende Unterhaltung" (Zit. nach F.F.g.p.S., 2.Abtlg., S. 521).
Das Ziel Fröbels, der eine mineralogische Ausbildung besaß, aus dem Würfel durch eine entsprechende Schnitt-Systematik kristalline Grundformen, die in romantischer Verklärung als Ausdruck der 'göttlichen' Ordnung in der Natur von ihm zum Bildungsgegenstand erhoben werden, gelingt nur teilweise, da einerseits eine konsequente Anwendung der Systematik auch Schnittformen ohne kristalline Interpretation erzeugen würde, andererseits die Schnitt-Systematik 'verbogen' werden muß, um entsprechende kristalline Formen zu erhalten. Außerdem sind durch die in Figur 1.3.2 dargestellten polyedrischen Festgestalten nicht alle Kristallsysteme repräsentiert (vgl. E. Wagemann 1960).
In jüngster Zeit hat die Pädagogin L. Heller im Rahmen des Forschungsprojekt "Praktisches Lernen mit geometrischen Körpern nach Fröbel" (L. Heller 1993) die Entwicklung polyedrischer Schnittformen aus dem Würfel und ihre Behandlung wieder aufgegriffen und erweitert. Sie fügt den polyedrischen Grundgestalten (vgl. Fig. 1.3.2) u.a. ein Rhomboeder (Spat) und das reguläre Pentagon-Dodekaeder hinzu. Sie nennt solche Würfelderivate "Kuboeder". "Kuboeder sind geschnittene Würfel", dabei müssen die Schnitte derart erfolgen, daß der Würfel nicht "zerstört" wird (hier sei angemerkt, daß sich quasi jedes mehr oder weniger regelmäßige konvexe Polyeder durch geeignete Schnitte aus dem Würfel gewinnen läßt). So sind z.B. Schnitte durch die Würfelmitte nicht zulässig. Es muß ein "Kern" (polyedrische Festgestalt) erhalten bleiben; die weggeschnittenen Teile bilden die "Schale". Kern und Schale bilden ein "Ganzes" , das medial in Holz-Vollkörpermodellen für Unterrichtszwecke zur Verfügung steht (vgl. beispielsweise Fig. 1.3.3; der Leser finde selbst den jeweiligen Kern heraus). Die Modelle liefern das Material für zahlreiche Schüleraktivitäten, die weit über das übliche geometrische Lernen



6-8Flächner
(Kuboktaeder)
8 Schnitte

8Flächner
(Oktaeder)
8 Schnitte

6-12Flächner
(abgekanteter
Würfel)
12 Schnitte

12Flächner
(Rhomben-
Dodekaeder)
12 Schnitte

4-6Flächner
4 Schnitte

4Flächner
(Tetraeder)
4 Schnitte

2mal 4- und
1mal 2Flächner
(8seitiges
Prisma)
4 Schnitte

2mal 4- und 2mal
2Flächner
(Quader mit zwei
aufgesetzten
4seitigen
Pyramiden)
6 Schnitte

Doppelspitzer
12Flächner
(6seitige Dop-
pelpyramide)
6 Schnitte

Doppelspitze
6seitige Säule
(6seitiges Prisma
mit zwei
aufgesetzten
6seitigen
Pyramiden)
12 Schnitte

Fig. 1.3.2

KUBOEDER

	Mathematik	Ästhetik	Sprache	Somatologie (Körperlehre)
Was ist das ?	Eine Reihe	kristallin	geschnittener	Würfel
Was stellen sie dar ?	Eine durchgehend math. Struktur	Eine maßvolle Gliederung von hoher ästhetischer Potenz	generative Muster	harmonische Körper-Formen
Worin liegt ihre Bildungskraft ?	In der Klarheit des Maßes	In der Erscheinung von Innen-Außen-Verhältnissen	In der Textur des Schnitts	In der geistigen Dimension des bloß Körperlichen
Was ist das didaktisch Besondere ?	Die physiogen bedingte geometrische Instrumentiertheit von Handlungen	Die Triade Ganzes = Würfel Schale = geom. Abschnitte Kern = Polyeder	Die im Schnitt artikulierte geometrische Ordnung	Die elementare Physis
Was kann der Umgang mit den Würfeln bewirken ?	Ein formal strukturiertes, sinnlich motiviertes körperliches Geschick, das math. Verstehens- und elementare Erkenntnisprozesse in Gang setzt.	Sensibilisierung für das wesentlich Körperliche natürlicher Erscheinungsweisen	Rhythmisierende Erfahrungen von Formen grammatisierter Ordnungen	Selbst-Verständnis und Selbst-Erkenntnis als Objektivierungsprozeß von Körperlichkeit
Was kann der Schüler lernen ?	Umwandlung math. Formeln in Aktionssprache (Programmieren)	Kultivierung der sinnlichen Wahrnehmung	Artikulation von Gesetz und Ordnung als regelgeleitete Folgen von Handlungen	Harmonikale Zusammenhänge aufbauen

Synopse (Heller 1993)

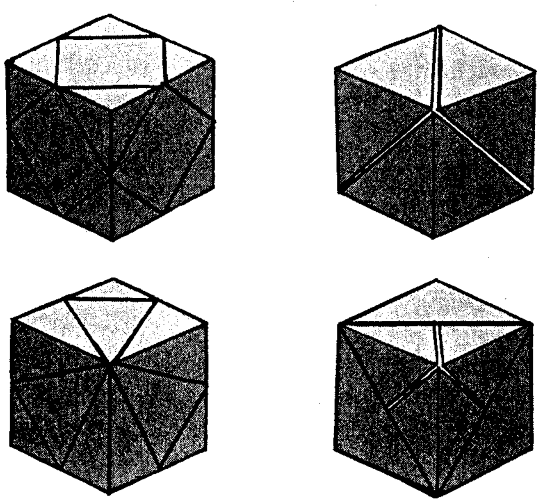


Fig. 1.3.3

hinausgehen sollen. Der ganzheitliche Ansatz sei durch die angegebene Synopse dokumentiert (Heller 1993). Hellers Zielsetzungen sind mehrdimensional, sie sind dem Bereich der Mathematik, der Ästhetik, der Spracherziehung und der (nicht nur geometrischen) Formenlehre zuzuordnen. (Es sei hier angemerkt, daß die Kuboeder sicherlich nicht eine "durchgehend mathematische Struktur" aufweisen, und daß das "Programmieren" wohl in einer anderen Bedeutung als in der Mathematik üblichen verwendet wird.)
Eine unterrichtspraktische Umsetzung des Hellerschen Ansatzes wurde in einer Gruppe Geistigbehinderter, in einer 1. Grundschulklasse und in einer 9. Hauptschulklasse vorgenommen. M.E. sind für eine Realisierung dieses ganzheitlichen Ansatzes im Alltagsunterricht die curricularen Rahmenbedingungen der heutigen allgemeinbildenden Schule nicht günstig, - Hellers Konzeption bedürfte einer 'neuen' Schule.

1.4 Körperschnitte als künstlerisches Ausdrucksmittel

Der schweizerische Bildhauer, Maler, Designer, Architekt und Theoretiker der Formgestalter Max Bill (1908 - 1994) hat Ansätze einer Theorie der ästhetischen Form entwickelt ("Form" 1952). - Max Bill, der zu den Vertretern des systematischen Konstruktivismus gezählt werden kann, verwendet Schnitte von Kreisring (Torus), Kugel und Würfel, um das Motiv des Halben ästhetisch zu gestalten. - Unter den unendlich vielen verschiedenen Möglichkeiten, einen Würfel mittels ebener Schnitte jeweils in zwei gleiche Teile zu zerlegen, wählt er, z.B. für die Gestaltung von Plastiken, jene aus, die sich durch eine besondere Qualität auszeichnen (Fig. 1.4.1): den Schnitt parallel zu einer Seitenfläche (Schnittfläche: Quadrat), den Schnitt längs der Diagonalen einer Seitenfläche (Schnittfläche: Rechteck mit den Seitenverhältnissen $1:\sqrt{2}$), den Schnitt durch zwei diametral liegende Würfelecken und eine Kantenmitte (Schnittfläche: Rhombus mit Seitenlänge $\sqrt{5}/2$ und Höhe $\sqrt{30}/5$) und den Schnitt durch Mitten eines Kantenzugs aus nichtparallelen Kanten (Schnittfläche: regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge $\sqrt{2}/2$). Eine mathematische Analyse der Würfelschnitte von Max Bill hat H. Zeitler 1990 durchgeführt. Die Realisierung des Sechseckschnitts als Plastik (zwei halbe Kuben, 1966, 28 x 28 x 28 cm) zeigt die Figur 1.4.2 - "Form ist das, was wir im Raum begegnen. Form ist alles, was wir sehen können. Doch wenn wir das Wort Form hören oder den Begriff denken, dann bedeutet er doch mehr, als nur ein Etwas, das zufällig besteht. Wir verbinden mit dem Begriff Form von vornherein eine Qualität. ... Wir wissen, daß nicht alles, was als Form erscheint, ohne weiteres schön ist. Es handelt sich immer um eine relative Schönheit" (Max Bill in "Form" 1952, S.6).
In der modernen Baukunst gibt es eine vielseitige Verwendung von Schnitten an Baukörpern. Wir illustrieren dies an einem Beispiel, bei dem die Form einer quadratischen Pyramide durch das Abschneiden der vier Basisecken zu einer Hausform wird (Fig. 1.4.3, in drei Frontalansichten).

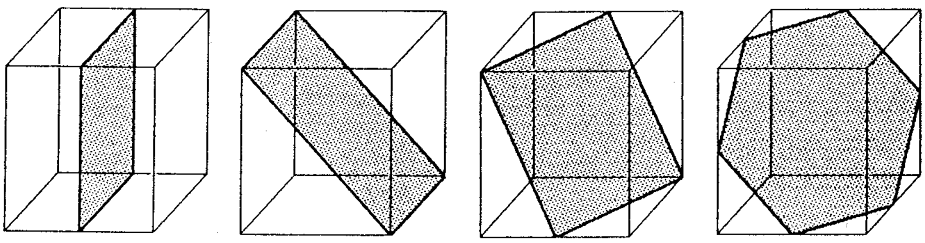


Fig. 1.4.1

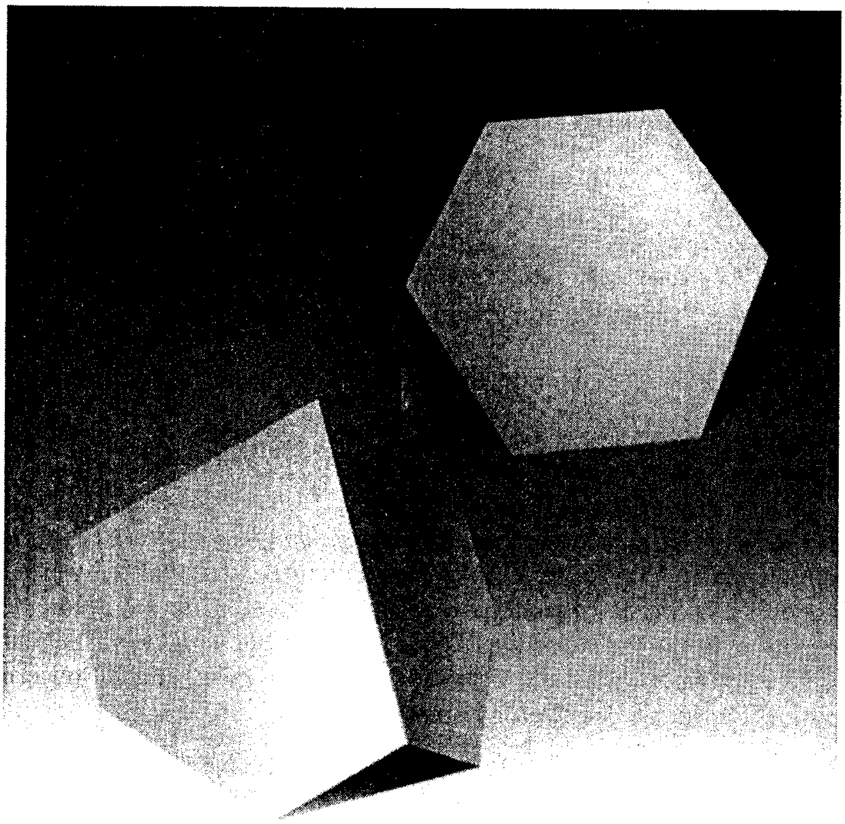


Fig. 1.4.2

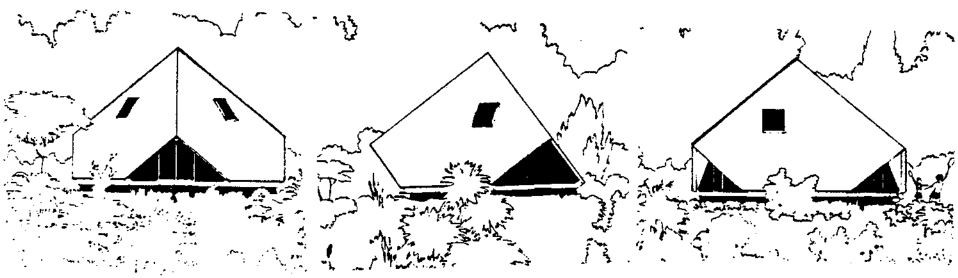


Fig. 1.4.3

1.5 Körperschnitte bei der Produktion von Zweck- und Nutzformen

In vielen Bereichen des Handwerks und in der industriellen Fertigung wird im Produktionsprozeß der Schnitt von Körpern verwendet, um Rohmaterialien oder Halbfertigprodukte für einen bestimmten Zweck 'passend' zu machen. Wir verdeutlichen das an einem Beispiel aus der Holzverarbeitung:
Ein Baumstamm wird mittels vertikal sich auf und ab bewegender Sägeblätter (Gattersäge Teilansicht und Schema in Fig. 1.5.1 a/b) in unbearbeitete Bretter und Schwarten zersägt (Fig. 1.5.2). Die Bretter werden durch "paralleles Besäumen" (Fig. 1.5.3) in eine Quaderform als Ausgangsmaterial für vielseitige Weiterverarbeitungen gebracht. Bei der traditionellen Möbelherstellung erfordert die Eckverbindung von (gehobelten) Brettern weitere Körperschnitte (Figur 1.5.4, Herstellung einer "einfachen Zinkung").

Zusatz: Zur Veranschaulichung und Instruktion werden im Möbelbau besondere Körperschnitte verwendet (Figur 1.5.5) - In diesem Zusammenhang sei auch auf die Veranschaulichung von räumlichen Objekten (z.B. Werkstücken, Maschinen, Bauwerken) durch Schnittdarstellungen wie Querschnitt und Längsschnitt hingewiesen.

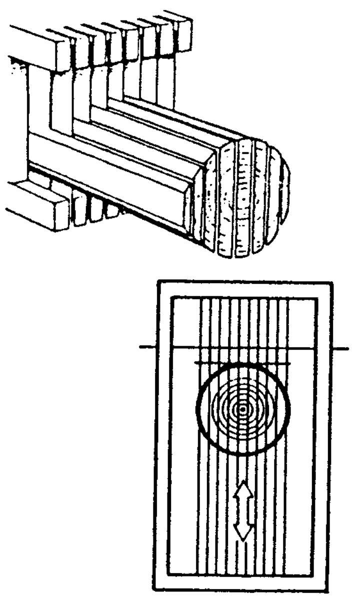


Fig. 1.5.1 a / b

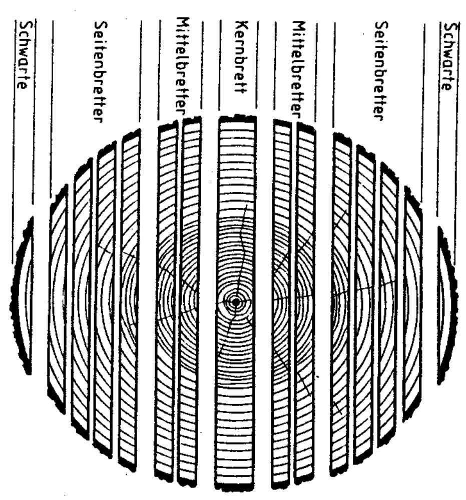


Fig. 1.5.2

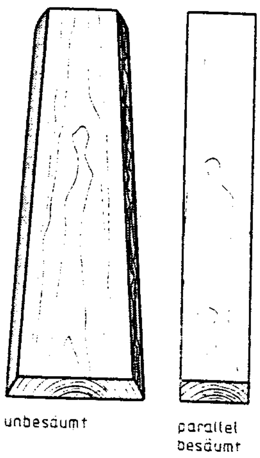


Fig. 1.5.3

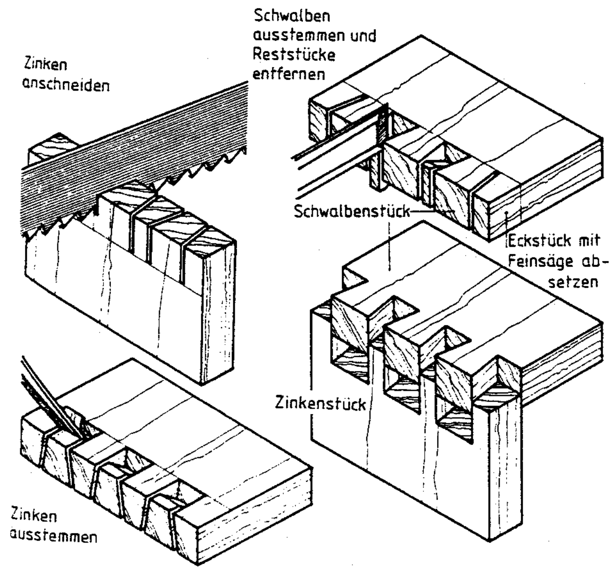


Fig. 1.5.4

Durch die drei Ansichten können beim Möbelbau häufig nicht alle wichtigen Einzelheiten dargestellt werden. Es müssen zusätzlich <u>Schnittzeichnungen</u> angefertigt werden, d.h. man denkt sich an den entsprechenden Teilen das Möbelstück aufgeschnitten.

Im Möbelbau werden folgende Schnitte bevorzugt:

<u>Höhenschnitt</u>
Senkrechter Schnitt, der rechtwinklig zur Vorderkante des Möbels verläuft.

<u>Querschnitt</u>
Waagrechter Schnitt, meist von oben gesehen.

<u>Frontalschnitt</u>
Senkrechter Schnitt, der parallel zur Vorderansicht des Möbels verläuft

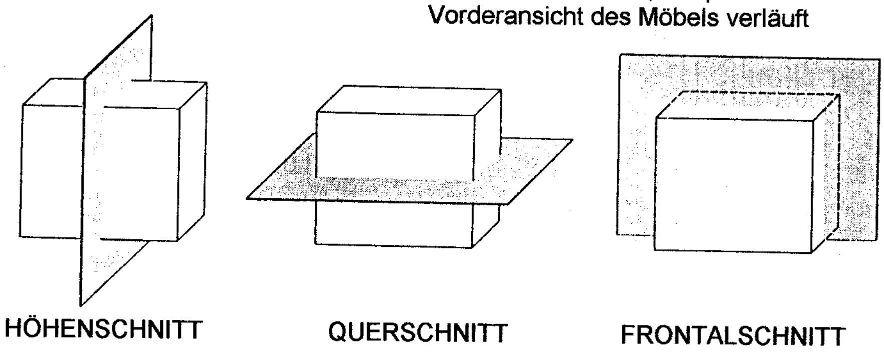


Fig. 1.5.5

1.6 Körperschnitte und geometrische Problemlösungsaufgaben

Wir geben im folgenden eine elementare Berechnungs- und eine elementare Konstruktionsaufgabe über Körperschnitte wieder, wie sie dem deutschen Geometrieunterricht in der Sekundarstufe I weniger bekannt sind - im Gegensatz zum russischen (früher sowjetischen) Curriculum, das eine reichhaltige 'Kultur' an solchen Schnittaufgaben besitzt, die vor allem dem Training und der Entwicklung der Raumvorstellung dienen sollen (vgl. u.a. Gusev 1988 und Litwinenko 1991).

1.6.1 Berechnungsaufgabe über Körperschnitte (Elementares Beispiel)

Gegeben ist ein Würfel mit der Standfläche ABCD und der Deckfläche A'B'C'D'. Eine Ebene durch die Ecke B und die Mitten der Kanten A'D' und C'D' schneidet den Würfel. Wie groß ist die Schnittfläche ? Wie lang ist das Lot von B' auf die Schnittfläche ? Wie groß ist das Volumen und die Oberfläche der Pyramide mit der Spitze B' und der Schnittfläche als Grundfläche ? Welchen Winkel bildet die Schnittfläche mit der Standfläche des Würfels ? (Planfigur: Figur 1.6.1)

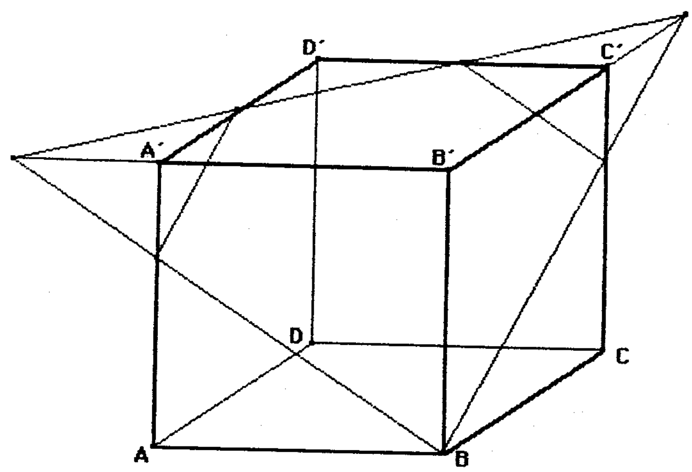


Fig. 1.6.1

1.6.2 Konstruktionsaufgabe über Körperschnitte (Elementares Beispiel)

Die zeichnerisch- konstruktive Behandlung von Körperschnitten ist in der Sekundarstufe I reduziert auf spezielle Schnitte an speziellen Körpern in spezieller Darstellung. - Wir skizzieren im folgenden, wie auf dieser Schulstufe Körperschnitte mit Hilfe von 2-D-Grafiksystemen (hier mit Cabri-Géomètre) flexibler behandelt werden können. Als Beispiel für einen einfachen Körper wählen wir ein fünfseitiges Prisma ABCDE A'B'C'D'E' (Fig. 1.6.2 a), das mit einer Ebene durch P,Q,R, geschnitten werden soll. Die Schnittlinien PQ, QR sind schon bekannt; es sind noch die Schnittlinien mit den restlichen Seitenflächen zu konstruieren. Dazu wird die Spurgeradenmethode gewählt: wir konstruieren aus den gegebenen Daten die Gerade (Spurgerade), die die Ebene durch P,Q,R mit der Standebene des Prismas gemein hat (Fig. 1.6.2 b; Gerade durch die Schnittpunkte S1, S2). Die Schnittpunkte S und T werden durch Rückwärtsarbeiten über die Schnittpunkte S3 und S4 konstruiert (Fig. 1.6.2 c). PQRST bildet das Schnittpolygon. - Der Vorteil der computerunterstützten Konstruktion gegenüber der Papier-Bleistift-Konstruktion liegt, außer in der vorteilhaften Positionierung von Objekten und in der relativen Unabhängigkeit vom begrenzten Zeichnungsfeld, in den interaktiven, filmisch ablaufenden Variationsmöglichkeiten der nur einmal zu konstruierenden Konfiguration: Die Lage der Schnittebene wird variiert (Fig. 1.6.3; Punkt P wird gezogen); die Form der Grundfläche wird variiert (Fig. 1.6.4; Punkt B wird gezogen); das Prisma wird zum schiefen Prisma variiert (Fig. 1.6.5; Punkt C' wird als freier Punkt gezogen). Die operative Fragestellung: Was geschieht, wenn ... ? kann weithin ohne mediale Behinderung verfolgt werden. - Um den Schnitt in wahrer Gestalt zu ermitteln, gehen wir vom Grundriß und Aufriß eines fünfseitigen Prismas aus und drehen den Schnitt um die Spurgerade s in die Grundrißebene und erhalten nach Umklappung das Schnittpolygon PQRST in wahrer Form (Fig. 1.6.6 mit den Bezeichnungen aus den Figuren 1.6.2 - 1.6.5). Diese Zirkel- und Linealkonstruktion ist mit den zur Zeit für DOS oder Windows existierenden 2-D-Grafiksystemen für das schulgeometrische Konstruieren nicht übersichtlich und an Handlungsvorstellungen orientiert zu realisieren, denn mit diesen Systemen können Kreisbögen als Objekte nicht erzeugt werden. In Figur 1.6.7 ist eine Konstruktion durchgeführt, in der die Drehung um s' durch zwei entsprechende Spiegelungen ersetzt wird. Man gewinnt mit einer solchen computerunterstützten Konstruktion wiederum die Variationsmöglichkeiten der 5-seitigen Prismenform und der Schnittlage zum Zwecke operativer Untersuchungen. Jetzt müßten noch beide Darstellungsformen, der Schnitt im Schrägbild und der Schnitt in wahrer Gestalt, konstruktiv in Zusammenhang gebracht werden. So könnte man z.B. von Grund- und Aufriß des Prismas ausgehend eines seiner Schrägbilder mit Schnitt konstruieren usw. .

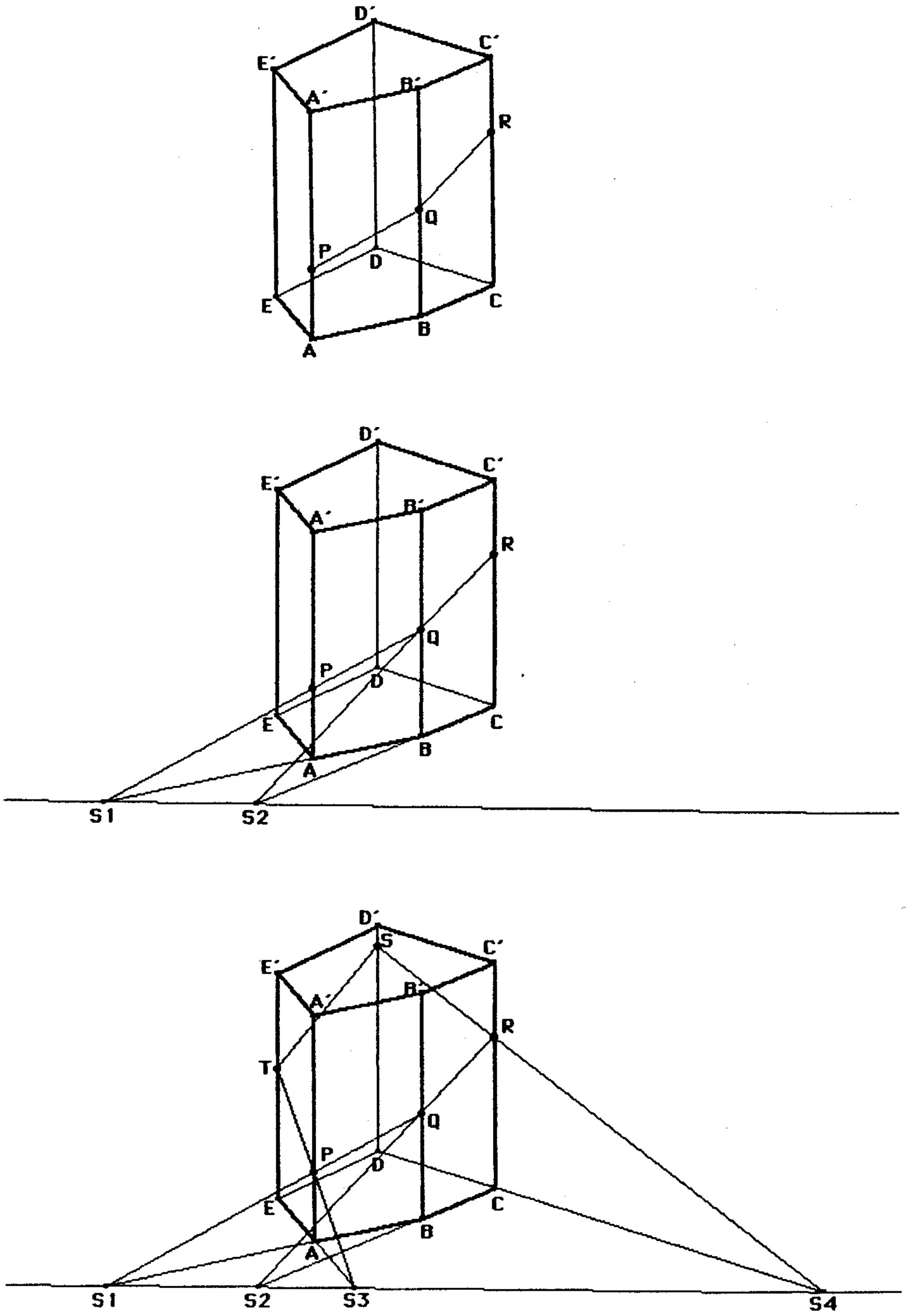

D´
C´
E´
A´
B´
R
Q
P
D
E
C
B
A
D´
C´
E´
A´
B´
R
Q
P
D
E
C
B
A
S1
S2
D´
S
C´
E´
A´
B´
R
T
Q
P
D
E
C
B
A
S1
S2
S3
S4

Fig. 1.6.2 a - c

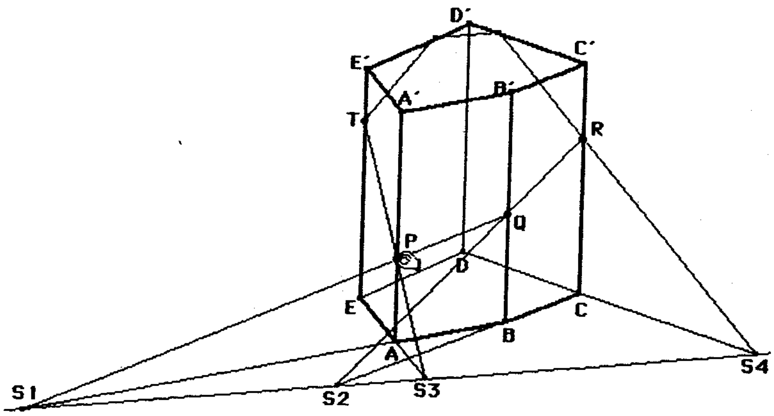


Fig. 1.6.3

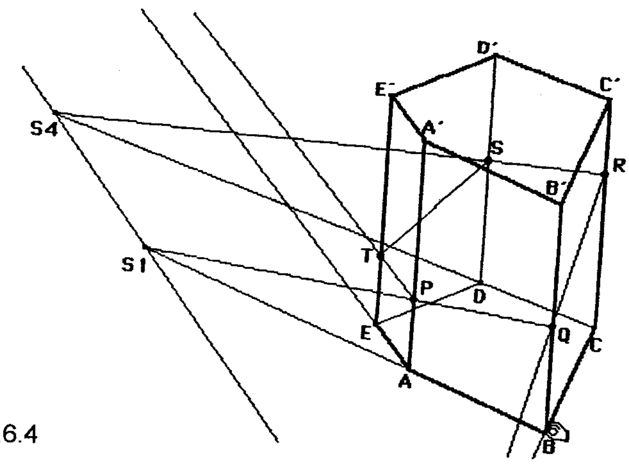


Fig. 1.6.4

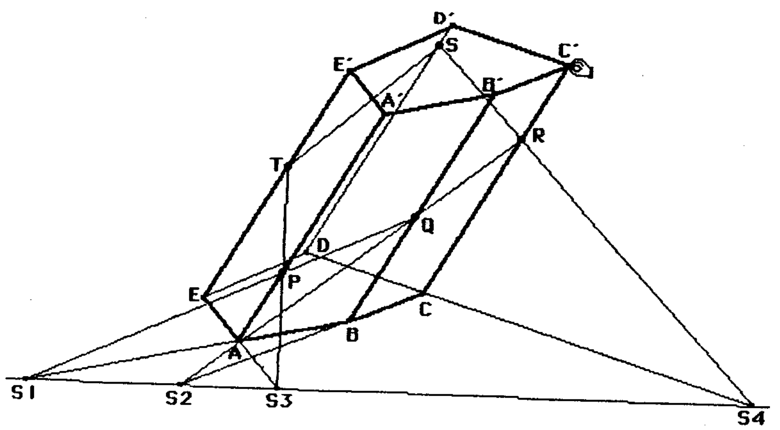


Fig. 1.6.5

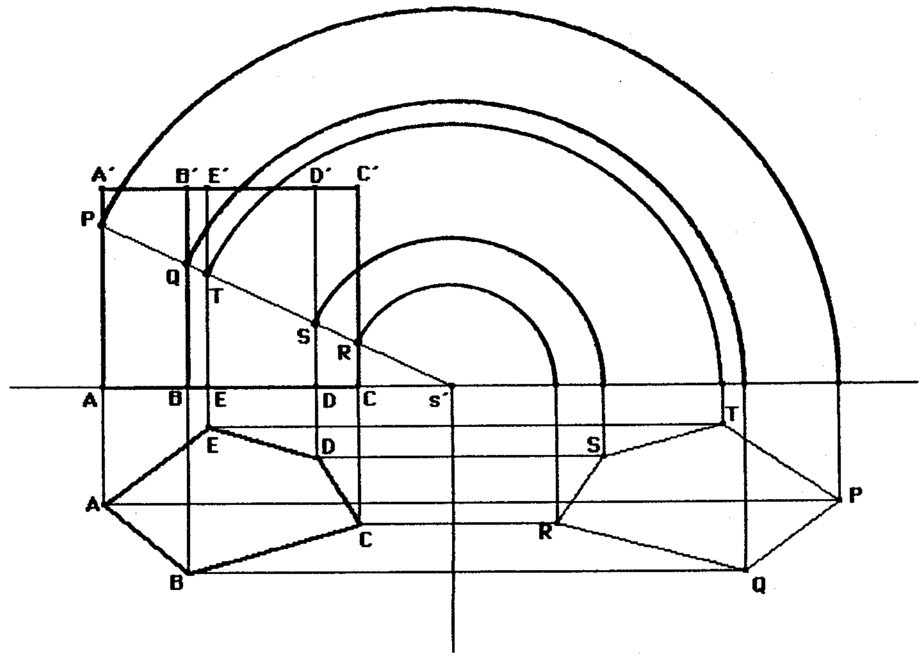


Fig. 1.6.6

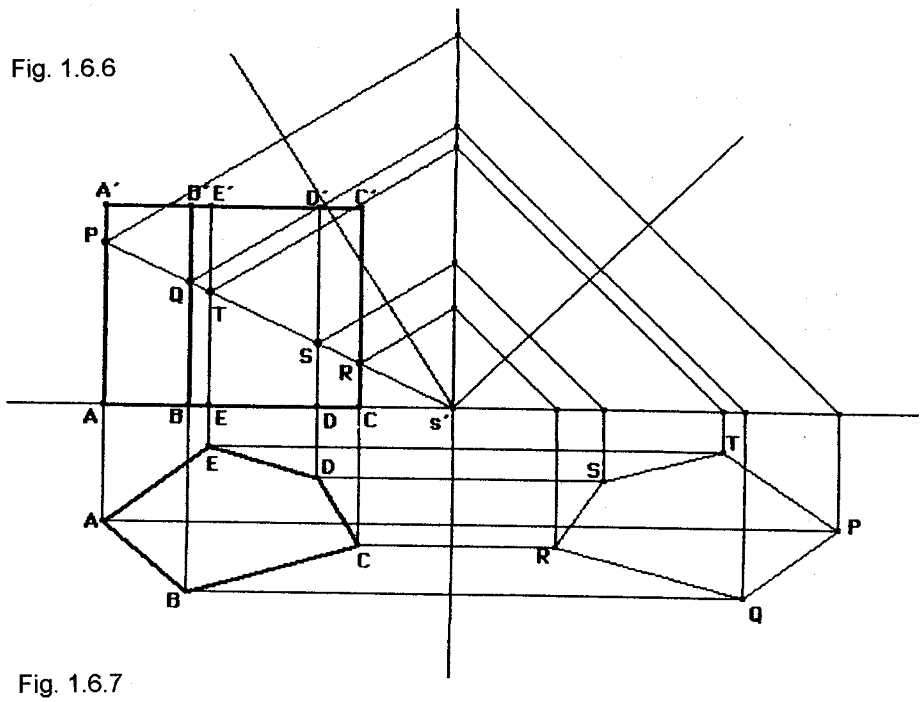


Fig. 1.6.7

1.7 Körperschnitte und dreidimensionale Computergrafik

Mit dem Mitteln der dreidimensionalen analytischen Geometrie und der Grafikprogrammierung, insbesondere der objektorientierten, können dreidimensionale geometrische Sachverhalte, wie beispielsweise die Bildung von Schnittkörpern, als dreidimensionale Computergrafik effizient dargestellt und der interaktiven Manipulation des Benutzers zugänglich gemacht werden. Zweidimensionale Grafiksysteme, wie das im Abschnitt 1.6.2 verwendete Cabri-Géomètre, reichen für das Darstellen und Erzeugen räumlicher Konfigurationen nicht aus, weil mit ihnen räumliche Objekte nicht definiert und deshalb nicht adäquat dargestellt und manipuliert werden können. Die im Abschnitt 1.6.2 skizzierten, zeitaufwendigen zeichnerisch-konstruktiven Behandlungsmöglichkeiten von Körperschnitten kann man folgendermaßen bewerten: Sie zeigen den Mangel an einem adäquaten Medium, einen räumlichen Sachverhalt in der 'Ebene' zugänglich zu machen. Abgesehen von den Variationsmöglichkeiten eröffnen schulgeometrische 2-D-Grafiksysteme keine wesentlich neue konstruktive Sichtweise.Die planare Durchführung der betreffenden Konstruktionen setzt bereits in erheblichem Maße Raumvorstellungsfähigkeit und eine zeichnerisch-konstruktive Vorbildung voraus.
Dem Thema "Körperschnitte" kann unter den Aspekten des Raumvorstellungstrainings, der Bereicherung der geometrischen Formenvielfalt, des experimentellen und explorativen Arbeitens sowie der Entwicklung divergenten Denkens erst ein unterrichtspraktischer Stellenwert zukommen, wenn ein grafisches Medium existiert, das die Schnittstelle zwischen dem raumgeometrischen Sachverhalt 'Körperschnitt' einerseits und dem Lerner andererseits erwartungskonform, aufgabenangemessen, einfach und zeiteffizient gestaltet.
(In diesem Zusammenhang sind wir der Überzeugung, daß das materiale Konstruieren von Körperschnitten, z.B. an Kartoffel- oder Styropormodellen, schon aus Gründen der Rahmenbedingungen schulischen Unterrichts nicht als eine generelle unterrichtspraktische Lösung des Medienproblems in Frage kommen kann.)

Wir skizzieren nun einen Minimalkatalog an allgemeinen Forderungen für ein menügesteuertes 3-D-Werkzeug zur Erzeugung und Darstellung von Körperschnitten, das im Geometrieunterricht der Sekundarstufe I eingesetzt werden kann. Der Einsatz eines solchen Werkzeugs kann einen attraktiven Beitrag zur Realisierung des nicht geometriespezifischen allgemeinbildenden Ziels "Der Schüler/ die Schülerin soll lernen, mit Computerwerkzeugen zu lernen und zu arbeiten" leisten. Eine Voraussetzung für die Verwirklichung dieser Zielsetzung ist die Verfügbarkeit über 'portable schülerpersönliche Computer' (Notebooks) im Alltagsunterricht und zu Hause.

Minimalkatalog an allgemeinen Forderungen:

- Erfüllung software-ergonomischer Standards, die die Interaktionsprobleme des Schülers/ der Schülerin mit dem Werkzeug minimalisieren und die insbesondere das explorative Verhalten und die Selbstkorrektur unterstützen.
- Interaktives Festlegen und Variieren von Schnittflächen am betreffenden Körper
- Darstellung der wahren Form der Schnittfläche
- Ausführung von Schnitten durch Bildung von Schnittkörpern und deren Separierung
- Sicherstellung haptischer Erfahrungen durch auffaltbare Ausdrucke von Abwicklungen der (Schnitt-)Körper - beschränkt auf Körper mit abwickelbarer Oberfläche (Torsen)
- Interaktive dynamische Visualisierungsmöglichkeiten von (Schnitt-)Körpern, z.B. durch verschiedene Darstellungsarten, Hidden-Line-Modi, Rotation, Zoomen ...
- Dynamische Darstellung von Schnittkörperbildungen durch Animationsgrafik (z.B. trickfilmartige Darstellung von Schnittflächenverlagerungen)
- Komfortable Verwaltung von Körperdateien.

2 Menügesteuertes Erzeugen und Darstellen von Polyederschnitten

Für MS-DOS Computer gibt es derzeit weltweit erst ein Programm zum menügesteuerten Schneiden von Polyedern, das als Unterrichtssoftware für die Sekundarstufen entwickelt worden ist und das bereits wesentliche Forderungen des Minimalkatalogs erfüllt. Es ist das in einer Spracherweiterung von Lisp geschriebene Programm SCHNITTE, das in Zusammenarbeit von M. Doorman / Freudenthal-Institut, Utrecht und H. Schumann / PH Weingarten aus dem Programm 'Doorzien' entwickelt worden ist. Im folgenden geben wir eine kurze Einführung in das Programm, weisen auf seine Grenzen in der gegenwärtigen Fassung hin, bewerten seine didaktische Relevanz, entwickeln Unterrichtskonzepte, berichten über einen Unterrichtsversuch sowie ein Interview und schlagen werkzeuggeeignete Projekte vor.

2.1 Eine Einführung in das Programm SCHNITTE

2.1.1 Überblick über die Menüs

Zuerst geben wir einen groben Überblick über die Menüs und deren einzelne Optionen. Die Figur 2.1.1 zeigt das Arbeitsfenster von SCHNITTE mit der Menüleiste aus den Menüs 'Körper', 'Schnitt', 'Ansicht', 'Extras' und 'Info'. In Figur 2.1.2 sind die Optionen der einzelnen Menüs zu sehen.
Das Menü 'Körper' verwaltet im wesentlichen die Polyederdateien: Polyederdatei laden, speichern (mit oder ohne Schnitt) oder Körper ausdrucken. Mit den Optionen des Menüs 'Schnitt' wird ein vorhandener Schnitt gelöscht oder ein neuer Schnitt durch Wahl dreier Punkte auf dem Polyeder erzeugt, eine Schnittfläche bewegt, d.h. wahlweise um eine der drei bildschirmbezogenen Raumachsen gedreht oder parallel vorwärts oder rückwärts verschoben (dabei kann auch die Ausgangslage fixiert werden), werden zu einem vorhandenen Schnitt Schnittscharen durch Drehung oder Verschiebung desselben zur Auswahl eines neuen Schnitts erzeugt. Mit der Option 'Form' kann man sich die wahre Form der Schnittfläche zeigen lassen. Mit 'Ausführen' wird der Körper längs der Schnittfläche in seine zwei Teilkörper zerlegt.
Mit dem Optionen des Menüs 'Ansicht' kann das vorgegebene oder durch Schnittbildung erzeugte Polyeder unter Ausblendung der verdeckten Kanten, die strichliert zu sehen sind, parallel- oder zentralprojektiv sowie stereografisch dargestellt werden. (Für das Betrachten eines stereografischen Körperbildes benötigt man eine Rot-Grün-Brille oder zwei entsprechend gefärbte Folien.) Die Parallelprojektion ist voreingestellt. Mit den Optionen 'Größe' und 'Drehen' läßt sich das Polyedermodell verkleinernd oder vergrößernd skalieren bzw. drehen. Mit der Option 'Körpernetz' wird das vorgegebene oder durch Schnitt erzeugte Polyeder nach Wahl einer seiner Seitenflächen um diese in die Ebenen ausgefaltet.

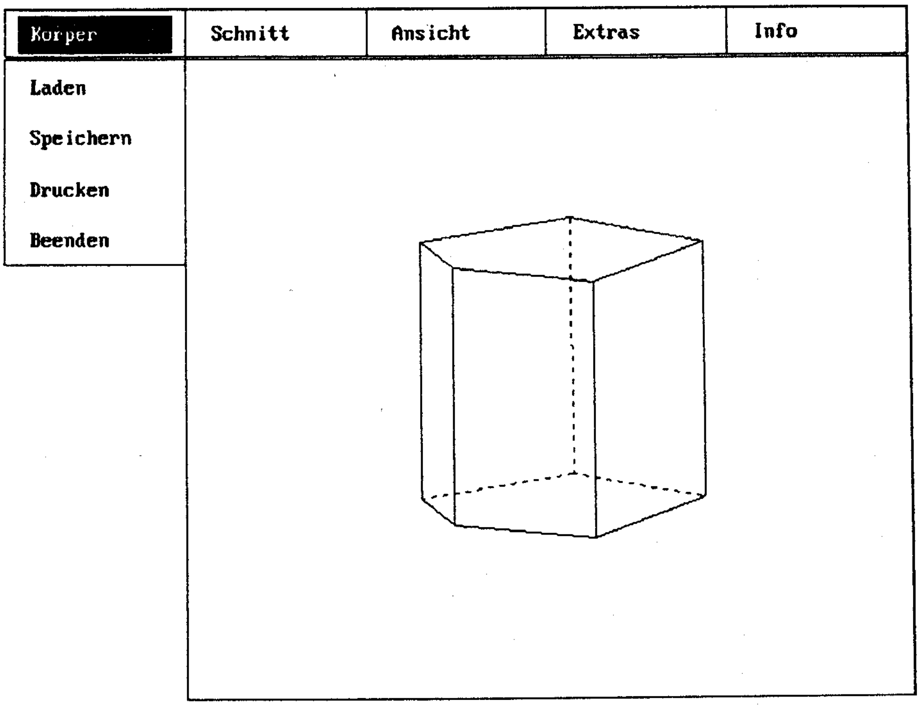


Fig. 2.1.1

Körper	Schnitt	Ansicht	Extras	Info
Laden	Löschen	Größe	Undo	Info
Speichern	Erzeugen	Drehen	Schraffur o	Kopieren
Drucken	Bewegen	Parallel ø	Kanten ø	
Beenden	Schar	Zentral o	Senkrecht o	
	Form	Stereo o	Massiv o	
	Ausführen	Körpernetz	Namen o	

Fig. 2.1.2

Mit den Optionen des Menüs 'Extras' kann man die bisherigen Arbeitsschritte widerrufen, die Schraffur der Schnittfläche ein- und ausschalten (im Menü ist Schraffur eingeschaltet), das Polyeder definieren als Kanten- oder Flächenmodell zur Wahl der eine Schnittebene festlegenden Punkte, die Lage einer automatisch erzeugten Schnittebene gegenüber der Bildschirmhorizontalen in der Option 'Schnitt-Bewegen' festlegen (im Menü ist die senkrechte Lage gewählt). Es kann mittels 'Massiv' der Körper auch als pseudo-massiv dargestellt werden - im Menü ist nicht massiv eingeschaltet.
Die Optionen des Menüs 'Info' dienen der allgemeinen Information über das Programm.

Menübearbeitung: Die Datei MENU.TXT darf mittels Textverarbeitung so verändert werden, daß einzelne Menüs und/oder Optionen unterdrückt bzw. umbenannt werden können.

2.1.2 Eine erste Anwendung des Programms SCHNITTE

Wir rufen die Option 'Laden' im Menü 'Körper' auf und wählen unter den Polyederdateien die für eine Säule aus. Im Arbeitsfeld erscheint gemäß den Voreinstellungen eine 5-seitige Säule in parallelprojektiver Darstellung. Im Menü 'Schnitte' rufen wir die Option 'Erzeugen' auf und positionieren mit der Maus nacheinander drei Punkte beliebig auf Kanten wie in der Figur 2.1.3 a durch x-Markierungen angegeben. Die drei Punkte spannen eine Ebene auf, deren Schnitt mit der Säule als Pseudo-Vollkörper die schraffierte Schnittfläche ergibt (Fig. 2.1.3 b) - ohne Schraffur ist nur die Schnittlinie zu sehen, dementsprechend kann der Körper als Flächenkörper aufgefaßt werden.
Wir hätten die drei Punkte auch exakt als Teilpunkte der Säulenkanten positionieren können oder nach Umschalten zum Flächenmodell (Option 'Extras - Kanten') irgendwo auf den Seitenflächen des Würfels (wobei die Mehrdeutigkeit der Punktlage bezüglich vorderer oder hinterer Seitenflächen vom Programm interaktiv verwaltet wird). Anstatt den Schnitt gleich auszuführen, benutzen wir die Option 'Schnitt - Bewegen', um die Schnittfläche zu drehen oder parallel zu verschieben (Fig. 2.1.3 c/d) - etwa bis sie die Form eines Sechsecks hat (Fig. 2.1.3 e). Das gleiche Ergebnis können wir auch mit der Option 'Schnitt - Schar' erzielen, in dem wir aus den automatisch durch Drehen oder Verschieben erzeugten Schnittflächenscharen eine geeignete Schnittfläche auswählen (Figur 2.1.3 f/g). Das Polyeder kann nun zusammen mit der Schnittfläche abgespeichert werden.

Uns interessiert jetzt die originale Form der projizierten Schnittfläche, dazu verwenden wir die Option 'Schnitt - Form' und erhalten die Figur 2.1.4, die die polygonale Schnittfläche im parallelprojektiven Säulenbild und zugleich in ihrer wahren Form zeigt. In dieser Option können auch Maßzahlen von Rauminhalt, Oberflächengröße und Größe der Schnittfläche abgelesen werden.

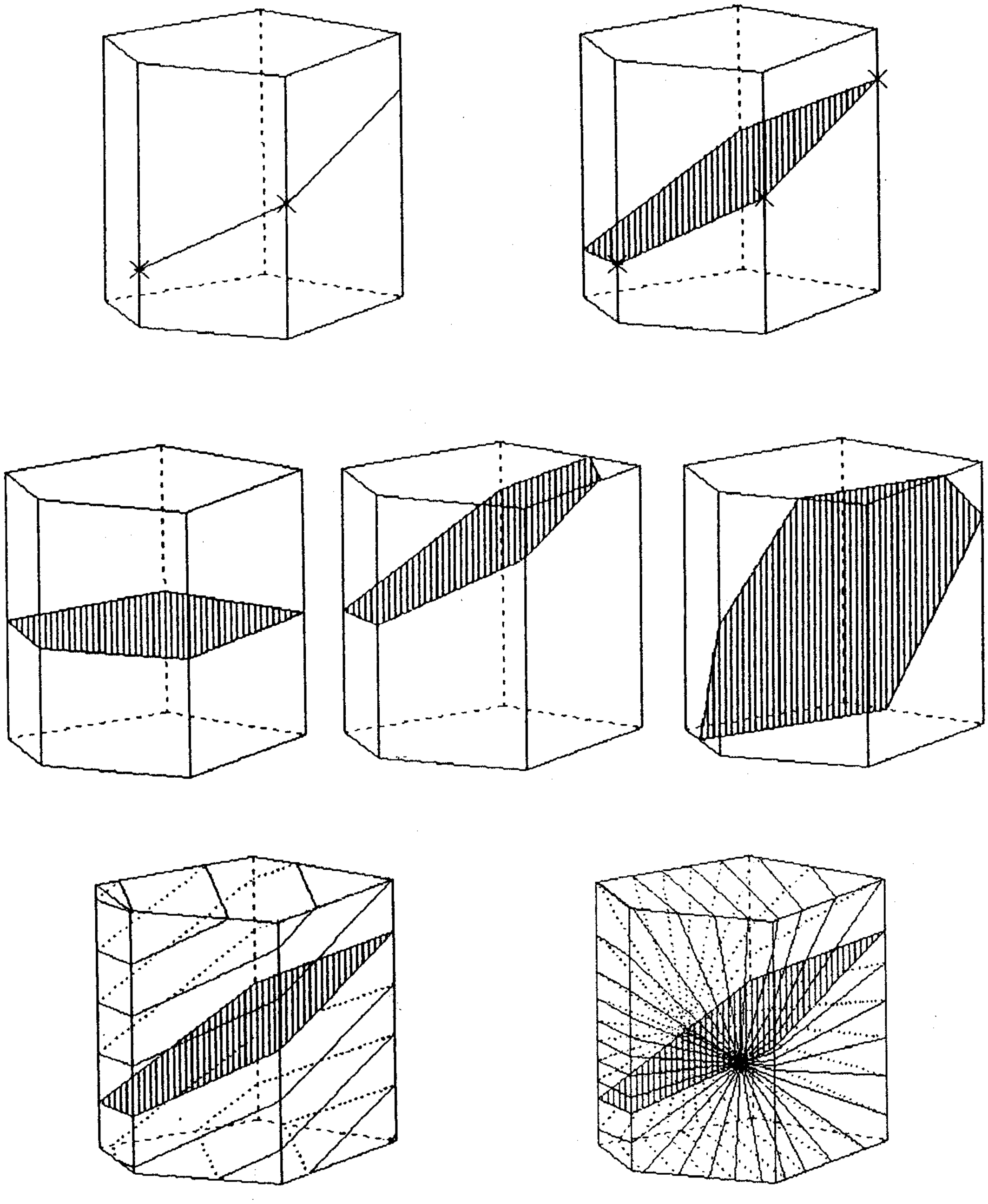


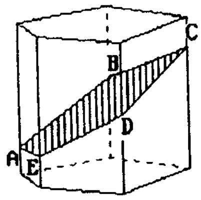
Fig. 2.1.3 a - g

Die Benennung der Polygonecken ermöglicht ein Identifizieren von Bild- und Originalpunkten. Die Schnittfläche in wahrer Form kann auch gedreht werden. (In der Option 'Ansicht - Drehen' kann auch der Körper automatisch so gedreht werden, daß der Schnitt parallel zur Bildschirmebene zu liegen kommt, also in wahrer Form erscheint). Wir verlassen kurz das Menü 'Schnitt' und wählen im Menü 'Ansicht' die Option 'Körpernetz': Um die Grundfläche der Säule (Fig. 2.1.5 a) wird die Säule in ein Netz, in dem die Schnittlinien eingezeichnet sind, abgefaltet (Fig. 2.1.5 b). Mit der Option 'Schnitt - Ausführen' lassen wir den Würfel längs der Schnittfläche zerfällen (Fig. 2.1.6).

Wir wählen einen der Schnittkörper für eine weitere Bearbeitung, d.h. Schnittbildung bzw. Darstellung, aus (Fig. 2.1.6 links, Markierung +). Der nicht weiter zu bearbeitende Teilkörper kann abgespeichert werden. Der ausgewählte Körper erscheint wie in Figur 2.1.7 zu sehen - Wie kann der ausgewählte Schnittkörper dynamisch visualisiert werden ? Mit den Optionen 'Drehen' und 'Größe' des Menüs 'Ansicht' können wir das Polyeder drehen und verkleinern bzw. vergrößern (Fig. 2.1.8 a/b). Mit der Option 'Extras - Massiv' lassen sich die verdeckten Kanten ausblenden (Fig. 2.1.8 c); mit der Option 'Ansicht - Zentral' wird zur zentral-projektiven Darstellung des Körpers übergegangen (Fig. 2.1.8 d mit hidden lines), die nach Rotation und Wahl eines körpernahen Augpunktes wie in Figur 2.1.8 e aussieht oder nach entsprechender Rotation als sog. Schlegeldiagramm, einer Verebnung des Körpers, interpretiert werden kann (Fig. 2.1.8 f).
Welche Möglichkeit besitzt das Programm SCHNITTE, um das Schnittpolyeder in eine ebene Repräsentation zu verwandeln ? Die Option 'Ansicht - Körpernetz' faltet das Polyeder in ein Netz aus; dazu ist eine Seitenfläche oder eine Kante des Polyeders auszuwählen, um die herum das Netz gebildet wird. Das Programm verwaltet dabei ein mehrdeutige Wahl von Flächen und Kanten, die durch das Hintereinanderliegen von Objekten in der räumlichen Tiefe entstehen kann. In der Figur 2.1.9 a ist als zentrale Seitenfläche die Grundfläche gewählt (Markierung:*).Es wird zuerst der Schnittkörper mit dem Netz angezeigt (Fig. 2.1.9 b), nach Bestätigung erscheint das Netz allein, das vergrößert bzw. verkleinert und gedreht werden kann (Fig. 2.1.9 c); die Wahl der Schnittfläche, Deckfläche, als zentrale Fläche liefert das Netz in Figur 2.1.9 d. Damit ist eine Brücke von der visuellen zur dreidimensionalen haptischen Wahrnehmung geschlagen: Das ausgedruckte Netz gestaltet das Auffalten zur einem papiernen Flächenmodell.

2.1.3 Exakte Positionierung von Schnittebenen

Anstelle der beliebigen Wahl der Lage von Punkten auf Kanten (Voreinstellung), kann man auch Punkte als Kantenteilpunkte wählen. Die Teilpunkte teilen jede Kante in gleich große Teile: ein Teilpunkt teilt; 2; 3; ... ; 9 Teilpunkte teilen eine Kante entsprechend in 2; 3; 4; ... ; 10 Teile. Beispielsweise illustriert die Figur 2.1.10 a - d die Erzeugung des Kuboktaeders aus dem Würfel mittels Schnitte durch Kantenmittelpunkte.



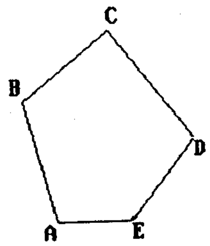


Fig. 2.1.4

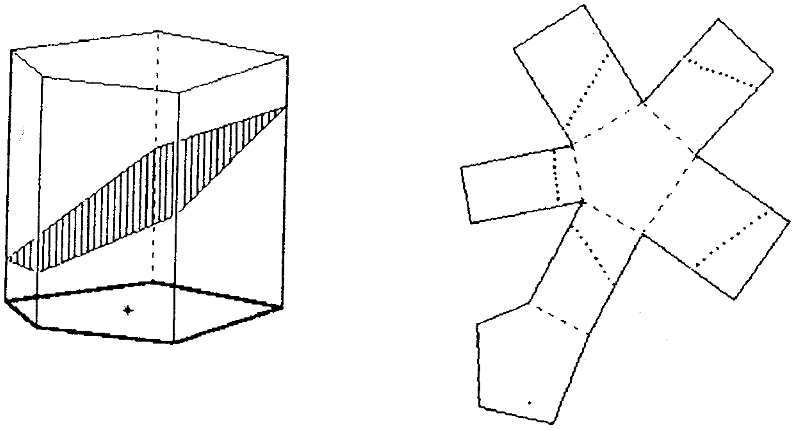


Fig. 2.1.5 a/b

Fig. 2.1.6

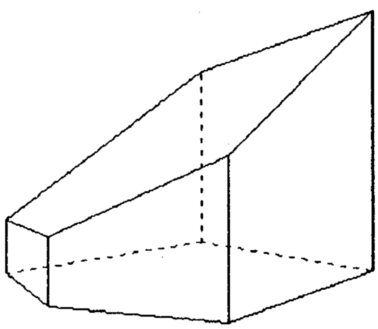


Fig. 2.1.7

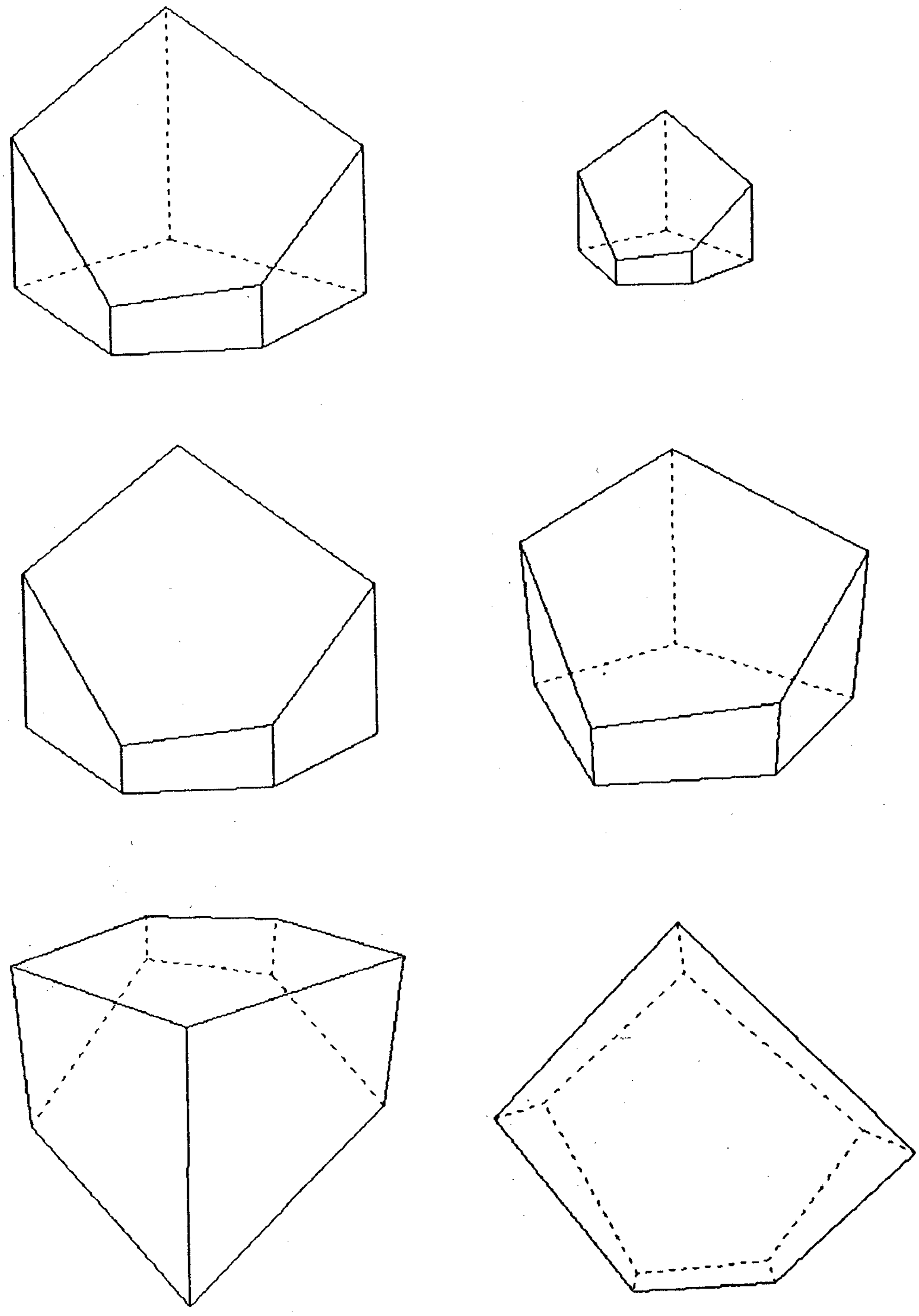


Fig. 2.1.8 a - f

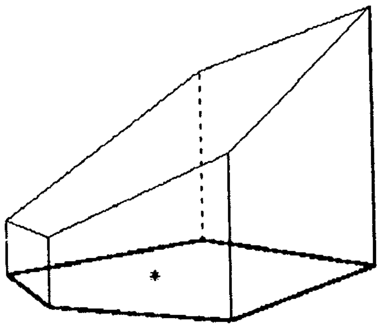


Fig. 2.1.9 a

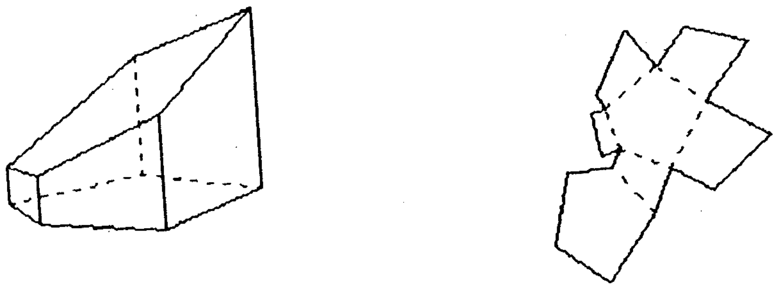
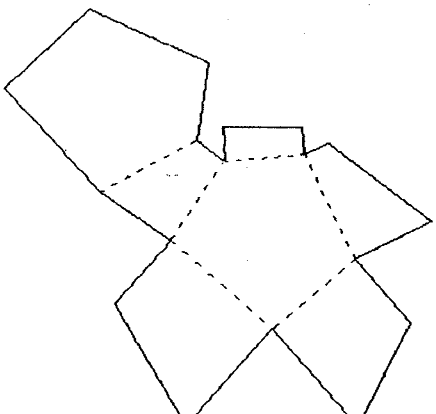


Fig. 2.1.9 b



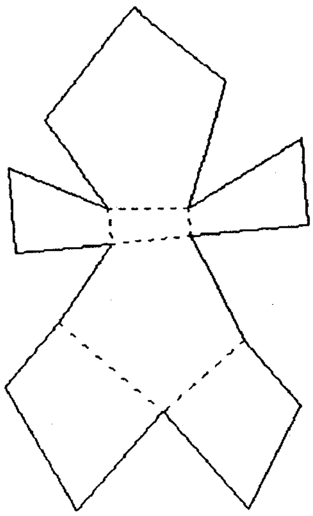


Fig. 2.1.9 c / d

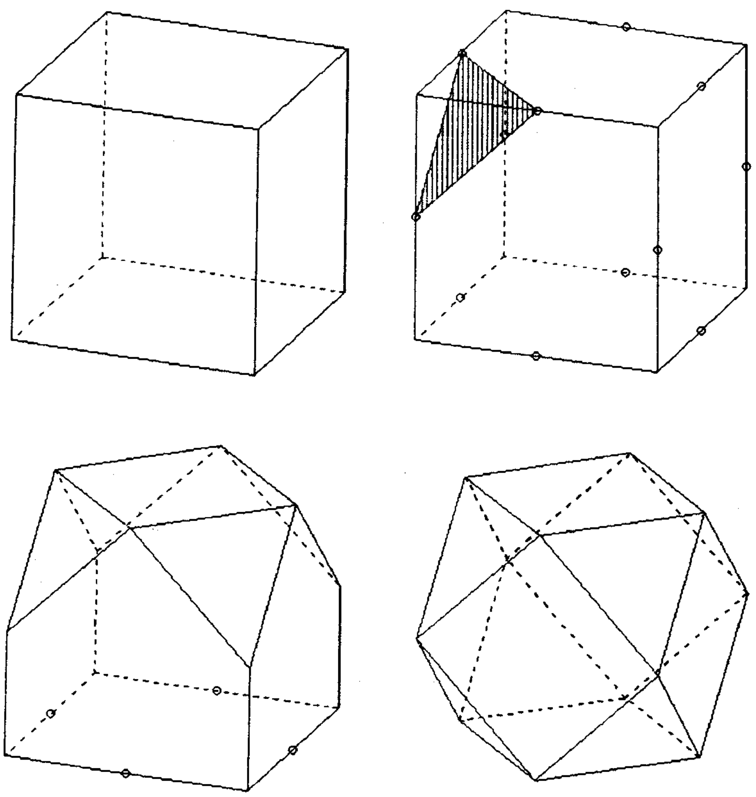


Fig. 2.1.10 a - d

Es versteht sich von selbst, daß die hier beschriebene Anwendung des Programms SCHNITTE nur unzureichend den Umgang mit dem Computer-Werkzeug wiedergeben kann, - Selbsterfahrungen in der Programmbenutzung sind für eine Programmbewertung unerläßlich.

2.1.4 Die Grenzen der Programmversion 1.0

Mehrere Schnitte eines Polyeders - wie an einem Tetraeder mit oder ohne Angabe von verdeckten Kanten in Figur 2.1.11 zu sehen - lassen sich nicht simultan erzeugen und ausführen. Allerdings können manuelle Schnittoperationen an materialen Objekten auch nur sukzessive ausgeführt werden, so daß nicht von einer ernsthaften Verletzung des Prinzips der Erwartungskonformität gesprochen werden kann. Aus einem konvexen Polyeder lassen sich aber mit dem Programm durch einen Schnitt wiederum nur konvexe Schnittpolyeder gewinnen - im Gegensatz zu materialen Schnittoperationen oder Vorstellungen über solche, die nicht vollständig längs Schnittebenen ausgeführt werden müssen. Kombinierte Schnitte, wie z.B. in Figur 1.2.11, sind nicht ausführbar. Das Ausführen der Schnittoperationen sowie das Ausfalten in ein Netz kann nicht als Vorgang in Gestalt einer räumlichen Animation betrachtet werden (eine entsprechende Prozessorientierung des Programms ist programmtechnisch nicht einfach zu realisieren). Vorteilhaft wäre natürlich, die Umkehroperationen mit dem Programm ausführen lassen zu können: Polyeder als Teilpolyeder zu einem neuen Polyeder vereinigen. Ein vorgegebenes Netz zu einem Polyeder auffalten.

Im einzelnen ist das Programm noch software-ergonomisch und inhaltlich zu verbessern - ohne sein einfaches Design unnötig zu komplizieren (z.B. durch lokale Hilfen, eine Verbesserung der Ausdrucksmöglichkeiten, einen echt interaktiven Zugriff auf die Lage der Schnittfläche, die Integration von Text in das Grafikfenster, eine Anpassung der Animationen in den Optionen 'Form' und 'Körpernetz' an die Wahrnehmungsgeschwindigkeit des Benutzers etwa durch Mausklick usw.). Hilfreich für den Nachvollzug und für die Dokumentation von Lösungsprozessen wäre eine Rückblende-Option; für die Selbstkorrektur eine Undo-Option in die Tiefe. Die Autoren des Programms sind bestrebt, SCHNITTE konzeptionell weiterzuentwickeln.

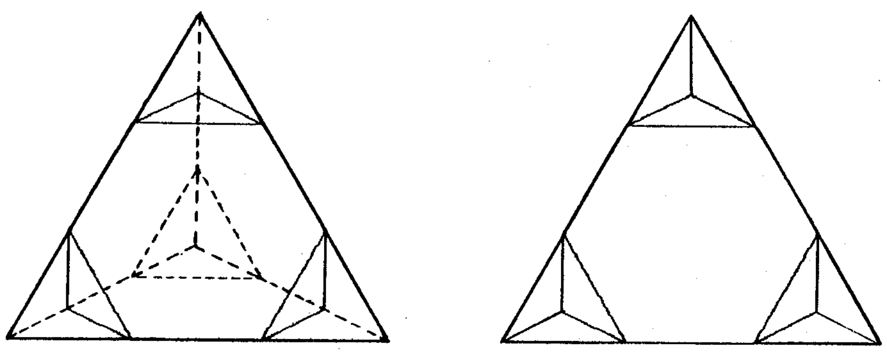


Fig. 2.1.11

2.2 Didaktische Bewertung und Einordnung des Programms SCHNITTE

Die herkömmliche Lernumgebung für die Raumgeometrie, die unter anderem bestimmt ist vom Anfertigen und Verwenden von Zeichnungen auf Papier und von materialen Modellen (Kanten-, Flächen- und Vollkörpermodellen), wird ergänzt durch ein Computerwerkzeug wie das Programm SCHNITTE. (vgl. Diagramm 2.2.1)

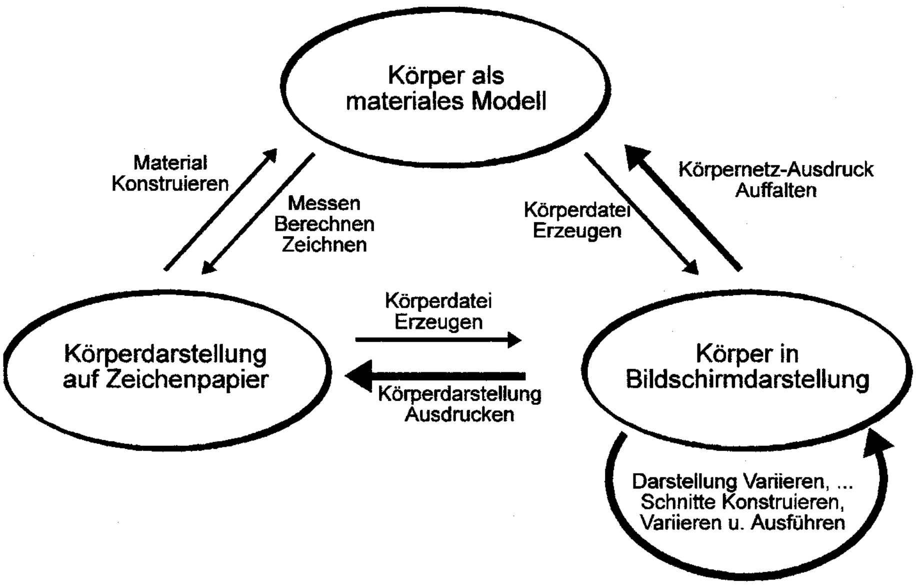


Diagramm 2.2.1

Der Darstellungswechsel von der Bildschirmdarstellung zur Papier- oder Folienzeichnung wird durch das Ausdrucken von Körperdarstellungen mit oder ohne Schnittfläche bzw. von Schnittkörperdarstellungen etwa zum Zwecke der Dokumentation (z.B. als Ergebnissicherung) und der Kommunikation nach dem Ausschalten des Computers durchgeführt (vgl. Diagramm 2.2.1 dicker Pfeil waagrecht). Der Wechsel von der Bildschirmdarstellung zu den dreidimensionalen Modellen geschieht durch das Ausdrucken und anschließendem Auffalten von Körpernetzen, die mit der Ausfaltautomatik von SCHNITTE gewonnen werden (vgl. Diagramm 2.2.1 dicker Pfeil schräg). Das Flächenmodell ermöglicht nun, taktile Erfahrungen zu machen usw.

Das Programm SCHNITTE als Visualisierungsinstrument

'Körper' in Datei $\xrightarrow{\text{Laden}}$ 'Körper' in Bildschirm-darstellung $\xrightarrow{\text{Darstellung bearbeiten}}$ neue Darstellung des 'Körpers'

(Drehen-,
Skalieren;
zentral, parallel
Projizieren;
Ausfalten ...)

Der Übergang von der Modell- und Zeichenblattdarstellung zur Bildschirmdarstellung wird durch das Kodieren der dreidimensionalen Eckpunktkoordinaten des Körpers geleistet. Dem müssen im allgemeinen entsprechende Messungen bzw. Berechnungen vorausgehen. Nach der Implementation der Eckpunktkoordinaten sind vom Benutzer interaktiv die Kantenverbindungen der Eckpunkte zu konstruieren; das Ergebnis wird als Körperdatei abgespeichert (Körperdateien Erzeugen). Diese Übergänge sind aus der Sicht des Sekundarstufen-Niveaus problematisch, weil die Berechnungen der Eckpunktkoordinaten nicht immer einfach sind und das dreidimensionale Koordinatensystem nicht als bekannt vorausgesetzt werden kann; außerdem kann das computergestützte Erzeugen eines Kantenmodells sehr zeitaufwendig sein. (In diesem Zusammenhang ist zu diskutieren, ob nicht das dreidimensionale Koordinatensystem bereits auf der Sekundarstufe I eingeführt werden könnte, es stünde dann auch für die computerunterstützte Darstellung von Funktionen zwei reelle Variablen zur Verfügung). Diese Probleme können vorerst umgangen werden, indem man den Schülern Basispolyeder als Körperdateien zur Verfügung stellt. Die Auswahl von Basispolyedern kann sich nach der zu behandelnden Thematik richten. Zusammen mit der Bearbeitung der Menüs (vgl. Abschnitt 2.1.1) ergeben sich entsprechende Möglichkeiten der Gestaltung von Lernumgebungen.
Das Programm SCHNITTE für sich kann - wie wir zum Teil schon im Abschnitt 2.1 gesehen haben - auf drei Weisen benutzt werden:

Erstens als **Visualisierungswerkzeug** (Diagramm 2.2.2 a), um ein Polyeder nach Projektionsart, nach Modellart, nach Lage und Größe verschieden darzustellen - als Voraussetzung für ein visuelles Kennenlernen des Körpers und seiner Eigenschaften.
Die Visualisierungsfunktion dient auch der dynamischen Verlagerung von Schnittflächen wie paralleles Verschieben (Fig. 2.2.1) oder Drehen (Fig. 2.2.2). - Der Leser möge selbst die Folge der Schnittflächen analysieren.
Durch das Auseinanderfalten eines komplexen Körpers in eines seiner Netze (Fig. 2.2.3) werden die Formen seiner Seitenflächen dargestellt; die Flächenanzahl ist nun besonders leicht zu ermitteln.

Die Darstellung der Form der Schnittfläche und die Darstellung der Schnittlinien in einem Körpernetz können auch zu den Visualisierungsfunktionen gezählt werden.

Zweitens als **Informationssystem**, um besondere Klassen von Polyedern, z.B. die Platonischen Körper, die Deltoeder usw. kennenzulernen.

Drittens als **Konstruktionswerkzeug** (Schema 2.1.2 b), um in gebundener oder beliebiger Weise Schnittebenen festzulegen, und um die Schnitte ausführen zu lassen (Fig. 2.2.4 vom Ikosaeder zum 10-eckigen Antiprisma; Fig. 2.2.5 vom Ikosaeder zu einem Teilkörper mit einem fast achsensymmetrischen Netz; Fig. 2.2.6 Querschnitt des Ikosaeders mit rotationssymmetrischem Netz).

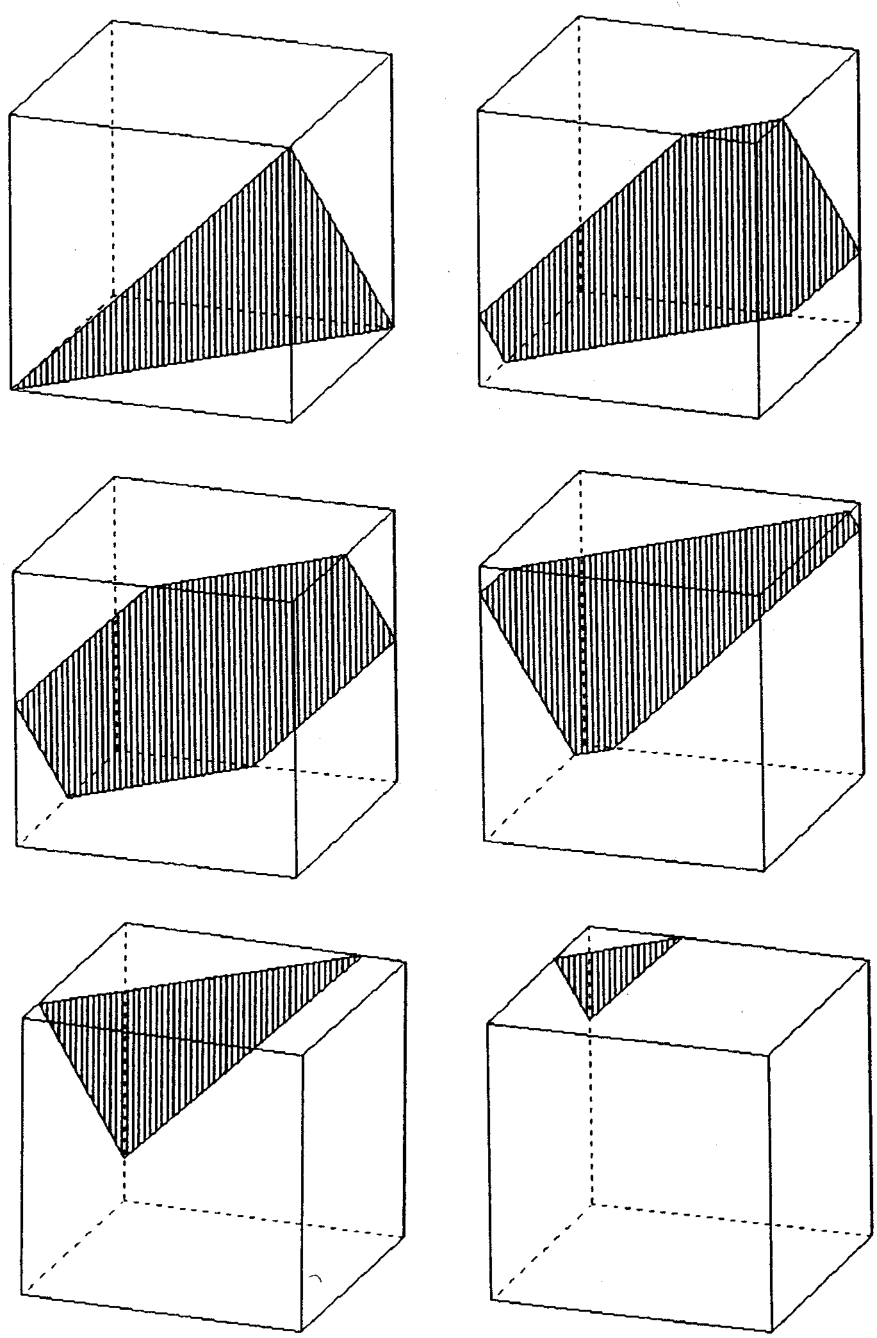


Fig. 2.2.1

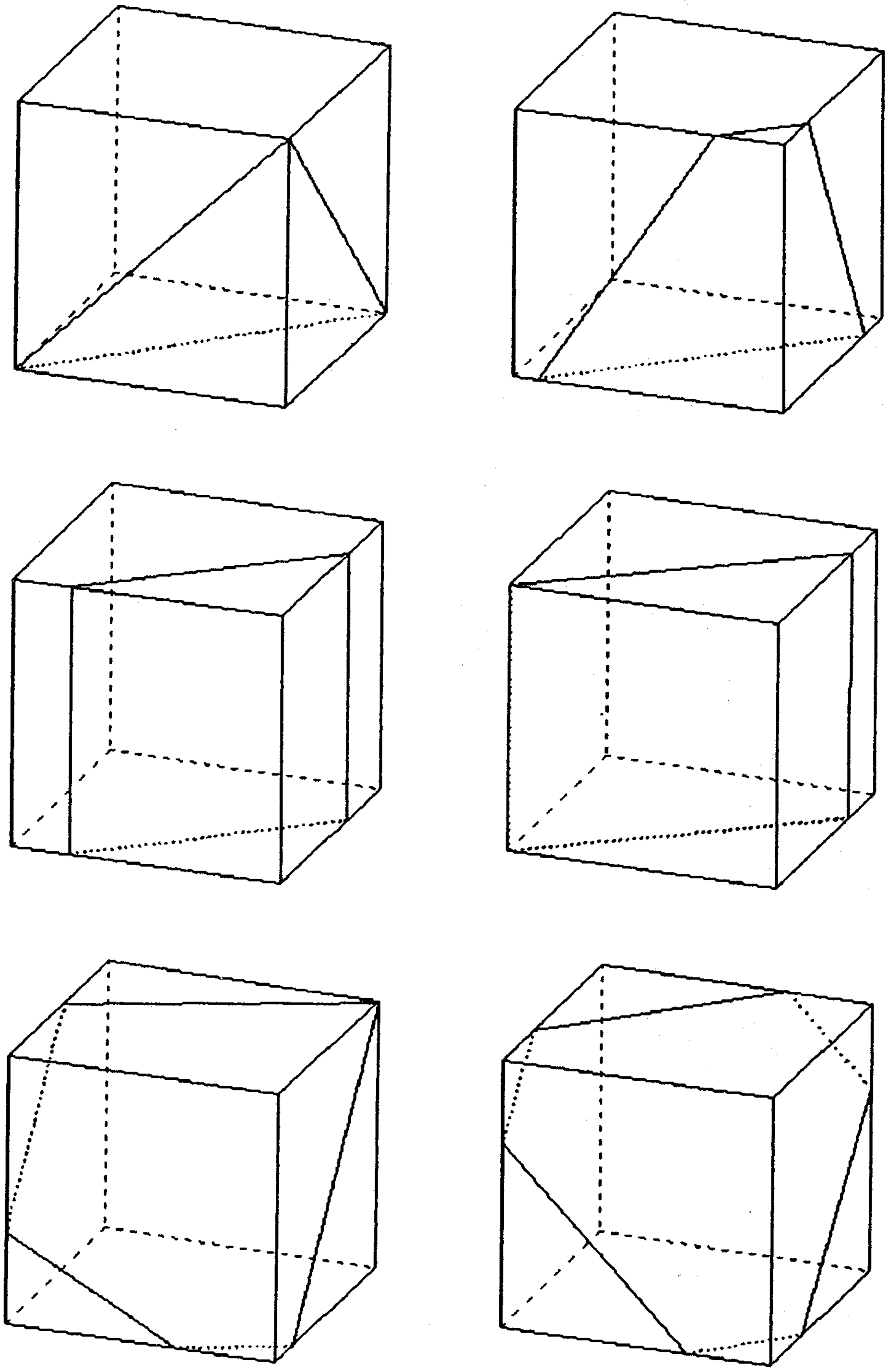


Fig. 2.2.2

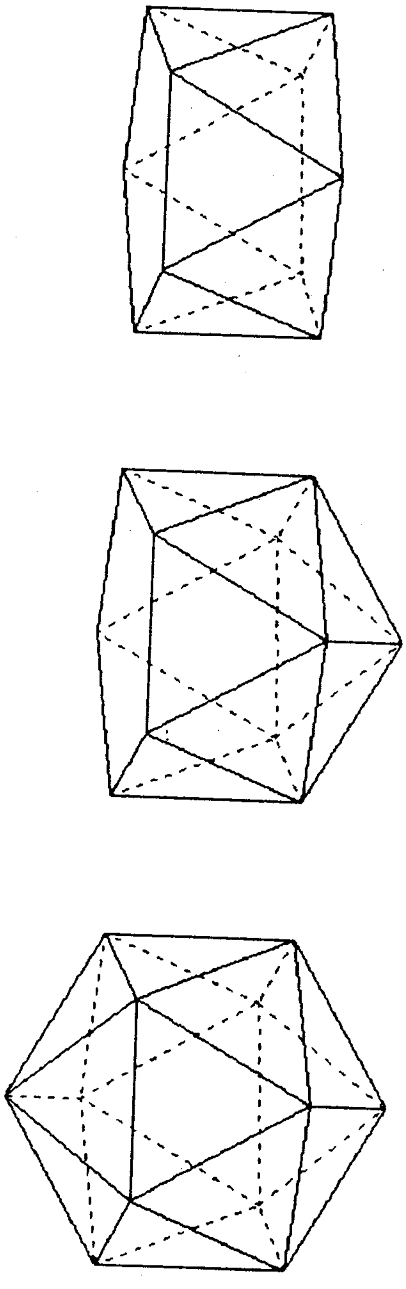


Fig. 2.2.4

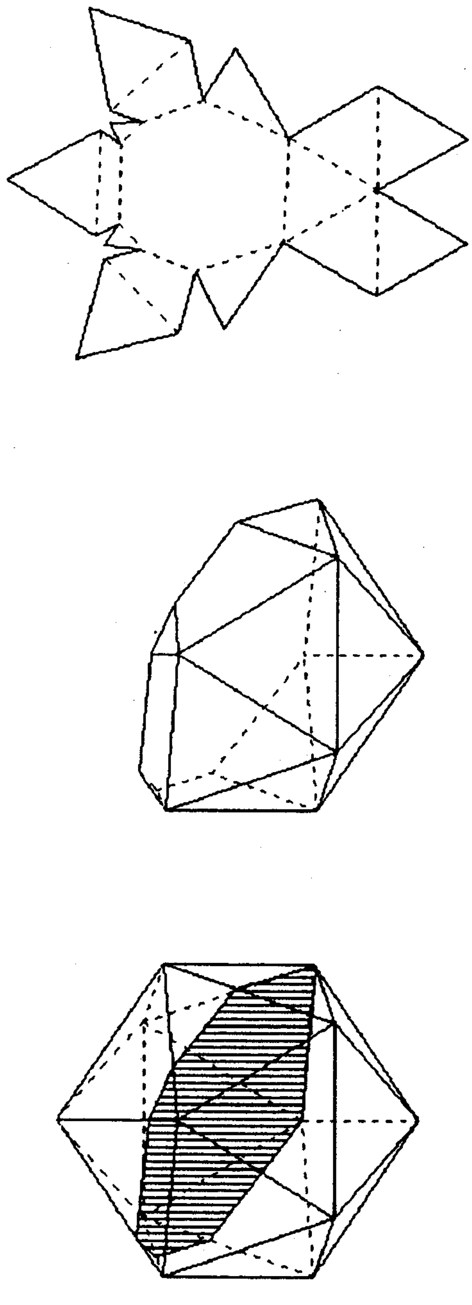


Fig. 2.2.5

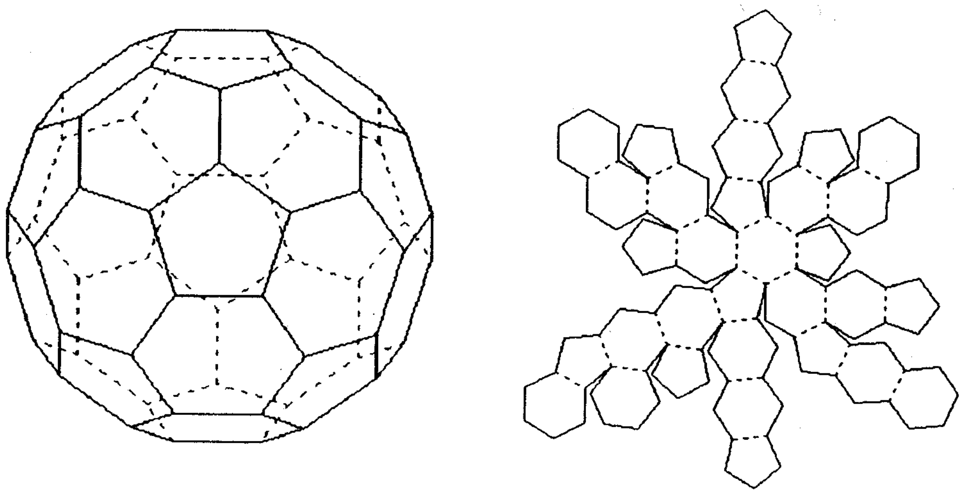


Fig. 2.2.3

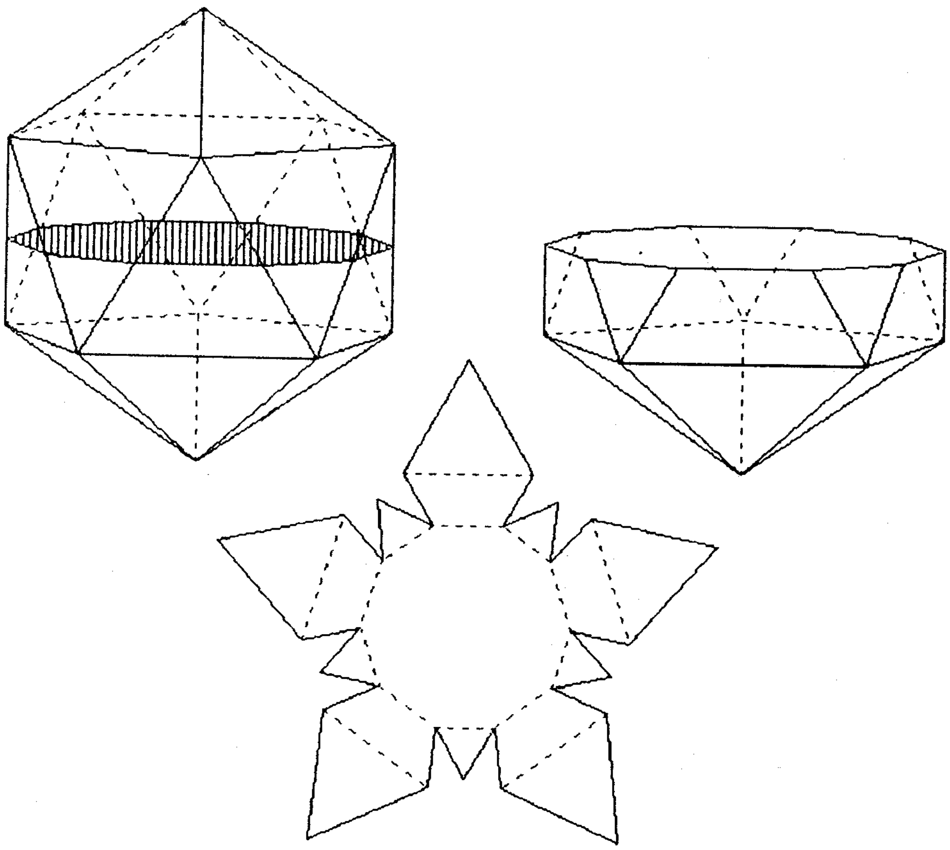


Fig. 2.2.6

Die konstruierten Schnittkörper können abgespeichert werden; sie erweitern die Polyedersammlung.
Das Programm SCHNITTE kann als Konstruktionswerkzeug auch das Lösen von konstruktiven Schnittaufgaben und die Kontrolle der Lösung solcher Aufgaben unterstützen. Das soll an folgenden zwei Beispielen verdeutlicht werden. (Weitere Beispiele können dem Abschnitt 2.4 entnommen werden.)

Beispiel 1: Beliebte Aufgaben zum Training der Raumvorstellung sind von der Art wie die in der Figur 2.2.7 a und in Figur 2.2.7 b gezeigten: Gegeben ist ein Körper mit einem Schnitt und ein Netz des Körpers; gesucht sind die Schnittlinien im Netz. - Gegeben ist ein Netz mit eingezeichneten Schnittlinien und der entsprechende Körper; gesucht ist der Schnitt am Körper (Umkehraufgabe). - Der Schüler hat keine konkreten Hilfen zum Lösen der Aufgaben, es sei denn, ein Körpernetz in materialer Darstellung stünde zur Verfügung. Die Erfolgsmöglichkeiten sind gering, wenn ein entsprechendes Raumvorstellungsvermögen nicht entwickelt ist.
Mit dem Programm SCHNITTE können beide Aufgaben gelöst oder ihre Lösungen vom Schüler kontrolliert werden. Es lassen sich Erfahrungen sammeln, die beim Lösen solcher Aufgaben das Computerwerkzeug überflüssig machen. Die Figur 2.2.8 a zeigt Lösungen der ersten Aufgabe und die Figur 2.2.8 b die Lösung der Umkehraufgabe (zweite Aufgabe), - die Umkehraufgabe wird gelöst, indem man einen vermutlich richtigen Schnitt in den Körper legt und dann mit der Netzautomatik überprüft, ob die Vermutung richtig ist.

Beispiel 2: Bei Berechnungsaufgaben oder Begriffsbildungsaufgaben, etwa bei Berechnungen an Pyramiden (vgl. Fig. 2.2.9 sechsseitige Pyramide mit regelmäßiger Grundfläche), benötigt man Körperschnitte, z.B. Längs- oder Achsenschnitte (vgl. Fig. 2.2.10 a/b) oder Querschnitte (vgl. Fig. 2.2.11 a/b, Stumpfen einer Pyramide) usw.

Anmerkung 1: Das Lösen von Schnittaufgaben, in denen Winkel, Längen, Flächen oder Volumina berechnet werden sollen, wird nur teilweise unterstützt. Dazu fehlen entsprechende Berechnungsautomatiken wie sie in 3-D-CAD Systemen implementiert sind (vgl. Kapitel 3). SCHNITTE kann beim Lösen solcher speziellen Berechnungsaufgaben lediglich helfen, die Aufgabenstellung durch Visualisierungen zu verstehen (vgl. Abschnitt 1.6).

Anmerkung 2: Es ist denkbar, die mit dem Schnittwerkzeug erzielten und ausgedruckten Ergebnisse zeichnerisch- konstruktiv zu ergänzen, um z.B. die Brücke von der computererzeugten zur traditionell hergestellten Schnittdarstellung auf Papier zu schlagen. Wir verdeutlichen das am Beispiel der Findung der Spurgeraden eines Schnitts an einer 5-seitigen Säule (Fig. 2.2.12 a): Die Bleistift-Verlängerungen der Grundkanten schneiden sich mit den Verlängerungen entsprechender Schnittlinien in Punkten, die kollinear sind (Fig. 2.2.12 b). - Bei Nutzung eines universellen raumgeometrischen Werkzeugs wäre ein solcher Medienwechsel nicht notwendig (vgl. Kapitel 3).

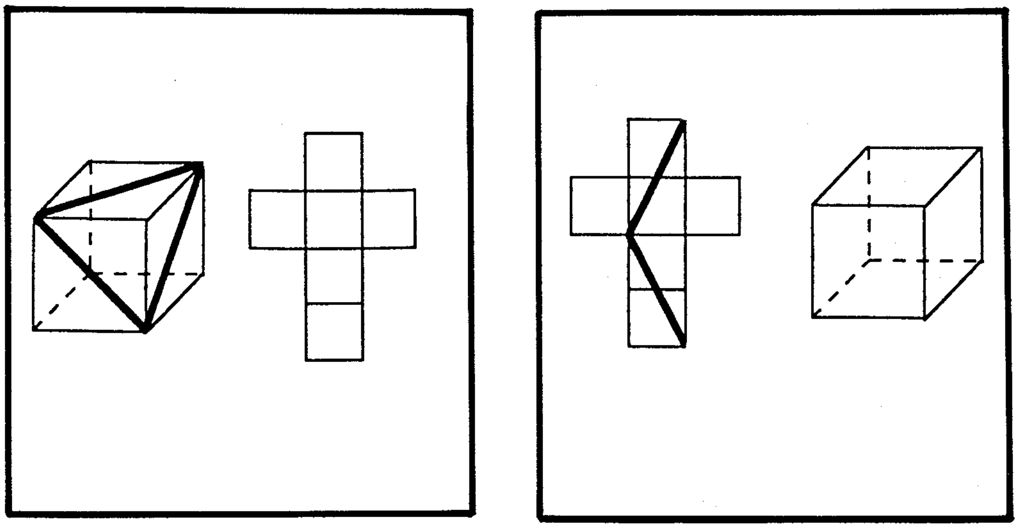


Fig. 2.2.7 a / b

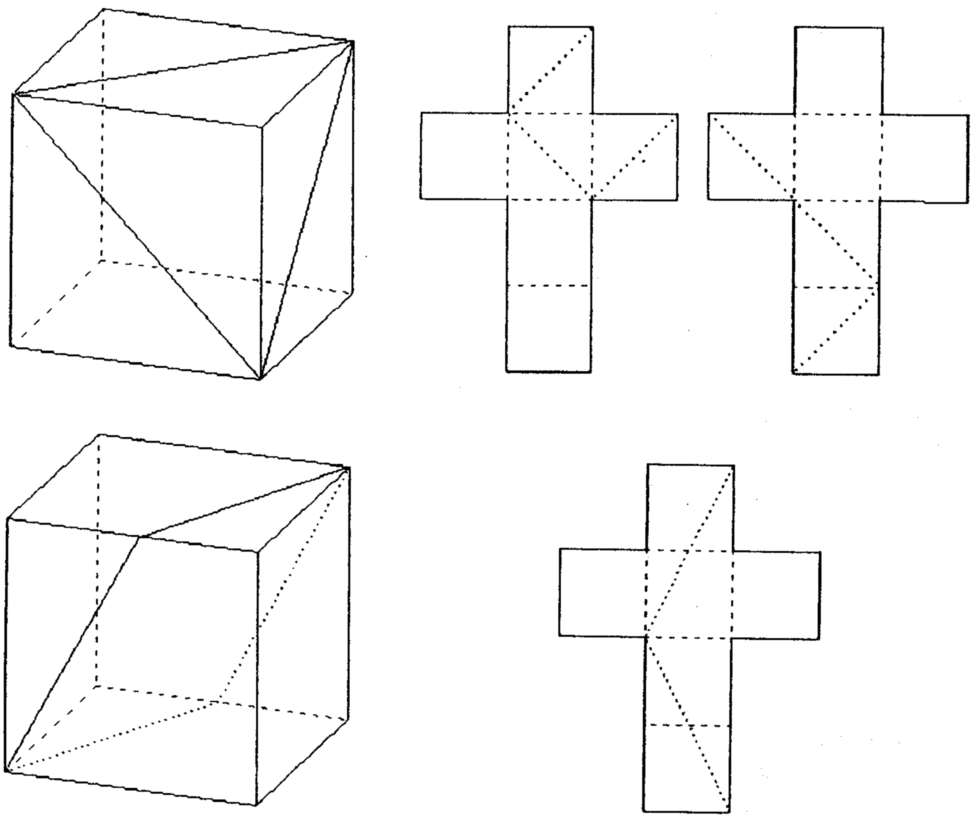


Fig. 2.2.8 a / b

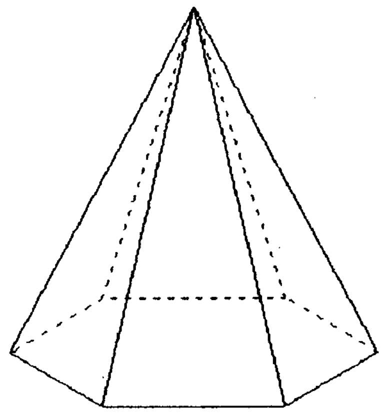


Fig. 2.2.9

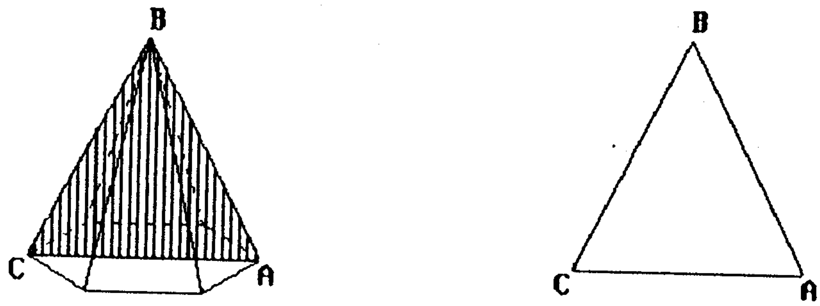


Fig. 2.2.10 a

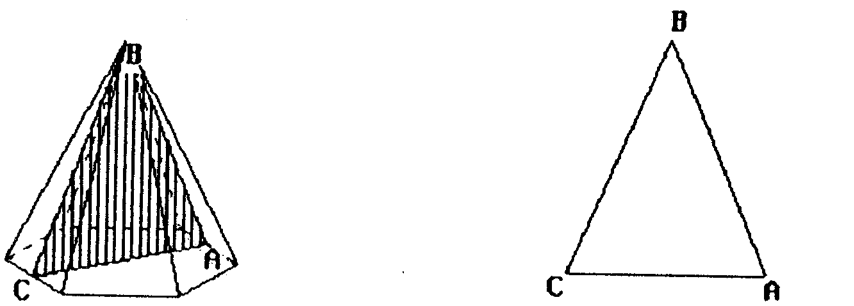


Fig. 2.2.10 b

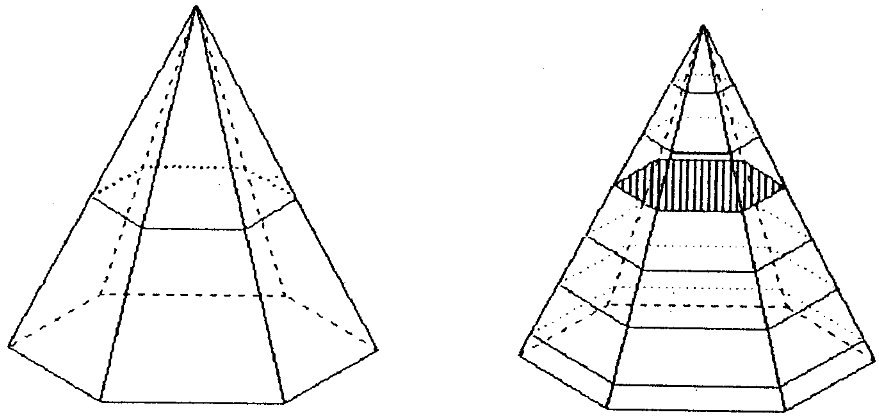


Fig. 2.2.11 a

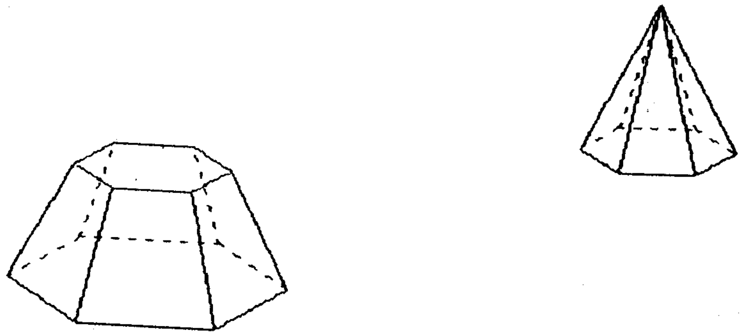


Fig. 2.2.11 b

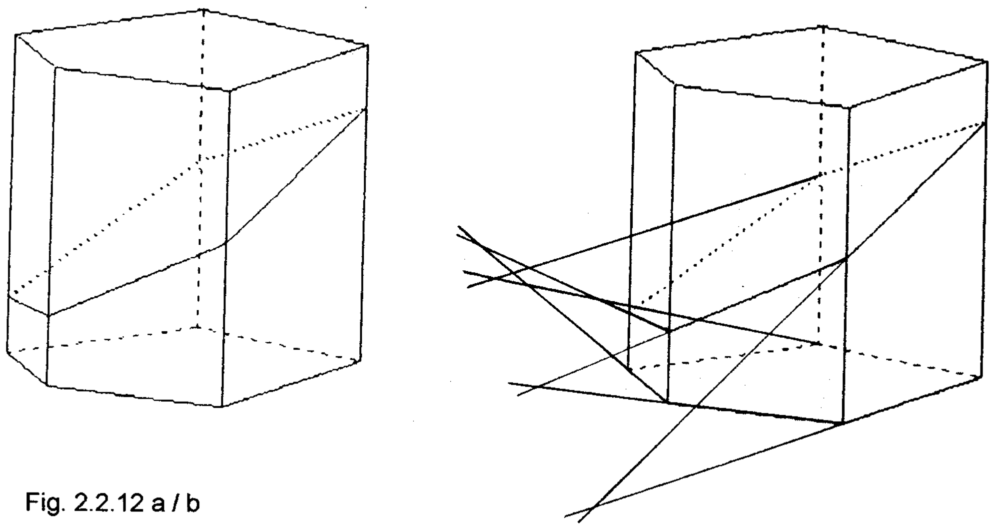


Fig. 2.2.12 a / b

In der alten Lernumgebung könnte eine Schnittkörperbildung allenfalls wie in Figur 2.2.13 a angedeutet ablaufen:
Auf einem Flächenmodell, im Beispiel des eines Würfels, werden Schnittlinien eingezeichnet, nach dem Ausfalten in ein Netz wird mittels Schere der Schnitt ausgeführt, aber nach dem Auffalten fehlt die Abdeckelung zu einem Schnittkörper. Das Veranschaulichen eines Polyederschnitts durch Aufstülpen einer Schablone oder durch Aufziehen eines Gummirings stützt zwar die Vorstellung, hat aber keine funktionelle Wirkung (vgl. Fig. 2.2.13 b). Der Nachteil dieser Technik - andere Techniken, wie das Zerschneiden von Styropor - oder anderen Vollkörpermodellen, sind wohl kaum von unterrichtspraktischer Bedeutung - liegt auf der Hand: Eine echte Schnittoperation ist nicht durchführbar, Beschränkung auf wenige einfache Körper, großer Zeit- und Materialaufwand, keine dynamischen Verlagerungsmöglichkeiten des Schnitts, 'Versuch und Irrtum'-Methode ist kaum realisierbar, da die Selbstkorrektur behindert, divergentes Denken wird nicht unterstützt. Vorteilhaft ist ohne Zweifel die ganzheitliche Tätigkeit im Verbund mit den Tätigkeiten von 'Hand, Auge und Kopf'. Von daher ist es angezeigt die Bildschirmdarstellung für die Behandlung raumgeometrischer Themen nicht isoliert von den anderen taktil orientierten Darstellungen einzusetzen (vgl. Diagramm 2.2.1).

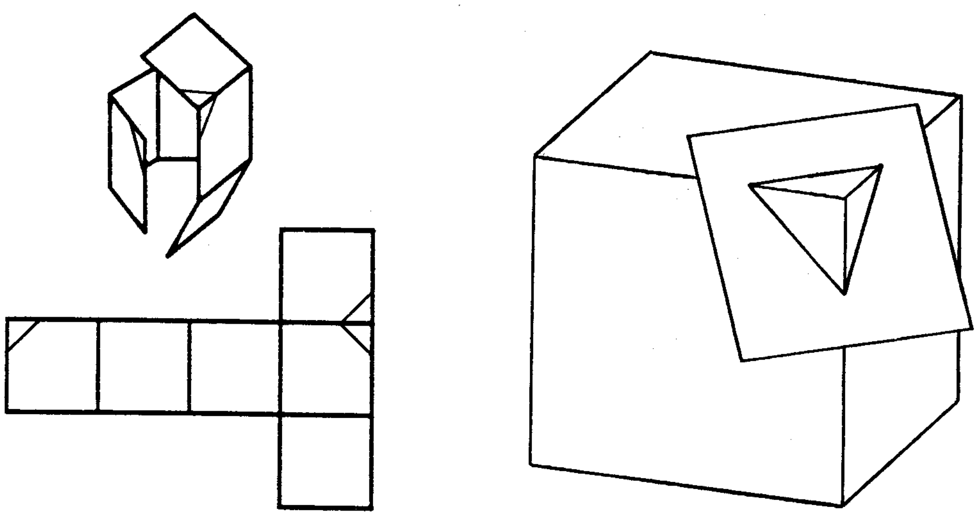


Fig. 2.2.13 a / b

Wir schließen diesen Abschnitt mit der Angabe einiger kognitiver Lernziele aus dem Bereich der Formenkunde und Konstruktionslehre, deren Verwirklichung vom Programm SCHNITTE unterstützt werden kann. (Auf Ziele, die die Programmbeherrschung anlangen, gehen wir hier nicht ein.)

Lernziele, die die Nutzung als Visualisierungswerkzeug und Informationssystem betreffen:

- Körperdarstellungen 'lesen' (auch plan wirkende Darstellungen räumlich interpretieren - der Leser möge z.B. die Darstellungen in Figur 2.2.14 räumlich interpretieren)

- (Schnitt-)Körper beschreiben (auch unter Benutzung von Körpernetzen und den aus diesen gebauten Flächenmodellen) nach
  der Anzahl von Ecken, Flächen und Kanten (Anzahlbeziehung: Eulerscher Polyedersatz),
  der Art der Ecken und der Beziehung zwischen den Ecken,
  der Art der Flächen und der Beziehung zwischen den Flächen,
  der Beziehung zwischen den Ecken und Flächen.

- Körper unabhängig von ihrer Lage und Größe als formgleich erkennen.

- Übereinstimmende Eigenschaften (z.B. Bauprinzipien) an verschiedenen Körpern erkennen.

- Schnittflächeneigenschaften untersuchen (Form von Schnittflächen beschreiben. Entscheiden, ob vorgegebene Form als Schnittfläche möglich. Maximale Eckenanzahl von Schnittflächen herausfinden, ...)

Lernziele, die die Nutzung als Konstruktionswerkzeug betreffen:

- Schnittflächen nach der eigenen Phantasie und nach Vorgaben konstruieren.

- Schnittkörper nach der eigenen Phantasie und nach Vorgaben konstruieren.

- Ergebnisse von Schnittoperationen vorhersehen (Kopfgeometrie: Schnitt in der Vorstellung positionieren, Schnitt in der Vorstellung ausführen).

- in der antizipierenden Vorstellung gemachte Schnittoperationen durch Konstruktion überprüfen.

- Ergebnisse von Schnittoperationen durch Handskizzen fixieren.

- Flächenmodelle aus den (ausgedruckten) Netzen bauen.

Es ist selbstverständlich, daß allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht, wie die etwa von Winter (vgl. u.a., Wittmann 1976, S. 37-38), bei der computerunterstützten Behandlung von Polyederschnitten realisiert werden können: Von den anzustrebenden allgemeinen Haltungen und Fähigkeiten heben wir hier hervor: Der Schüler soll lernen, sich kreativ zu verhalten. Der Schüler soll lernen, zu argumentieren. Von den intellektuellen Grundtechniken können die folgenden geübt werden: Klassifizieren, Ordnen, Generalisieren/Spezialisieren, Analogisieren. - Darüber hinaus wird die dynamische Raumvorstellungsfähigkeit trainiert (vgl. Abschnitt 1.1).

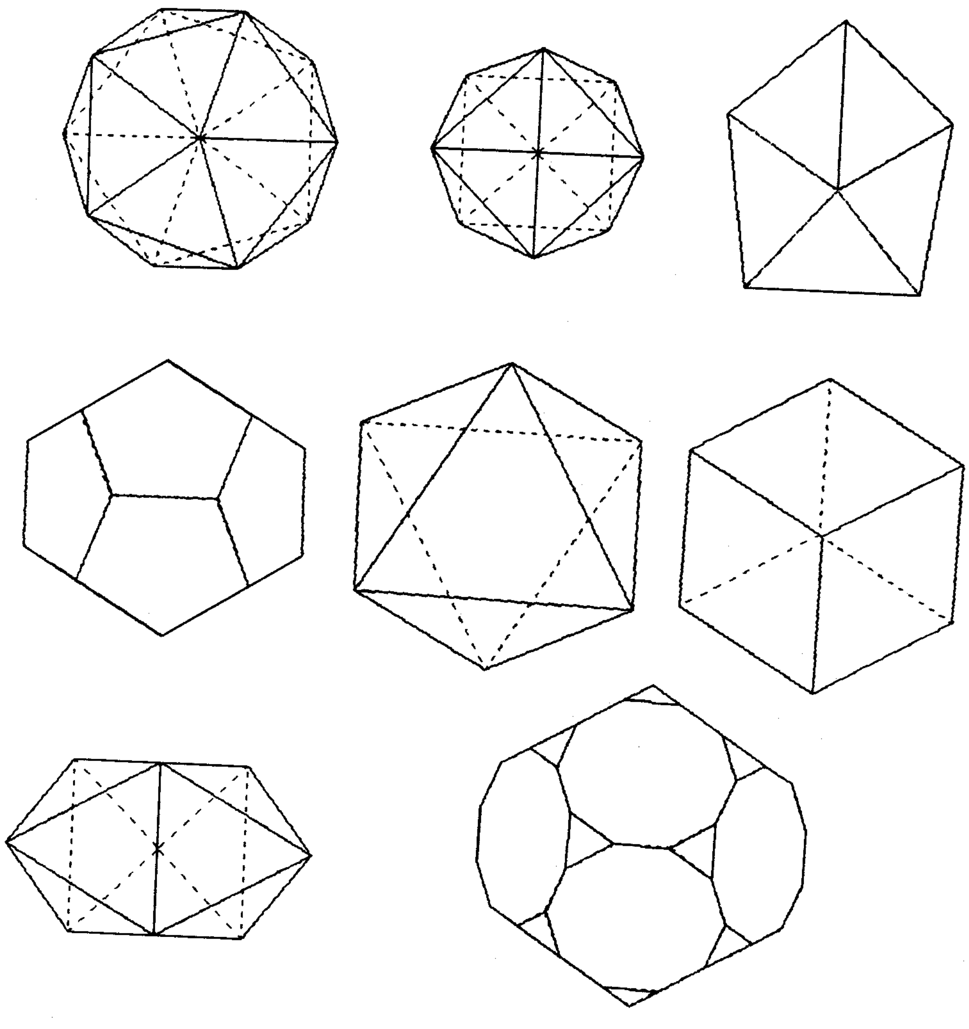


Fig. 2.2.14

2.3 Verlauf und Ergebnisse eines Unterrichtsversuchs mit dem Programm SCHNITTE

In einer 6-stündigen Unterrichtseinheit à 3 Doppelstunden wurde eine erste Erprobung des Programms SCHNITTE durchgeführt. Für 26 Schüler einer 9. Realschulklasse standen idealerweise 15 Computer zur Verfügung, so daß zwei Schüler an einem Arbeitsplatz zusammen arbeiten konnten. - Mit Ausnahme von geometrischen Berechnungen an speziellen Schnittkörpern gibt es keine explizite Beziehung dieser Unterrichtseinheit zum Regelunterricht gemäß des Lehrplans.

Gliederung der Unterrichtseinheit:

(1) Das Programm SCHNITTE als **Visualisierungswerkzeug** und **Informationssystem** benutzen, um die Platonischen Körper kennenzulernen

Körperdateien: PLATON1 (Tetraeder), PLATON2 (Würfel),
PLATON3 (Oktaeder), PLATON4 (Dodekaeder),
PLATON5 (Ikosaeder), WUERFEL1

Optionen:
'Körper - Laden'
'Ansicht - Drehen'
'Ansicht - Größe'
'Ansicht - Parallel'
'Ansicht - Körpernetz'

Zeit: 2h, Hausaufgabe: Aus den restlichen Papiernetzen die Körper auffalten. Tabelle für Ecken-, Kanten- und Flächenanzahl sowie für Flächen- und Eckenart ausfüllen.

(2) Das Programm SCHNITTE als **Konstruktionswerkzeug** benutzen, um Schnitte des Würfels und Schnittkörper aus dem Würfel zu erzeugen.

Körperdatei: WUERFEL1 (Würfel mit Dreiecksschnitt)
Optionen:
'Körper - Laden'
'Schnitt - Erzeugen'
'Schnitt - Bewegen'
'Schnitt - Form'
'Schnitt - Löschen'
'Schnitt - Ausführen'
'Ansicht - Drehen'
'Ansicht - Körpernetz'

Zeit: 4h, Hausaufgabe: Arbeitsblätter fertig bearbeiten, Phasenbilder zeichnen, Papiernetze von Schnittkörpern auffalten und beschreiben.

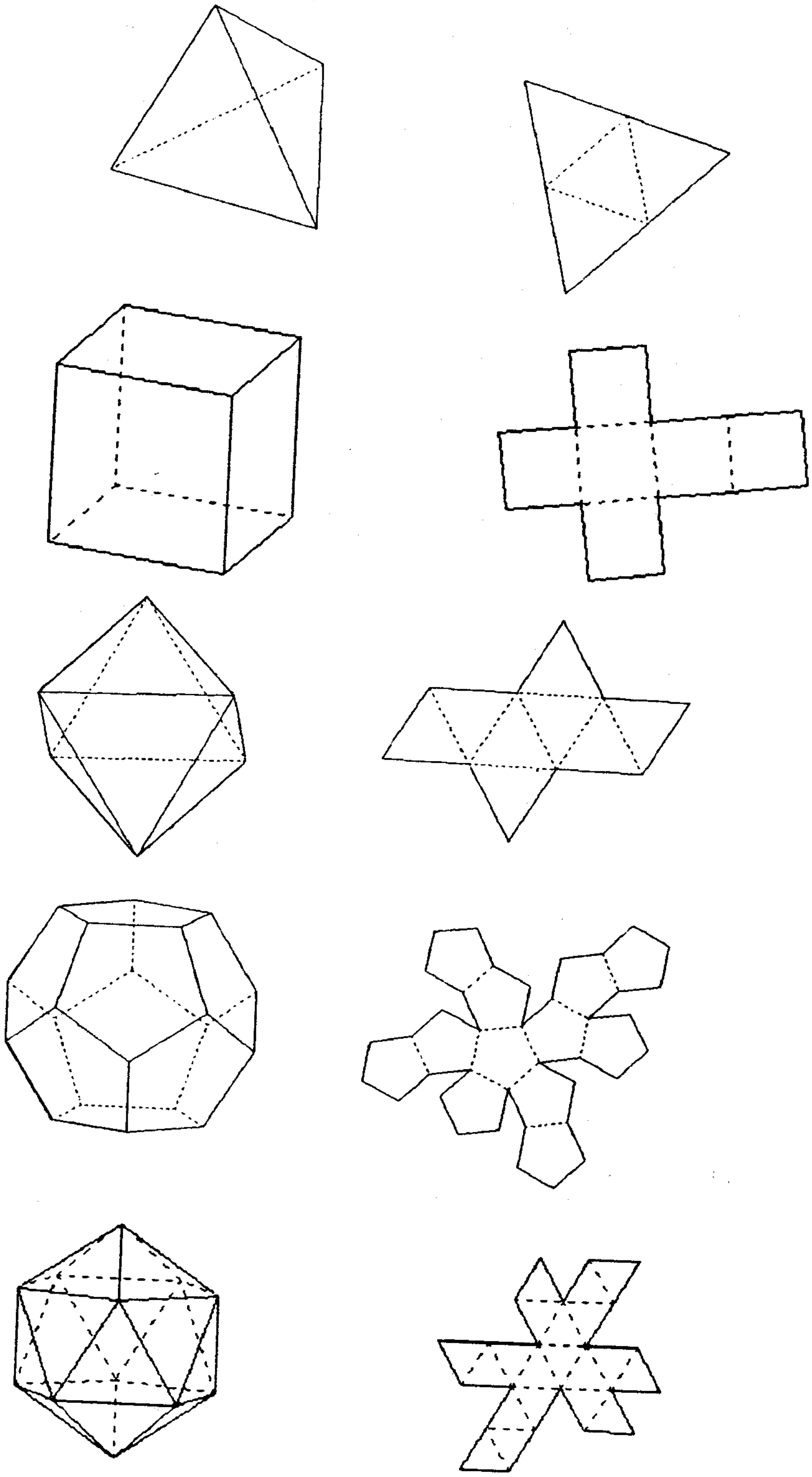


Fig. 2.3.1

Wir gehen hier nur kurz auf den Verlauf der ersten Doppelstunde ein und beschreiben dann ausführlicher den Einsatz von SCHNITTE als Konstruktionswerkzeug.

2.3.1 Die Platonischen Körper kennenlernen

Der Lehrer informiert über die Zielsetzung der Stunde: Wir wollen mit Hilfe des Computers eine besondere Sorte von Körpern kennenlernen. - Er demonstriert das Laden des Programms SCHNITTE, das Laden eines der Körper, z.B. des Ikosaeders (PLATON5), das Drehen, Vergrößern und Verkleinern usw. sowie das Entfalten in ein Körpernetz und das Ausdrucken. (Werkzeugnutzung imitativ lernen !)
Der Lehrer gibt nun schriftlich die folgende Arbeitsanweisung: Ladet nacheinander die Körper PLATON1 - 5. Betrachtet die Körper mit den Optionen des Menüs 'Ansicht'. Entfaltet die Körper zu einem Körpernetz (unter 'Ansicht') druckt diese aus und faltet auf. Beschreibt die Körper ...

Zur Selbstkontrolle der Arbeit und zum Eintragen der Körpernamen hält er ein Blatt wie in Figur 2.3.1 bereit; außerdem eine Tabelle für die quantitative Beschreibung der Körper. Die Schüler/Schülerinnen werden ermutigt, mehr als ein Netz desselben Körpers zu erzeugen (z.B. wie in Figur 2.3.2).

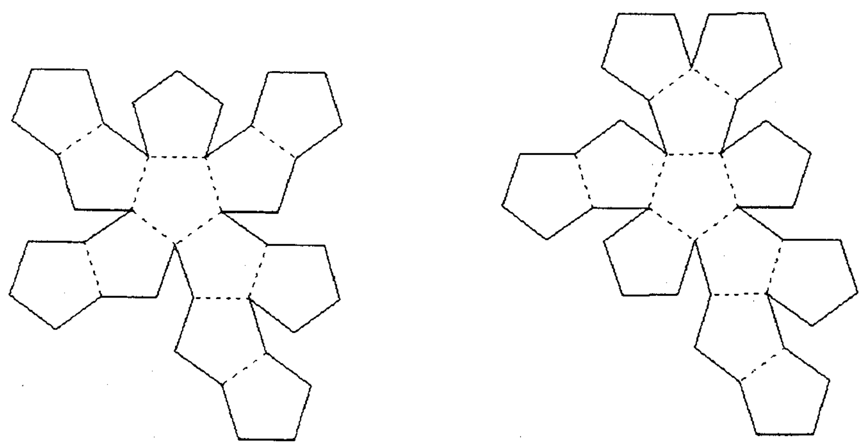


Fig. 2.3.2

Der Lehrer demonstriert Körper, die ebenfalls lauter kongruente regelmäßige Seitenflächen besitzen, aber verschiedenartige Ecken (z.B. die 3-seitige Doppelpyramide), oder ebenfalls lauter gleichartige (kongruente) Ecken besitzen, aber deren regelmäßige Seitenflächen verschiedenartig sind (z.B. das Kuboktaeder). Damit wird die Begriffsbildung initiiert: Die Platonischen Körper sind Körper aus jeweils kongruenten regelmäßigen Seitenflächen und kongruenten Ecken. Es wird kurz über die Geschichte dieser Körper berichtet. (Eine Begründung dafür, das es nicht mehr konvexe reguläre Polyeder als die fünf Platonischen Körper geben kann und die Erörterung anderer Fragen, z.B. der Dualität, mußten hier wegen Zeitmangels unterbleiben.)

Einige Beobachtungen: Die Schüler und Schülerinnen haben beim Arbeiten mit den Körpern keine Wahrnehmungsprobleme; sie interpretieren die Körperschrägbilder richtig. - Zu den Anzahlbestimmungen, vor allem der Flächen, lassen sie auch Körpernetze bilden. - Das verkleinernde bzw. vergrößernde Skalieren verwenden sie zu einem Partner-Ratespiel: Welchen Körper habe ich zu einem Punkt schrumpfen lassen ? Welchen Körper habe ich 'bis zum geht nicht mehr' vergrößert ? - Die Anzahltabellen sind auf wenige Zählfehler richtig ausgefüllt. - Die aufgefalteten und zusammengeklebten Körper werden von den meisten Schülern in einer Schachtel transportiert und aufbewahrt.

2.3.2 Würfelschnitte erzeugen

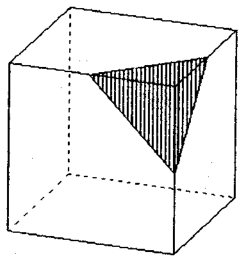
Der Lehrer geht vom alltäglichen Erfahrungswissen der Schüler aus - als Anfangsmotivation kann die Figur 2.3.3 dienen: "Ihr könnt Brot, Kuchen, Wurst, Margarinewürfel zerschneiden oder Gegenstände aus Holz, z.B. einen Holzbalken, zersägen. Wie sieht so ein Messer- oder Sägeschnitt aus ? - Geht das auch mit den Körpern, die wir kennengelernt haben ?" In einem ersten Lehrer-Schülergespräch wird geklärt, daß es sich - meistens - um ebene Schnitte handelt, die man dem Messer oder mit der Säge führt, daß die Form der Schnittfläche (nicht immer) vom Gegenstand abhängig ist und daß man durch einen Schnitt meistens zwei Teile erhält. - Der Lehrer lädt einen Würfel und demonstriert an diesem, wie mit der Option 'Schnitt - Erzeugen' ein ebener Schnitt durch den Körper gelegt wird (Warum benötigt man dafür 3 Punkte ?); er variiert mit der Option 'Schnitt - Bewegen' die Lage des Schnittes, zeigt die Gestalt des Schnittes mit der Option 'Schnitt - Form' und läßt den Körper längs des Schnitts mit 'Schnitt - Ausführen' zerlegen; nach Auswahl eines der Schnittkörper läßt er diesen in ein Netz verebnen.

Das Schnitt - Menü

Schnitt - Löschen	Der Körperschnitt wird gelöscht.
Schnitt - Erzeugen	Es müssen drei neue Punkte auf Kanten angegeben werden, um die Lage des neuen Körperschnitts zu bestimmen.
Schnitt - Bewegen	Der aktuelle Körperschnitt kann vorwärts und rückwärts bewegt werden. Der Körperschnitt kann um die drei Raumachsen gedreht werden.
Schnitt - Form	Dieser Befehl zeigt die wahre Form des Schnitts an. Diese Form kann bewegt werden.
Schnitt - Ausführen	Der Körper wird in zwei Teile zerlegt. Nun kann der Körper, mit dem weitergearbeitet werden soll, ausgewählt werden.

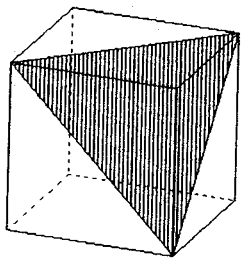
Aufgabenblatt 'Schnittflächen'

1) Lade den Körper WUERFEL1. Du erhältst den Würfel mit einem eingezeichneten Schnitt.



2) Unter dem Menü 'Schnitt' findest Du die Option 'Form'. Wenn Du diese Option ausführen läßt, kannst Du auf der rechten Bildschirmhälfte die wahre Form des Schnittes sehen.

3) Um welche Art von Dreieck handelt es sich ?



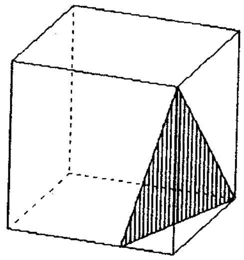
4) Wähle die Option 'Schnitt - Bewegen' und verändere die Lage des Schnitts so lange, bis Du die Schnittfläche erhältst, wie sie rechts abgebildet ist.

5) Warum ist dieses Dreieck gleichseitig ?

6) Kannst Du schon vorhersagen, was geschehen wird, wenn Du die Schnittfläche nur noch ein wenig weiter nach hinten drehst ?

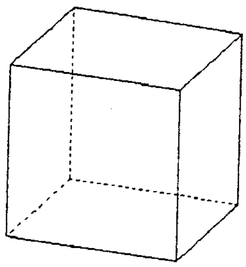
7) Kontrolliere Deine Vorhersage mit dem Computer. Mit der Option 'Schnitt - Erzeugen' kannst Du ein eigene Schnittfläche konstruieren lassen. Dazu mußt Du nur drei Punkte auf den Kanten angeben und schon wird eine neue Schnittfläche durch diese drei Punkte eingezeichnet.

8) Benutze den Befehl 'Schnitt - Erzeugen', um eine Schnittfläche, wie sie rechts abgebildet ist, zu erhalten. Bekommst Du immer nur Dreiecke, wenn Du diese Schnittfläche parallel verschiebst ?

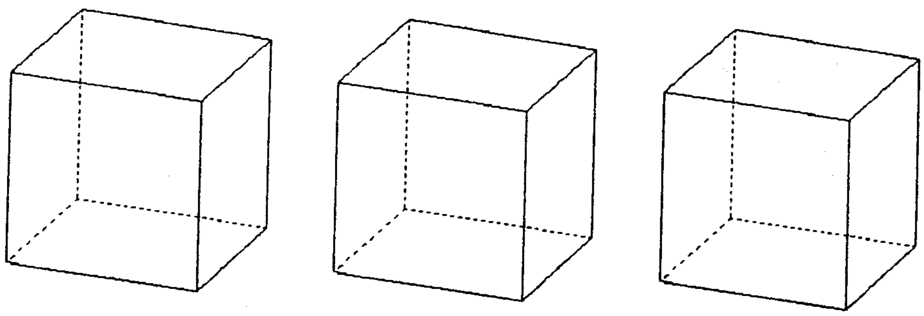


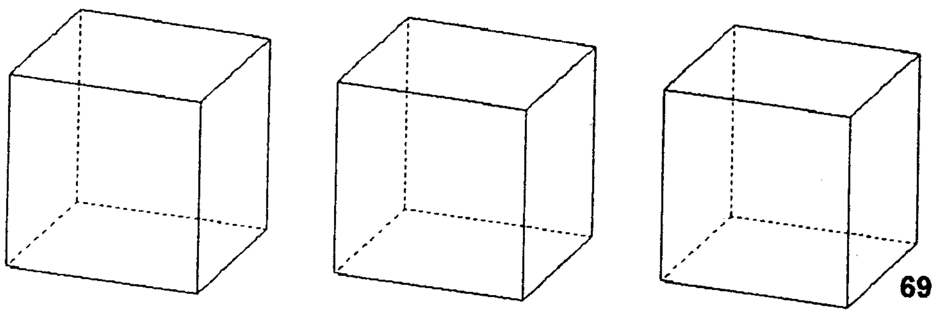
9) Versuche mit 'Schnitt - Bewegen' andere Schnittflächen als nur Dreiecke zu erhalten. Du hast nun schon einige verschiedene Schnittformen entdeckt. Was ist alles möglich ? Ein Fünfeck, ein Sechseck, ein Achteck, ein Parallelogramm ... ?

10) Zeichne in den hier abgebildeten Würfel eine Schnittfläche ein, bei der es sich nicht um ein Dreieck handeln darf.



11) Zeichne verschiedene Schnittformen in die Würfel ein, die Du gefunden hast.





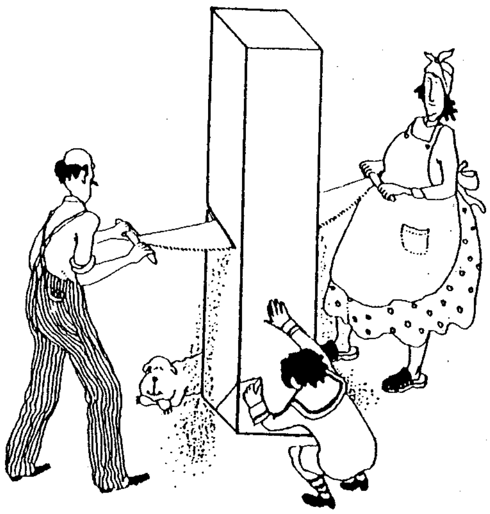


Fig. 2.3.3

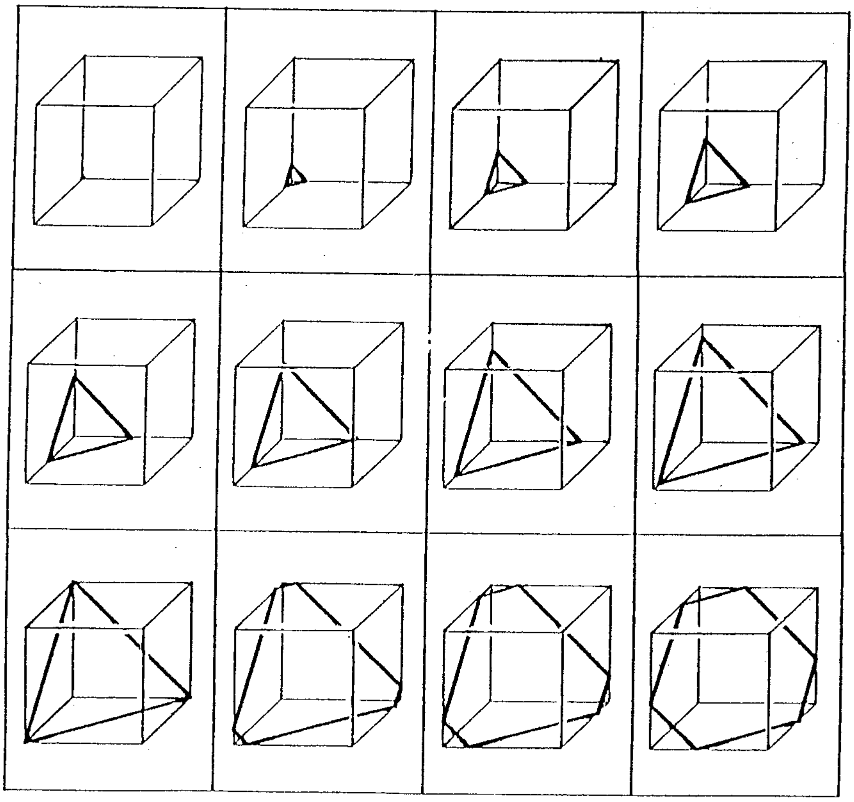


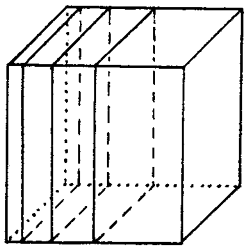
Fig. 2.3.4

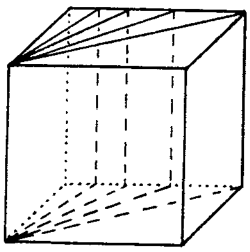
Ebene Schnitte des Würfels

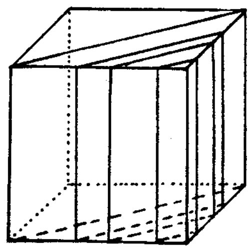
Senkrecht zu einer Seitenfläche

Besondere Schnitte:

- parallel zu einer Seitenfläche (Scheiben-Abschneiden)
- durch eine Kante
- parallel zu einer ... Flächendiagonale (Kanten-Abschneiden)



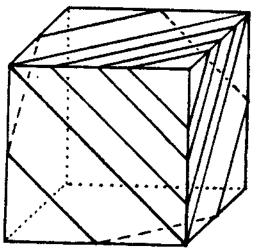




Nicht senkrecht zu einer Seitenfläche

Besondere Schnitte:

- parallel zu einem Dreieck aus Flächendiagonalen (Ecken-Abschneiden)
- gedreht um eine Achse



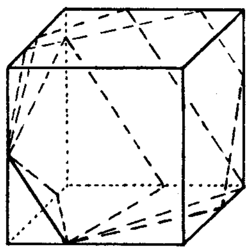


Fig. 2.3.5

Die Schüler erhalten eine Übersicht über das Menü 'Schnitt' mit Erklärungen zusammen mit dem Aufgabenblatt "Schnittflächen" (vgl. S. 68/ 69), das sie nach dem Laden des Körpers WUERFEL1 bearbeiten (Partnerarbeit am Computer).
Die Schüler werden aufgefordert, ihre Ergebnisse auch auszudrucken und abzuspeichern. Die verschiedenen, mit Kommentaren versehenen Ausdrucke der ebenen Schnitte am Würfel sollen in einer Wandzeitung dokumentiert werden. In vorgegebenen Würfelschrägbildern sind die Phasen der Parallelverschiebung eines Schnittes zu protokollieren (ein Ergebnis in Fig. 2.3.4).

Als Hausaufgabe sind in die Schrägbilder der Würfel die Schnitte nach systematischen Gesichtspunkten einzuzeichnen (vgl. Fig. 2.3.5: Arbeitsblatt mit Lösungen).

Einige Beobachtungen: Die zeitaufwendige Besprechung der vielfältigen Schülerergebnisse bringt u.a. zutage, daß einige Schülerinnen Probleme mit der metrischen Interpretation der Schrägbilddarstellung von Schnitten haben. So lesen sie z.B. den Rechteckschnitt in Figur 2.3.6 als (nicht rechteckiges) Parallelogramm.

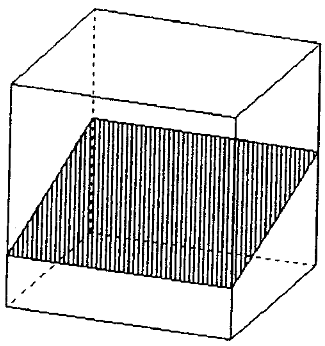


Fig. 2.3.6

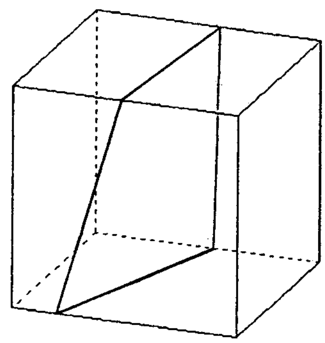


Fig. 2.3.7

Die Benutzung der Option 'Schnitt - Form' und das Abwickeln eines der Schnittkörper kann solche Fehlinterpretationen verbessern helfen. Von einigen Schülern werden viereckige Schnittflächen, wie in Figur 2.3.7, eingezeichnet. Es fällt ihnen anfänglich schwer, diese als nicht eben zu erkennen. Folgendes Argument ist den Schülerinnen und Schülern einsichtig: Eine entsprechende Ebene müßte mit zwei parallelen Würfelseiten immer zwei parallele Schnittlinien haben ...

Die Gleichseitigkeit des maximalen Schnittdreiecks wird richtig begründet. Es wird auch eingesehen, daß es keine rechtwinkligen und keine stumpfwinkligen Dreiecke als Schnittformen am Würfel geben kann.
Von den Schülern werden insgesamt die Viereckformen Quadrat, Raute, Rechteck, Parallelogramm, gleichschenkliges Trapez und Trapez als Schnittflächen erzeugt. Es werden richtige Begründungen dafür gegeben, daß ein echter Drachen, und allgemeiner ein Viereck ohne paralleles Gegenseitenpaar als Schnittform nicht hergestellt werden kann. Auch unregelmäßige Fünfecke und Sechsecke werden als Schnittflächen gefunden; die Schüler erkennen, daß bei den Fünfecken immer 2 x 2 Seiten und bei den Sechsecken immer 2 x 3 Seiten parallel sein müssen usw. Das regelmäßige Sechseck erhalten sie als Zwischenlage beim Parallelverschieben eines regelmäßigen Dreieckschnitts. - Die Begründung für die maximale Anzahl der Seiten bzw. Ecken der Schnittfläche wird richtig angegeben und die entsprechende Aussage verallgemeinert: Ein 'Körper' mit n Seitenflächen kann als Schnittfläche ein Vieleck mit höchstens n Seiten bzw. n Ecken besitzen. Als konvexes Vielflach mit Schnittvielecken von maximaler Eckenanzahl geben die Schüler die n-seitige Pyramide an. (Es erhebt sich folgendes noch ungelöstes (?) Problem: Zu welchen Typen konvexer Polyeder existieren Schnittpolygone mit derselben Anzahl von Seiten wie die Flächenanzahl des Polyeders ?)

Die dritte Doppelstunde ist der freien Erzeugung von Schnittkörpern gewidmet. Zuerst werden Schnittkörper des Würfels durch einen Schnitt hergestellt und dann Schnittkörper von Schnittkörpern usw. (Die Lage der Punkte, die eine Schnittebene bestimmen, bleibt nach Voreinstellung auf Kanten eingeschränkt.)
Lehrer: Legt nach einen Schnitt nach eurer Wahl in den Würfel, laßt den Würfel längs dieses Schnittes zerschneiden, wählt einen der Schnittkörper aus, speichert diesen ab, laßt von diesem ein Netz bilden, druckt dieses aus und faltet es auf.
Die Figur 2.3.8 zeigt eine Schülerlösung mit einer fünfeckigen Schnittfläche. Die iterierte Schnittkörperbildung wird durch Folien folgenden Inhalts angeregt: Vom Würfel zum abgestumpften Würfel und zum Kuboktaeder (Fig. 2.3.9). Vom Würfel zum Pyramidenstumpf und zur Pyramide (Fig. 2.3.10). Vom Würfel zum regelmäßigen Tetraeder (Fig. 2.3.11). Vom Würfel zum achtseitigen Prisma (ohne Abbildung). usw.

Einige Beobachtungen: Einige Jungen produzieren aus dem Würfel z.T. ganz 'wilde' Schnittkörper (vgl. z.B. Fig. 2.3.12 mit Netz) durch wiederholte Schnittkörperbildung, während sich die Mädchen mehr an die Vorlagen zur iterierten Schnittkörperbildung halten.

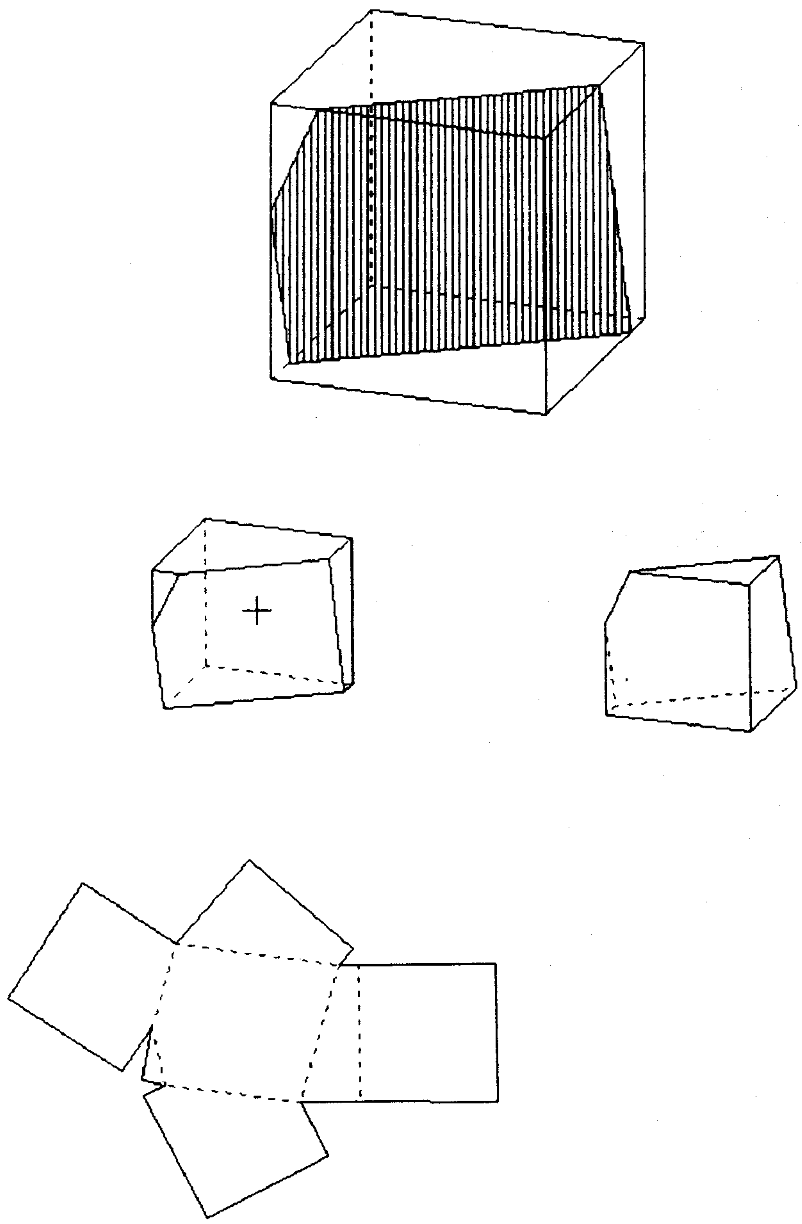


Fig. 2.3.8

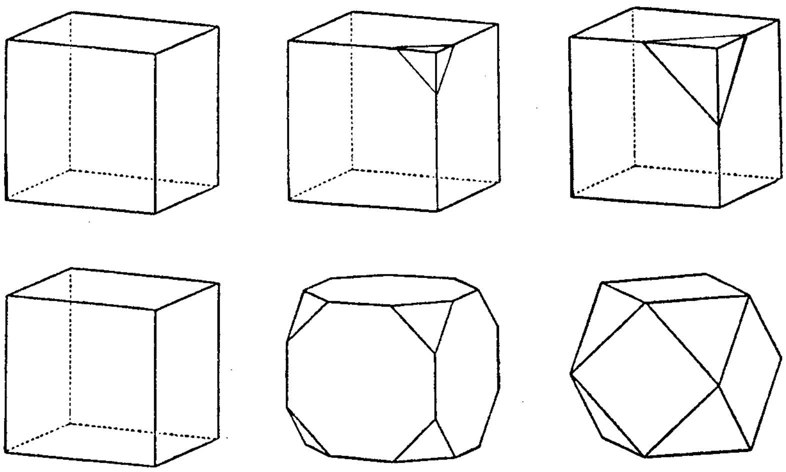


Fig. 2.3.9

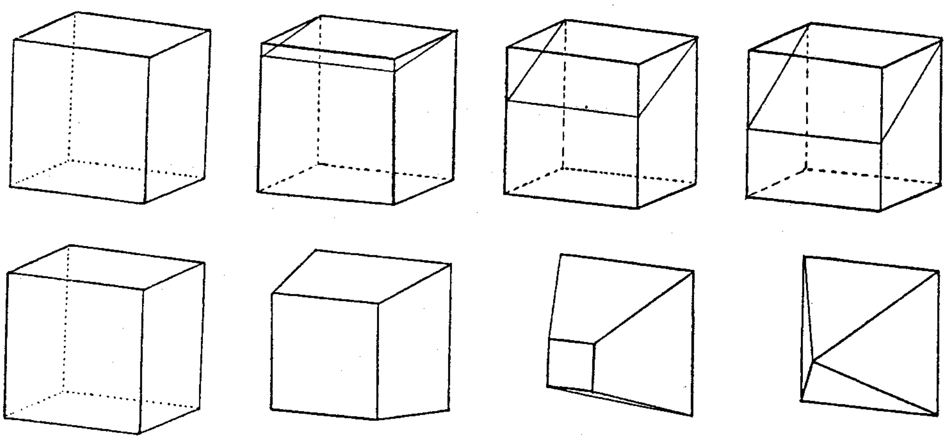


Fig. 2.3.10

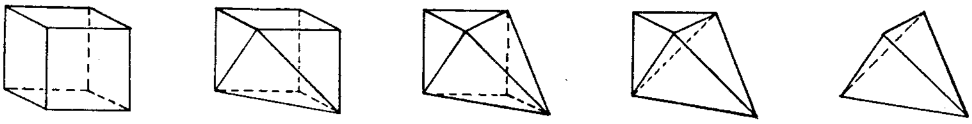


Fig. 2.3.11

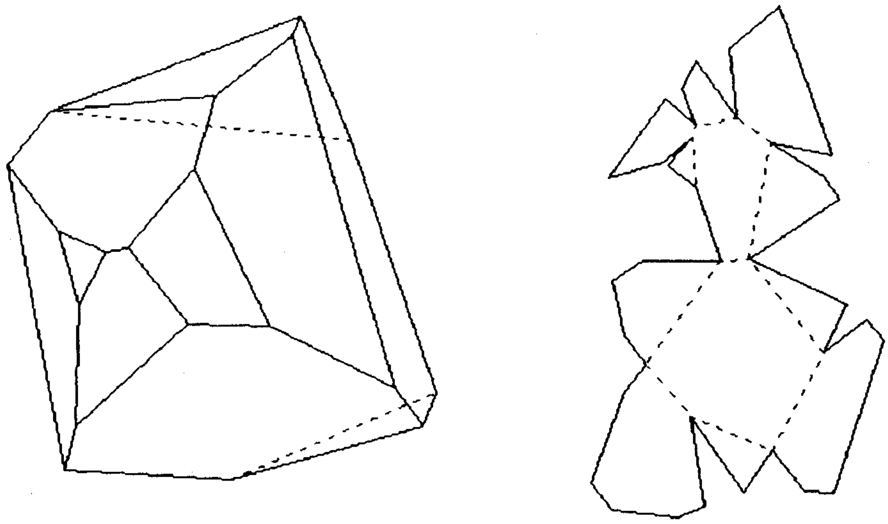


Fig. 2.3.12

2.3.3 Schülermeinungen zur Benutzung von SCHNITTE

Am Ende der 6-stündigen Unterrichtseinheit wurden den Schülern und Schülerinnen einige sehr allgemeine Bewertungsfragen vorgelegt, deren Bearbeitung freiwillig war. Die Schüler und Schülerinnen sollten ihre Antworten begründen.
Wir geben hier nur die aufschlußreichen Antworten auf die erste und zweite Frage wieder, die für sich selbst sprechen.

Frage 1: Wie hat Dir das Computerprogramm SCHNITTE gefallen ?

Antworten der Jungen zu Frage 1:

Es hat mir gut gefallen, weil es Unterricht mit etwas neuem ist (Computer). Doch ich könnte mir vorstellen, daß dieser Unterricht genauso langweilig wird, wie der "Normale", wenn man damit immer arbeiten würde.

Es war schön und interessant, es war mal etwas ganz anderes als normaler Unterricht.

Es hat mir gut gefallen, weil es so vielseitig war.

Sehr gut, weil man viel neues gelernt hat, über das man vorher nichts wußte.

Dieses Computerprogramm hat mir gut gefallen, da es 1. eine Bereicherung des Mathematikunterrichts ist und 2. sehr lehrreich vielleicht im späteren Berufsleben.

Das Computerprogramm "SCHNITTE" gefällt mir sehr gut, weil es der Vorstellung von Körpern hilft.

Gut, denn man kann es verstehen lernen, mit den Würfeln.

Das Programm hat mir gut gefallen, da dadurch das räumliche Vorstellungsvermögen verbessert wird.

Ja, es macht Spaß damit herumzuexperimentieren.

Antworten der Mädchen zu Frage 1:

Gut, weil es interessant war, da viele noch keine Ahnung von solchen Körpern hatten.

Gut, man konnte viele verschiedene Sachen machen, die man zeichnerisch nie hinbekommen hätte !

Also, mir hat das Computerprogramm "SCHNITTE" gut gefallen, 1., hat man mehr Erfahrung bekommen, 2., man kann mit dem Computer besser arbeiten, denn wenn man das alles auf Papier gemacht hätte, dann hätte man die ganze Zeit radieren müssen. Man kommt mit dem Computer besser zurecht.

Das Programm hat mir gut gefallen. Es hat mit dem Computer sehr Spaß gemacht. Die Zusammenarbeit mit einem Partner z.B.

Nicht so gut, weil man nicht so die richtige Hilfe bekommen hat. Der Lehrer kann sich ja leider nicht teilen. Ich würde es auch nicht weiterempfehlen.

Gut. Ich konnte mir vieles besser vorstellen.

Auffällig ist, daß die schöner als die Buben schreibenden Mädchen in ihren Begründungen auch soziale Aspekte anführen: Zusammenarbeit, mangelnde Unterstützung durch den Lehrer, Verhältnis zum Computer.

Frage 2: Bist Du der Meinung, daß sich Dein räumliches Vorstellungsvermögen durch das Arbeiten mit dem Computerprogramm SCHNITTE verändert hat ?

Antworten der Jungen zu Frage 2:

Glaube ich nicht, denn ich hatte davor schon ein gutes räumliches Vorstellungsvermögen.

Auf jeden Fall. Man konnte die Körper, die man sich sonst nur vorstellen mußte, sehen.

Ich glaube nicht sehr groß ...

Ja. Ich kann mir eben einen Körper, den ich nicht in der Hand halte, besser vorstellen.

Ja, mein Vorstellungsvermögen hat sich gebessert.

Ja, ein bißchen.

Ja, es hat sich verbessert.

Nicht viel.

Antworten der Mädchen zu Frage 2:

Um ehrlich zu sein, da mein räumliches Vorstellungsvermögen nie besonders gut war, habe ich nicht so viel Spaß daran gehabt.

Das räumliche Vorstellungsvermögen hat sich schon verändert und gebessert.

Ja, es ging auf jeden Fall besser als sonst.

Ja, ich kann mir's besser vorstellen.

Ja, ich kann er mir jetzt besser vorstellen.

Auf jeden Fall ! Man hat sich die Körper und Flächen ganz anders vorstellen müssen als im Alltag.

Ich glaube schon.

Es fällt auf, daß die Mädchen, mit Ausnahme eines, bei der Selbsteinschätzung ihres Raumvorstellungsvermögens glauben, eine Verbesserung feststellen zu können, was bei den Jungen nicht der Fall ist. - Es erhebt sich in diesem Zusammenhang folgende

allgemeine Forschungsfrage:

> Kann durch die Benutzung 3-dimensionaler geometriehaltiger Grafiksoftware das Raumvorstellungsvermögen verbessert werden ?

Operationalisiertere Fragen:

- Welche Art von Raumvorstellung wird möglicherweise verbessert ?
- Wie hängt eine mögliche Verbesserung der Raumvorstellung von der Dauer der Software-Nutzung ab ?
- Ist eine mögliche Verbesserung der Raumvorstellung graduell vom Alter der Probanden abhängig ?
- Hängt eine mögliche Verbesserung von der Software-Art (z.B. Toy, Tutor, Tool, Tutee) ab ?
- Gibt es geschlechtsspezifische Unterschiede in den möglichen Trainingseffekten ?
- ...

Die Frage 3: Hat sich durch Deine Arbeit mit dem Programm SCHNITTE Dein Verhältnis zum Computer verändert ? beantworteten etwas mehr als die Hälfte der Schüler und Schülerinnen positiv; ca. 10% stellten eine negative Veränderung fest, die restlichen bemerkten keine Veränderung.

2.3.4 Protokoll eines Problemlösungsprozesses (Interview)

Um in Erfahrung zu bringen, wie ein Schüler (S) eine Schnittaufgabe am Würfel mit Unterstützung des Werkzeugs SCHNITTE bei lenkenden und mäeutischen Interventionen des Autors (L) löst, wurde eine 45-minütige Sitzung am Computer protokolliert.
Vor dieser Sitzung erhielt der Schüler Siegfried eine 20-minütige Einführung in die Benutzung der Optionen des Menüs 'Schnitt' am Beispiel eines Tetraeders. - Der Neuntklässler Siegfried ist 15 Jahre alt und ein guter Mathematikschüler, der Mathematik, insbesondere Geometrie, mag. Siegfried wurde angehalten laut zu denken. (Was sich leicht fordern läßt, aber schwer auszuführen, wenn man es nicht gewöhnt ist !)
Wir geben im folgenden wichtige Phasen des Lösungsprozesses wieder und kommentieren diese.

S: Ein Würfel wird mit einer Ebene geschnitten, welche Formen von Schnittflächen können dabei entstehen. Finde alle Formen heraus !

(Das Programm SCHNITTE ist geladen und auf dem Grafikfeld ist ein Würfel in Parallelprojektion zu sehen; die Aufgabe wird von einem Blatt abgelesen.)

L: Siegfried, Du hast kennengelernt, wie mit dem Menü 'Schnitt' eine dreiseitige Pyramide bearbeitet werden kann. Jetzt sollst Du das Werkzeug benutzen, um diese Aufgabe zu lösen. - Hast Du noch Fragen zur Aufgabe ?

S: Nein, denk' nicht.

L: Kannst Du die Aufgabe mit eigenen Worten wiedergeben ? ...

S: Ja, also ich soll jetzt ein Würfel wird ... wird also geschnitten, und ich soll jetzt herausfinden, was für Flächen man jetzt da schneiden kann.

L: Gut, also ...

S: Also, Befehl 'Erzeugen' oder wie sagt man dazu ? ...
Ich geb' jetzt drei Punkt an in dem Würfel, das gibt dann die Schnittfläche.

(S wählt die Option 'Erzeugen' und positioniert richtig drei Punkte auf Würfelkanten.)

OK, Jetzt kann ich die Fläche auch bewegen, also im Moment haben wir'n Rechteck, Fünfeck.

(S wählt die Option 'Bewegen' und läßt den Schnitt drehen.)

Na, ich versuch' jetzt da verschiedene Formen herauszubringen; ich möcht jetzt auch auf ein Sechseck kommen.

L: Wieso auf ein Sechseck ?

S: Na, die Frage lautet 'verschiedene Formen', Fünfeck hab' ich gehabt, Viereck, im Moment hab' ich ... sechs Ecken.

(S bewegt die Schnittfläche.)

L: Ah ! Ja, toll ! Kann es denn mehr als sechs Ecken geben ?

S: Mehr ? Auf allen Ebenen jetzt irgendwie. Tja - Ich versuch' jetzt auf sieben Ecken zu kommen.

(S bewegt die Schnittfläche erneut, indem er diese dreht und verschiebt.)

L: Wieviel Ecken hat das ?

S: Fünf Ecken, noch drei Ecken, dann könnt' ich auf acht Ecken kommen.

L: Auf acht Ecken kommen ?

S: Geht das nicht ? Eins, zwo, ... Na wart' mal, das geht irgendwie nicht, eins, zwo, drei, vier ...

L: Womit werden denn die Schnittlinien gebildet ?

S: Schnittlinien ?

L: Das sind die Linien, in der die Körperflächen von der Ebene geschnitten werden.

S: Also, die werden in den Flächen gebrochen.

L: Du meinst das Richtige ! ...

S: Und wieviel Flächen haben wir ? Eins, zwo ... , sechs, also dann sind sechs Ecken das höchste.

L: Aha ! Das ist richtig. Sag's nochmal ausführlicher.

S: Ja, ein Würfel hat nur sechs Flächen, und da die Schnittlinien auf den Flächen gebrochen werden, kann's höchstens sechs verschiedene Schnittbrechungen geben.
L: Angenommen, wir hätten jetzt einen Körper mit sieben Seitenflächen. Was wäre dann die maximale Anzahl der Ecken an der Schnittfläche ?
S: Na sieben ! Ein Siebeneck !
L: Ja ! Kann man das vielleicht allgemeiner sagen ?
S: Ja, soviel Flächen wie der Körper hat, soviel Kanten oder Ecken gibt's dann höchstmöglich !
L: Höchstmöglich, ja, das ist richtig.
Ja gut, bis jetzt haben wir gesehen, daß es 3-Ecke, 4-Ecke, 5-Ecke und 6-Ecke gibt. Was sagt denn die Aufgabe ?
S: Finde bitte alle Formen heraus.
L: Gibt's da noch besondere Formen ? Was gibt's denn für besondere Formen, wenn ich die 4-Ecke betrachte ?
S: Also, ein Quadrat, Rechteck.
L: Probier mal !
S: Ich probier' jetzt mal ein Quadrat hinzubringen.
(S dreht die Schnittfläche in eine zur Vorderfläche des Würfels parallele Lage.)
L: Ja, gut ! Also wann entsteht ein Quadrat ? - Könntest Du das beschreiben ?
S: Hm, ja, wenn die, also, wenn die Schnittfläche parallel zu den Bruchflächen sind.
L: Gibt's denn da noch eine andere Möglichkeit, bei der vielleicht auch noch'n Quadrat entstehen könnte ?
S: Ich könnte es in die ebene Form bringen.
(S dreht die Schnittfläche in eine zur Standfläche des Würfels parallele Lage.)
L: Ist das was Neues ?
S: Eigentlich nicht.
L: Gut, ein Quadrat. - Was gibt's denn noch ?
S: Also auf Vierecke bezogen ? - Na'n Trapez.
L: Also, das versuchen wir.
S: Hm, wie leg' ich das hin ?
(S löscht den alten Schnitt und positioniert zur neuen Schnittbildung zwei Punkte auf benachbarten Kanten der Deckfläche und einen Punkt auf einer Grundkante.)
L: Ist das ein Trapez ? - Ja, was macht denn ein Trapez aus ?
S: Ja, daß zwei Kanten parallel zueinander sind, also oben und unten, und die Seitenflächen sind schräg.
L: Ist das ein Trapez ?
S: Das dürfte eins sein.
L: Ja, warum dürfte ? Ist es eins oder ist es keins ?
S: Es ist eins.
L: Ja, und warum ist es eins ? Kannst Du das begründen ?
S: Ja, also Grundseite und Oberseite sind parallel zueinander und die Seitenflächen sind mit denen verbunden.
L: Ja, also warum sind die beiden Seiten parallel ?

S: Hm, das ist eine gute Frage !
L: Hängt das mit der Bauart des Körpers zusammen ?
S: Denk' schon. Also die Ober- und Unterseite des Würfels sind parallel zueinander, also sind eben die Linien in denen drinnen auch parallel.
L: Gibt's da 'ne Aussage dazu ? Ist das jetzt nur auf Würfelflächen beschränkt ?
S: Also, wenn Flächen zueinander parallel sind, sind eben auch die Schnittflächen zueinander parallel.
L: Ja, kannst Du das vielleicht noch etwas deutlicher sagen, vielleicht in einem 'Wenn-Dann-Satz' ?
S: Wenn die Flächen eines Körpers parallel zueinander sind, sind die Schnittlinien auch zueinander parallel.
L: Gut ! Jetzt haben wir ein Trapez. Was gibt's denn noch für andere Viereckformen ?
S: Hm, ... Rechteck haben wir schon, ...
L: Also, Rechteck, Trapez und das Quadrat haben wir.
S: Jetzt fehlt noch, ... ach, äh der Drachen ! ... Das ist jetzt schon schwieriger. Hm ... Ich muß mir jetzt überlegen, wie ich den jetzt hinleg'. So vielleicht. - Jetzt hab' ich ihn zwar in der Fläche aber nicht im Körper.
(S löscht den alten Schnitt und positioniert drei Punkte, die wieder einen trapezförmigen Schnitt ergeben.)
L: Was ist das wieder für eine Form ?
S: Das ist wieder ein Trapez.
L: Die Frage ist, ob wir überhaupt einen Drachen erzeugen können.
S: Da bin ich mir nicht sicher ! Nein !

Kommentar: Siegfried ist noch ein instrumenteller Novize, der sich zu Beginn des ca. 15-minütigen Interviews auf die Optionen 'Erzeugen', 'Bewegen' und 'Löschen' beschränkt. Er kommt nicht auf die Idee, die Option 'Form' zu benutzen, um sich die wahre Form der Schnitte zeigen zu lassen. Oft beherrscht er nicht die geometrieinterne Ausdrucksweise, meint aber das Richtige. Mit den entsprechenden Hilfen und Impulsen findet er zu richtigen Argumentationen und geht so von der Beschreibung visueller Phänomene zur geometrischen Theoriebildung über.
Gegenstand des hier nicht dokumentierten Mittelteils des Interviews ist die Erarbeitung der Viereckformen Parallelogramm, Raute und die Analyse von Sechseck- und Fünfeckformen.
Wir geben noch den ca. 10-minütigen Schluß des Interviews wieder, der sich mit der Erarbeitung der Dreiecksformen befaßt.

L: Bis jetzt haben wir die Dreiecke außer acht gelassen. Was für besondere Dreiecksformen gibt's denn ?
S: Erst mal das rechtwinklige Dreieck.
L: Aha, probier mal !
S: OK. - Mal schauen, wo wir ein Dreieck hinbringen.
(S löscht alten Schnitt und beginnt unter 'Erzeugen' mit der Eingabe von Punkten.)
Geht das überhaupt, daß ich 'nen Würfel in drei Punkten schneide ?

L: Ja sicher. Wodurch liegt ein Schnitt ...
S: Ach so, ja OK, jetzt ist es klar, OK.
(S beendet die Bildung der Schnittfläche.)
L: OK! Schauen wir uns die Form an.
Rechter Winkel zu sehen ?
(S wählt die Option "Form", um die wahre Gestalt der Schnittfläche zu betrachten.)
S: Nee, also wieder zurück und bewegen.
(S wählt wieder 'Bewegen' und verändert die Lage des Schnittes.)
L: Na, die Frage ist, wo tritt denn da ein rechter Winkel auf. Wo soll er denn hier auftreten ?
S: Hier.
(S deutet auf eine Dreiecksecke auf einer vertikalen Kante.)
L: Da ? Wo tritt denn da ein rechter Winkel auf ? Wir stellen uns diesen Punkt mal bewegt vor.
S: Uns bewegt vorstellen ?
L: Bist Du also der Meinung, daß da ein rechter Winkel so möglich ist ?
S: Sicher bin ich mir jetzt nicht mehr.
L: Warum ?
S: ...
L: Ja, denn diese beiden Schnittlinien die bilden einen rechten Winkel, wenn sie übergehen in die Kanten.- Aber was gibt's denn noch für besondere Dreiecke?
S: Ja, das gleichseitige Dreieck.
L: Aha, also probieren wir das mal.
S: Das ist jetzt aber schwierig.
L: Ja, wir könnten jetzt hergehen und vielleicht 'nen neuen Schnitt legen.
S: OK.
L: Können wir vielleicht mal ein größtmögliches Dreieck herausschneiden ?
S: Größtmögliches ? Ja, das geht.
(S legt einen Dreiecksschnitt durch drei diagonal liegende Würfelecken.)
L: Toll, das ist gut.
S: Ist das das größtmögliche ?
L: Ja, - Und warum ist denn das ein gleichseitiges ?
S: Ja, also es geht jeweils von Punkt zu Punkt, also äh, es schneidet jeweils die Kanten von, also jeweils das Quadrat vom ...
L: Ja, wie nennt man denn diese Linien im Quadrat hier ?
S: Da grüble ich gerade darüber.
L: Das sind die Diagonalen.
S: Ah, Mensch warum fällt's mir nicht ein.
L: Ja, und warum ist es dann gleichseitig, dieses Dreieck ?
S: Ja weil jede, jede Seite vom Dreieck ist eine Diagonale, äh, vom Quadrat und die sind ja jeweils gleich lang.
L: Ah, gut. Könnte man da jetzt noch andere gleichseitige Dreiecke herstellen ?
S: Ja, unter Umständen schon.
L: Was müßtest Du denn machen ?

S: Einfach, das Dreieck da rüber ziehen.
L: Ja, also verschieben ?
S: Ja, genau, mit der Vorwärtstaste.
L: Das können wir uns auch anschauen mit 'Form'.
(S führt 'Form' aus.)
Gibt's noch andere Dreiecksformen ? Rechtwinklige und gleichseitige haben wir schon getestet.
S: Die, äh, gleichschenkligen.
L: Ja genau, die gleichschenkligen. Was müßtest Du denn da machen ?
S: Zum Beispiel mit der Kante, obere Kante, das kann man jetzt bewegen.
(S verändert den gleichseitigen Dreiecksschnitt durch Drehen in einen nicht gleichschenkligen.)
L: Ja !
S: Jetzt auf die obere Kante hoch.
(S korrigiert den Schnitt hin zu einem echt gleichschenkligen.)
L: Ja ! Aha !
S: Jetzt schau'n wir mal in 'Form'.
(S wählt 'Form' und schaut sich die wahre Gestalt des gleichschenkligen Dreiecks an.)

Kommentar: Siegfried kann die Grenzlage zweier Dreiecksschenkel als zueinander rechtwinklig stehende Körperkanten nicht einsehen. So findet er nicht zu einer Argumentation für die Spitzwinkligkeit aller Dreiecksschnitte am Würfel. Erstaunlicherweise konstruiert er intuitiv den maximalen Dreiecksschnitt und die richtige Begründung für seine Gleichseitigkeit. Er sieht auch sofort, daß das parallele Verschieben dieses Schnitts die Gleichseitigkeit erhält. Die Erzeugung eines echt gleichschenkligen Dreiecksschnitts erfolgt über einen nicht gleichschenkligen Schnitt. - Am Ende der 45-minütigen Sitzung läßt die Konzentration von Siegfried etwas nach.

Wir schließen diesen Abschnitt mit einer noch unbeantworteten Medienvergleichsfrage:
Wie wirkt sich die alternative Benutzung
- der reinen Vorstellung ohne zeichnerische Hilfen
- selbst zu produzierender Würfelbilder sowie selbst einzuzeichnender Schnitte
- vorgegebener Würfelschrägbilder zum Einzeichnen von Schnitten
- eines Computerwerkzeugs wie SCHNITTE bei vorgegebener Würfeldatei

auf den Lösungsprozeß der oben gestellten Aufgabe über die Formen von Würfelschnitten aus ?

2.4 Mit dem Programm SCHNITTE realisierbare Projekte

Im folgenden skizzieren wir fünf Projekte, die außerhalb des Pflichunterrichts, z.B. in Arbeitsgemeinschaften, durchgeführt werden können. (Es ist durchaus denkbar, daß in einem künftigen, stärker raumgeometrisch orientierten Lehrplan für den computerunterstützten Geometrieunterricht in der Sekundarstufe I solche Themen aufgenommen werden.)
Es ist vorausgesetzt, daß die Schüler die wesentlichen Optionen des Systems SCHNITTE beherrschen. Projekterweiterungen durch Berechnungen an Schnittkörpern sind möglich.

2.4.1 Schnittkörper des Würfels

Der Schüler/die Schülerin soll Schnittkörper des Würfels nach vorgegebenen Schrägbildern (vgl. die Körperschrägbilder auf dem entsprechenden Aufgabenblatt) herstellen und selbst weitere solche Körper nach eigener Phantasie erzeugen. Zur Visualisierung der Körper sollen die Optionen des Menüs 'Ansicht' verwendet werden. Um Flächenmodelle der Körper zu gewinnen, sind Netze der Körper auszudrucken, auszuschneiden und aufzufalten. - Die 'schönsten' selbst konstruierten Schnittkörper sollen in einer Wandzeitung dokumentiert werden; die Figur 2.4.1 zeigt ein Beispiel für einen solchen 'Phantasiekörper'. (Projekt ab Klasse 5/6, Zeitaufwand: 2-4 Stunden)

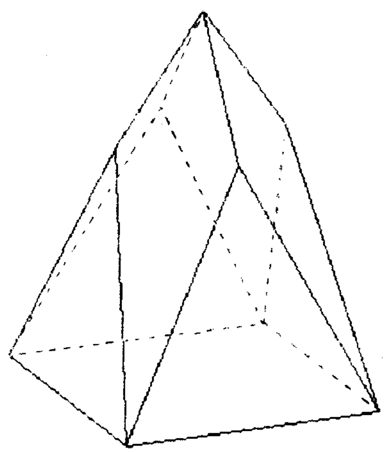
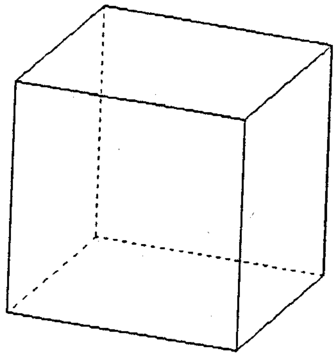


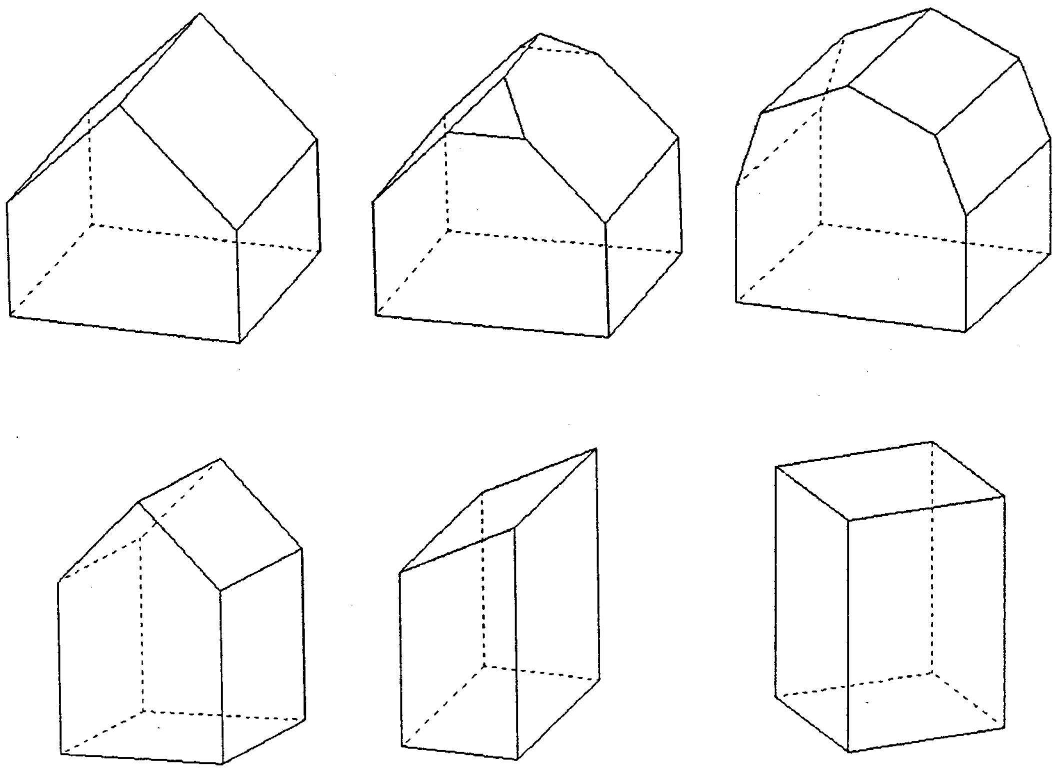
Fig. 2.4.1

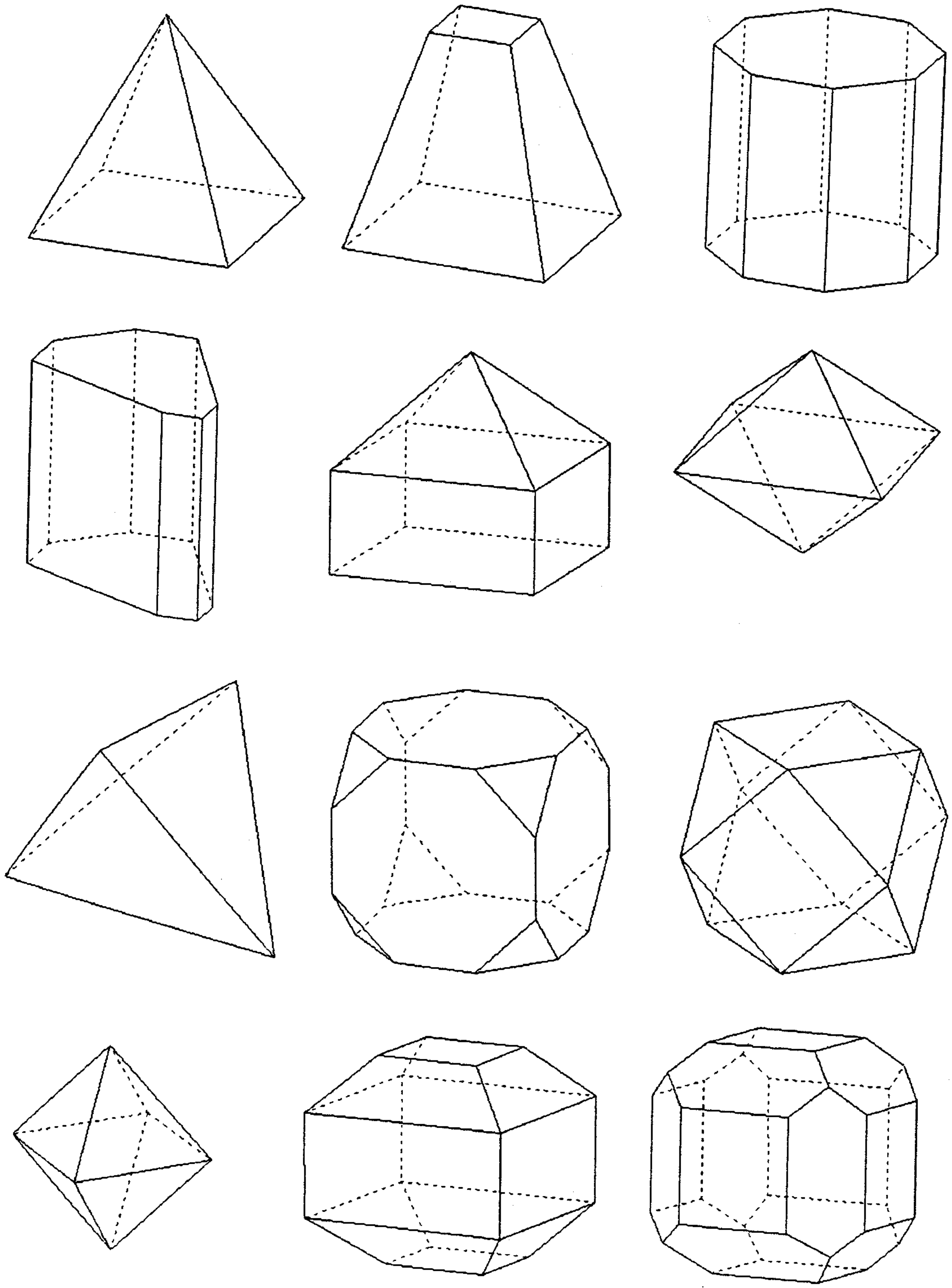
Aufgabenblatt zum Projekt 'Schnittkörper des Würfels'

Schneide aus einem Würfel die abgebildeten Körper heraus, und erzeuge weitere Schnittkörper nach der eigenen Phantasie. Gib den Schnittkörpern Namen. (Optionen: 'Schnitt - Erzeugen', 'Schnitt - Ausführen')

Verschaffe Dir eine Vorstellung von diesen Körpern mit Hilfe der Optionen des Menüs 'Ansicht'. Drucke auch Netze dieser Körper aus, schneide sie aus und falte sie auf.







2.4.2 Würfelhalbierungen

Aufgabe der Schüler ist es, den Würfel erst beliebig zu halbieren und dann nach bestimmten Kriterien, z.B. mit Schnitten durch Kantenmitten (vgl. auch Abschnitt 1.4). Es sind jeweils Netze der halben Würfel auszudrucken und dann aufzufalten.
(Projekt ab Klasse 5/6, Zeitaufwand: ca. 2 Stunden)
Zwei Ergebnisse spezieller Halbierungen sind in den Figuren 2.4.2 a und 2.4.2 b zu sehen.

2.4.3 Würfelpuzzle

Durch mehr oder weniger systematische Zerlegungen des Würfels erhält man einen Bausatz; aus dessen Teilen der Würfel wieder zusammenzubauen ist (Projekt ab Klasse 7, Zeitaufwand: ca. 4 Stunden).
Ein Beispiel: Wir gehen von einem 'halben Würfel' aus, der durch Kantenmittenschnitt erzeugt wurde (vgl. Fig. 2.4.3), und schneiden durch einen weiteren Schnitt durch Kantenmitten einen keilförmigen Siebenflächner ab (Fig. 2.4.4). Die beiden Teilkörper werden mittig zerschnitten, wie in Figur 2.4.5 und in Figur 2.4.6 zu sehen. Insgesamt erhält man so einen Bausatz aus den zwei Teilkörpern (Fig. 2.4.4), zwei einander ebenensymmetrischen Teilkörpern (Fig. 2.4.5) und zwei einander dreh- bzw. ebensymmetrischen Teilkörpern (Fig. 2.4.6). Die Figur 2.4.7 zeigt einen Ausschneidebogen mit Netzen für die sechs Teilkörper. Das Ausschneiden, Auffalten und Zusammenkleben (mit Tesafilm) liefert ein Würfelpuzzle.

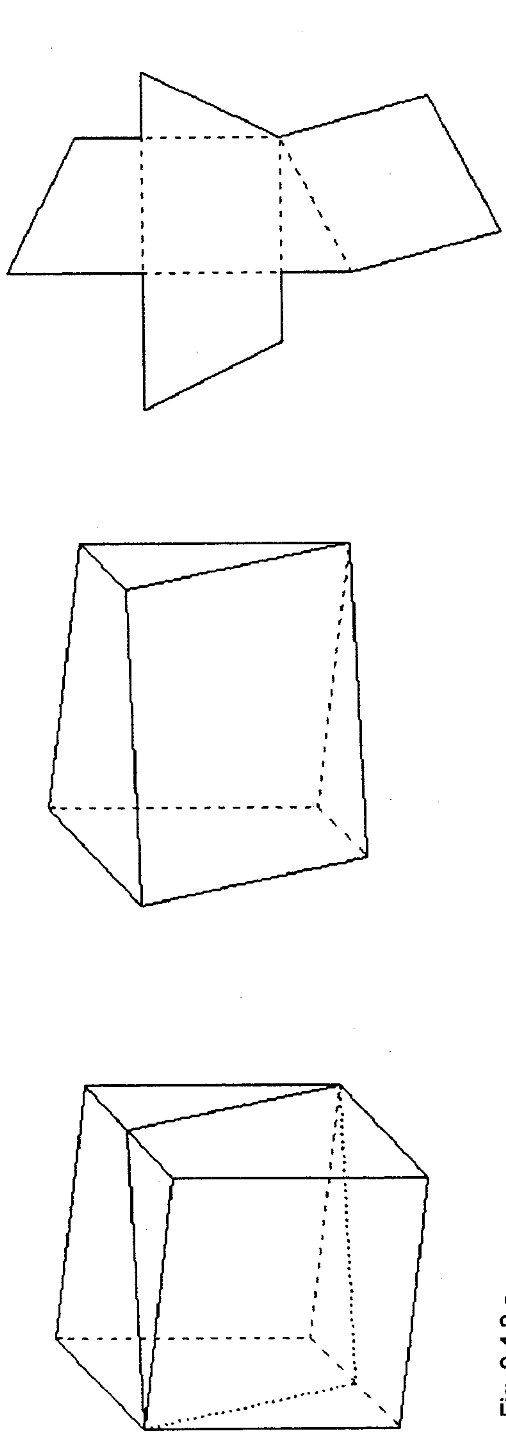


Fig. 2.4.2 a

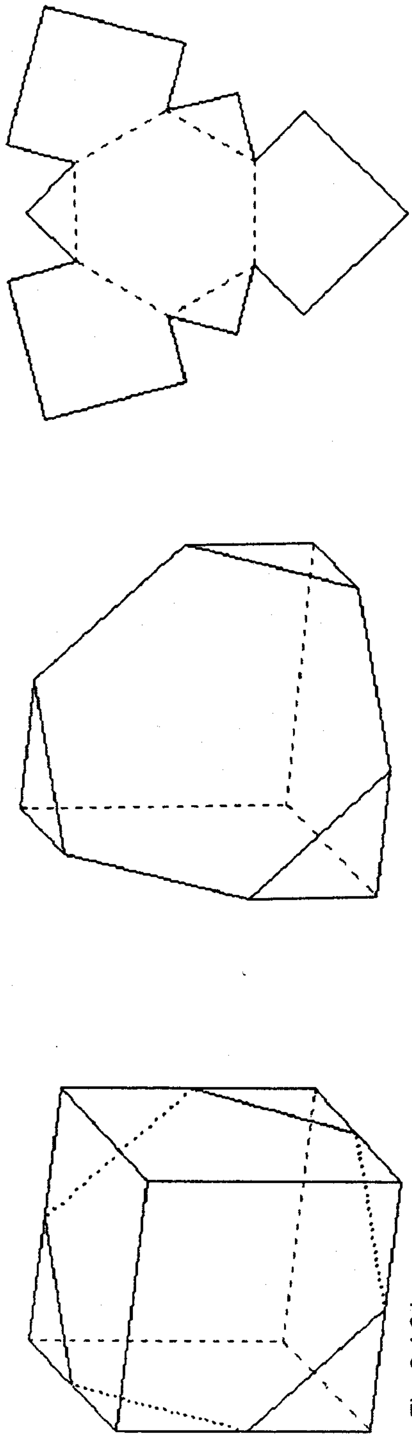


Fig. 2.4.2 b

Aufgabenblatt zum Projekt 'Würfelhalbierungen'

1) Lege Schnitte so in des Würfel, daß dieser halbiert wird und die Schnittfläche die Form
   - eines Quadrats
   - eines größtmöglichen Rechtecks
   - einer größtmöglichen Raute
   - eines regelmäßigen Sechsecks

   hat. Speichere den Würfel mit den jeweiligen Schnittlinien ab. (Optionen: 'Körper - Laden', Datei 'Würfel', 'Schnitt - Erzeugen' mit exakter Lage von Kantenmittelpunkten, 'Schnitt - Form' (auch die Angabe der Volumenmaßzahl), 'Körper - Speichem')

2) Kannst Du noch andere würfelhalbierende Schnitte finden ? (Optionen wie bei Aufgabe 1, 'Schnitt - Schar - Drehen', 'Schnitt - Ausführen', Volumenmaßzahl in 'Schnitt - Form' verwenden.

3) Prüfe folgende Aussage nach: Jeder den Würfel halbierende Schnitt halbiert auch seine Oberfläche.

4) Lasse Netze der Würfel mit den Schnittformen aus Aufgabe 1 bilden und ausdrucken. Schneide die Würfelnetze aus, und falte sie zu Flächenmodellen auf. (Option: 'Ansicht - Körpernetz')

5) Lasse die Schnitte aus Aufgabe 1 ausführen. Speichere die Schnittkörper ab. Erzeuge die Netze der Schnittkörper, drucke diese aus; schneide aus und falte zu Körpermodellen auf. (Optionen: 'Schnitt - Ausführen', 'Ansicht - Körpernetz', 'Körper - Speichern')

6) Berechne aus der Kantenlänge a des Würfels die Größe der jeweiligen Schnittfläche aus Aufgabe 1 - Aufgabe für Klasse 9/10. Prüfe Deine Ergebnisse mit den in 'Schnitt - Form' gegebenen Flächenmaßzahlen etwa für $a = 4$ nach.

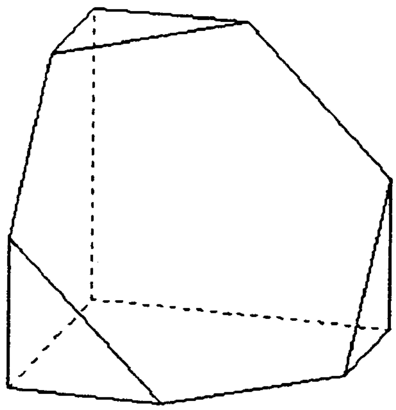


Fig. 2.4.3

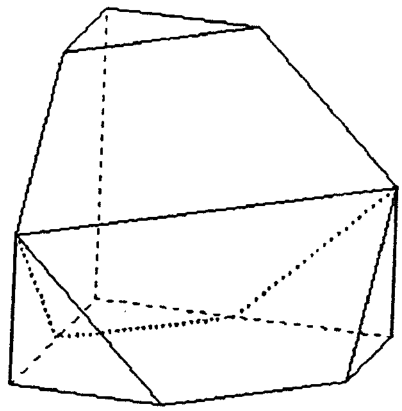


Fig. 2.4.4

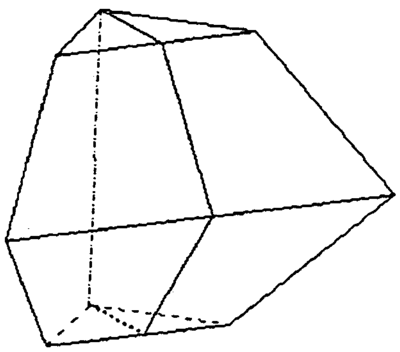


Fig. 2.4.5

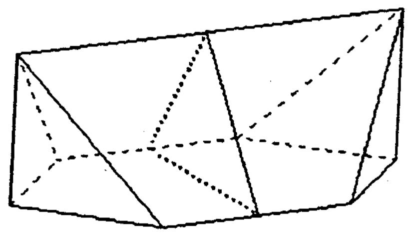


Fig. 2.4.6

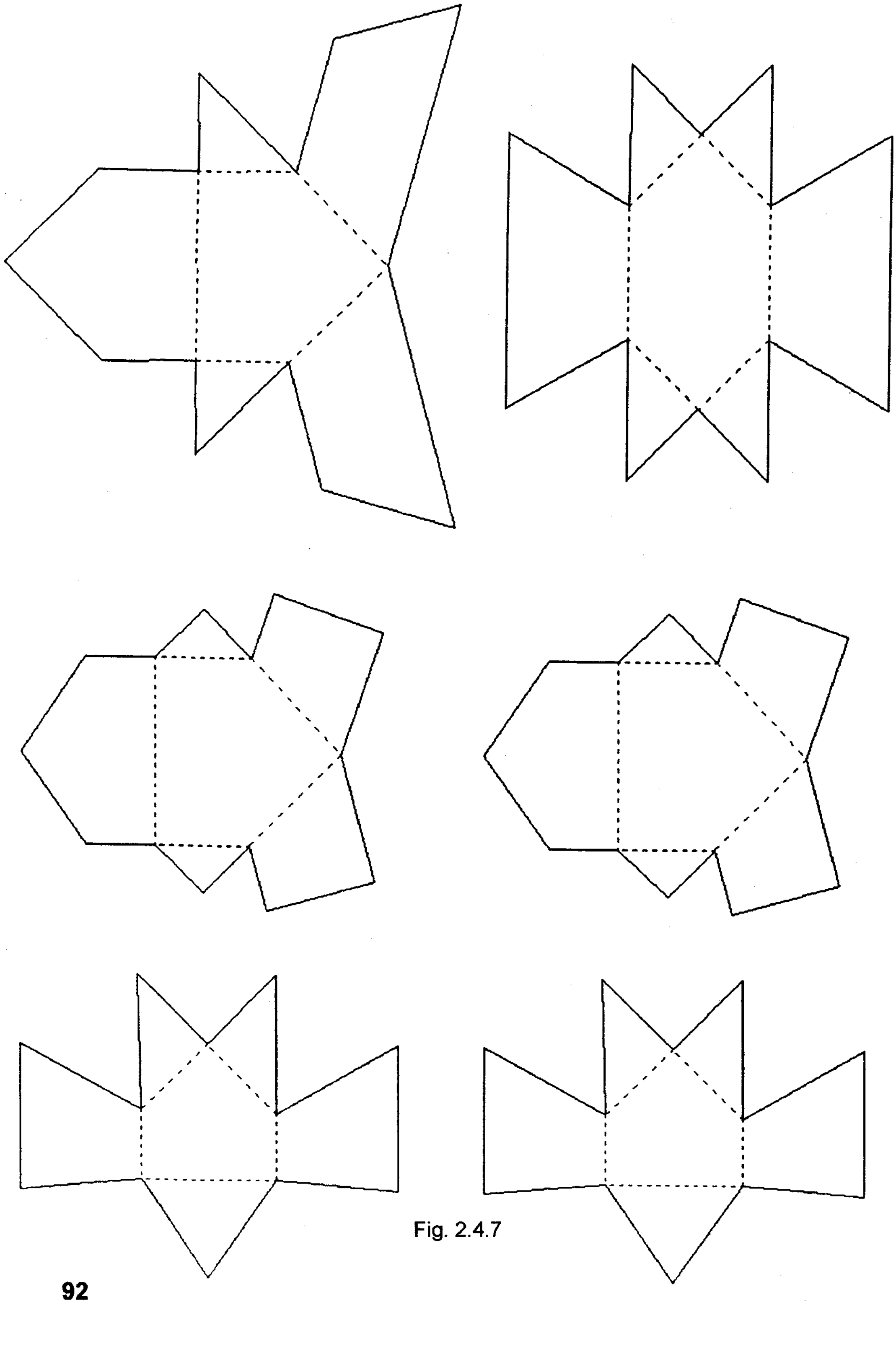


Fig. 2.4.7

Aufgabenblatt zum Projekt 'Würfelpuzzles'

Was ist ein Puzzle ?

Einzelteile sind (nach bestimmten Regeln) zu einem Ganzen zusammenzusetzen. Was ist hier ein Ganzes ? - Ein Körper, z.B. ein Würfel, ein Tetraeder, eine quadratische Pyramide, ein Quader. Wie erhalten wir die Einzelteile ? - Dazu zerschneiden wir ein Körpermodell in Teile, aus denen dann der Körper wieder zusammengebaut werden kann. Auf dem Bildschirm können wir das Zerlegen eines Körpers mit dem Werkzeug SCHNITTE auf recht beliebige oder auf regelhafte Weise durchführen - ohne Angst vor einem Verschnitt ! Allerdings haben unsere Teile keine einspringenden Ecken; sie sind immer konvex, und sie sind immer ebenflächig begrenzt.
Körperpuzzles können aus mehr oder weniger Teilen bestehen. Die Teilkörper können 'unregelmäßig' oder auch 'schön symmetrisch' sein.

1) Zerlege einen Würfel in vier Teilkörper gleicher Form, die aber keine Würfel sein sollen.

2) Zerlege einen Würfel in fünf unregelmäßige Teilkörper.

3) Zerlege einen Würfel in sechs symmetrische Teilkörper.

4) Zerlege ein Tetraeder in zwei gleichförmige Teile, die keine Pyramiden sind.

5) Lade einen Körper Deiner Wahl und zerlege diesen nach Deiner Phantasie. Alle Optionen der Menüs 'Schnitte' und 'Ansicht' können verwendet werden.

   Die Netze der Teilkörper sind auszudrucken, auszuschneiden, zu Flächenmodellen aufzufalten und zusammenzukleben. Dann erst kann das Puzzle ausprobiert werden. Im übrigen: Verfasse Ausschneidebögen für Deine Puzzles.

2.4.4 Die Deltoeder und ihre gleichkantigen Teile

Die Deltoeder - das sind die konvexen Polyeder, deren Oberflächen aus gleichseitigen Dreiecken gebildet werden - sind den Schülern in einer Datei von Basiskörpern vorgegeben (vgl. Figuren 2.4.8 - 2.4.15). Aufgabe ist es, herauszufinden, ob die Deltoeder in gleichkantige Teilkörper zerlegt werden können und wenn ja, wie ? Die Teilkörper sind zu beschreiben und evtl. Flächenmodelle über Netzausdrucke anzufertigen. - Eine Gesamtbehandlung der Deltoeder ist in Schumann (1989) ausgeführt - dort wird u.a. geklärt, warum es kein 18-flächiges Deltoeder geben kann (Projekt ab Klasse 8, Zeitaufwand: 2 - 4 Stunden).
Die dreiseitige Doppelpyramide (Fig. 2.4.9) ist zerlegbar in zwei reguläre Tetraeder (Fig. 2.4.8); das reguläre Oktaeder (Fig. 2.4.10) - dargestellt als 6-seitiges Antiprisma ist zerlegbar in zwei gleichkantige quadratische Pyramiden; die 5-seitige Doppelpyramide (Fig. 2.4.11) ist zerlegbar in zwei gleichkantige 5-seitige Pyramiden; das 12-flächige Deltoeder (Fig. 2.4.12 das man sich aus einer 5-seitigen Doppelpyramide durch Einschub eines 'Doppeldreiecks' erzeugt vorstellen kann) ist nicht in gleichkantige Teilkörper zerlegbar; das 14-flächige Deltoeder (Fig. 2.4.13) kann in ein gleichkantiges dreiseitiges Prisma und in vier gleichkantige quadratische Pyramiden zerlegt werden; das 16-flächige Deltoeder (Fig. 2.4.14) ist in ein gleichkantiges 8-seitiges Antiprisma und in zwei gleichkantige quadratische Pyramiden zerlegbar und letztlich kann das reguläre Ikosaeder (Fig. 2.4.15) in ein gleichkantiges 10-seitiges Antiprisma und in zwei gleichkantige 5-seitige Pyramiden zerschnitten werden.
Die 5-seitige Doppelpyramide läßt sich längs ihrer Höhe in fünf Tetraeder zerschneiden, die nahezu regelmäßig sind (Fig. 2.4.16/17), das zeigt das Netz eines solchen Teiltetraeders im Vergleich mit dem Netz eines regulären Tetraeders (Fig. 2.4.18/19).

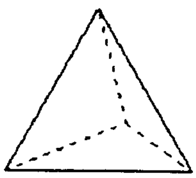


Fig. 2.4.8

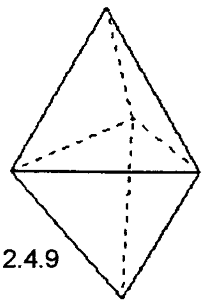


Fig. 2.4.9

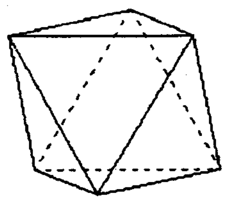


Fig. 2.4.10

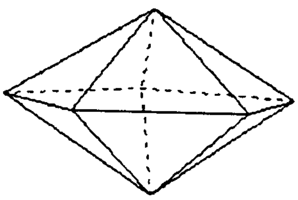


Fig. 2.4.11

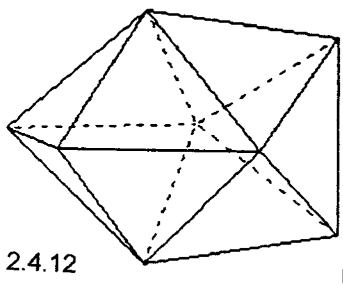


Fig. 2.4.12

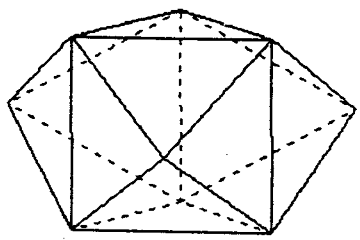


Fig. 2.4.13

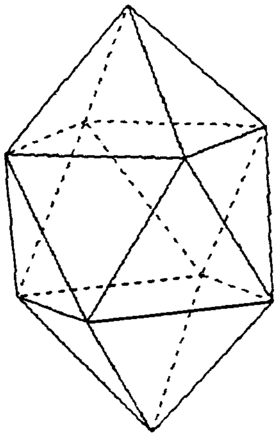


Fig. 2.4.14

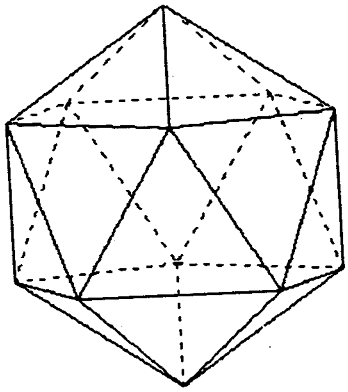


Fig. 2.4.15

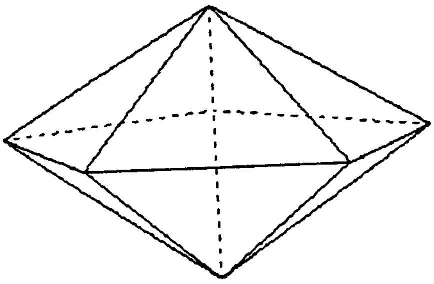


Fig. 2.4.16

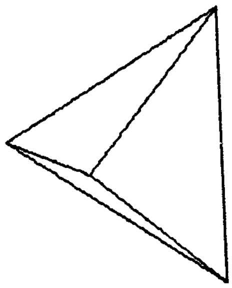


Fig. 2.4.17

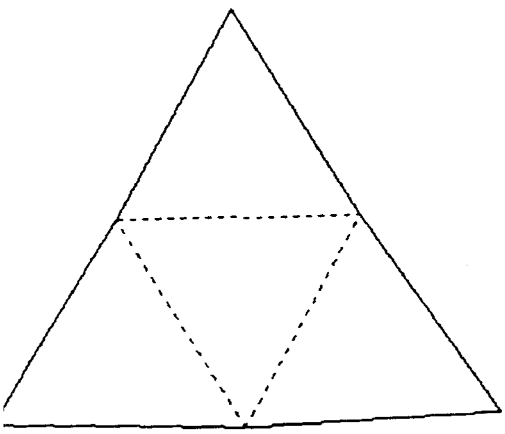


Fig. 2.4.18

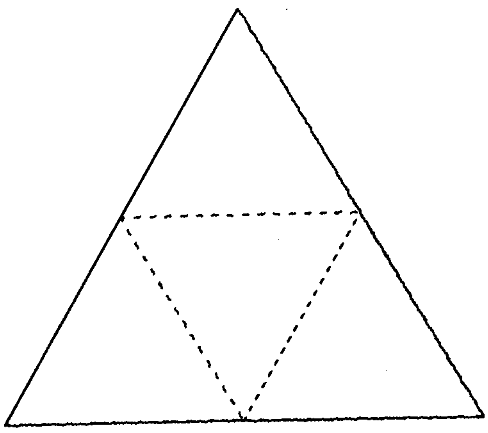


Fig. 2.4.19

Aufgabenblatt zum Projekt 'Deltoeder'

Deltoeder sind konvexe Körper aus gleichseitigen Dreiecken. Davon gibt es acht Typen (Dateinamen: DELTO4, DELTO6, ... , DELTO20)

1) Untersuche die Deltoeder nach Anzahl der Seitenflächen, der Ecken und Kanten sowie nach der Kantenzähligkeit (Ordnung) der Ecken. Welche Symmetrie-Eigenschaften haben sie ? Tabelliere Deine Ergebnisse Fertige auch durch Ausdruck von Netzen Körpermodelle. (Menü: 'Ansicht')

2) Versuche die Deltoeder in Teilkörper zu zerlegen, deren Seitenflächen gleichseitige Dreiecke, Quadrate, regelmäßige Fünfecke sind. Wieviel Sorten solcher Teilkörper erhältst Du ? Für welches Deltoeder gibt es keine derartige Zerlegung ? (Menü: 'Schnitt')

3) Fritz behauptet: "Die fünfseitige Doppelpyramide mit lauter gleichlangen Kanten kann in fünf regelmäßige Tetraeder zerlegt werden." Ist diese Behauptung richtig ? (Menü: 'Schnitt'; Option: 'Ansicht - Körpernetz')

4) Leite die Volumenformeln für die Deltoeder (mit der Kantenlänge 1) her. - Für das zwölfflächige Deltoeder ist das sehr schwer ! (Aufgabe für Klasse 9/10)

2.4.5 Vom Tetraeder zu den Hexaedern

Aufgabe ist es, aus dem Tetraeder (Vierflächner) durch ebene Schnitte zuerst die Pentaeder (Fünfflächner) und aus diesen die Hexaeder (Sechsflächner) zu gewinnen. Die durch Schnittbildung entstehenden Körper sollen durch Flächen-, Kanten- und Eckenzahlen sowie die Anzahlen der einzelnen Flächen- und Eckentypen (topologisch) gekennzeichnet werden (Projekt ab Klasse 7; Zeitaufwand: ca. 4 Stunden).

Die Figur 2.4.20 zeigt die Entstehung der zwei Pentaeder, einmal durch die Operation des 'Ecken-Abschneidens' zu, das andere Mal durch die Operation des 'Ecken-Kanten-Abschneidens' (andere Operationen führen wieder auf das Tetraeder oder auf keine 'neuen' Pentaeder). Die Pentaeder lassen sich noch durch die Angabe der Flächen-, Ecken- und Kantenanzahlen kennzeichnen. Die beiden Vertreter der Pentaedertypen (Klassen topologisch äquivalenter Polyeder) können metrisch beschrieben werden als dreiseitiger Pyramidenstumpf ('baugleich' dem dreiseitigen Prisma) und als vierseitge Pyramide.

Fahren wir mit der Schnittbildung etwa an der vierseitigen Pyramide fort, so kann man z.B. durch das Abschneiden einer dreikantigen Ecke und durch Verlagerung der Schnittfläche drei Hexaeder gewinnen (vgl. Fig. 2.4.21). Das Ecken-Abschneiden der vierkantigen Ecke erbringt ein weiteres Hexaeder ...

Das Ecken-Abschneiden und das Verlagern des Schnitts führt beim dreiseitigen Pyramidenstumpf auf drei weitere Hexaeder (Fig. 2.4.22) - andere Schnitte an Pyramide und Pyramidenstumpf führen auf keine neuen Körpertypen. Die Hexaeder lassen sich aber insgesamt nicht mehr durch die alleinige Angabe von Flächen-, Ecken- und Kantenanzahl charakterisieren; es müssen die Anzahlen für die s-seitigen Flächen (f_s, s = 3,4,5) und für die k-kantigen Ecken (e_k, k = 3,4,5) hinzugenommen werden (allein die 'dreiseitige Doppelpyramide' ließe sich noch durch die Anzahlen von Flächen, Ecken und Kanten kennzeichnen, die anderen Hexaedertypen haben anzahlgleiche Partner, die aber nicht durch stetiges Verformen aus diesen hervorgehen).

Bei den Siebenflächnern reichen die Zahl-Angaben nicht mehr aus, wie man an der Figur 2.4.23 ablesen kann: Die beiden an zwei Ecken besonders 'gestumpften' vierseitigen Pyramiden haben zwar die gleichen 'Kennzahlen', sind aber nicht mehr baugleich (topologisch isomorph).

Begründung: Im links abgebildeten Schnittkörper haben seine dreieckigen Seitenflächen mit der fünfeckigen Standfläche jeweils eine Kante gemein; im rechts abgebildeten Schnittkörper nur zwei der Dreiecke, das dritte Dreieck und das Fünfeck haben nur eine Ecke gemeinsam. Genügt es anzugeben, welche n-Ecke jeweils die Ecken des Vielflachs bilden, um seine Bauweise eindeutig zu beschreiben (z.B. in Fig. 2.4.23 links: 1x (4,4,3,4), 1x (3,4,3,5), 2x (4,3,4), 4x (3,4,5))?

Weitere Aufgabe: Für das Tetraeder gilt: Anzahl der Flächen f plus Anzahl der Ecken e gleich Anzahl der Kanten k plus zwei ($f + e = k + 2$). Ändert sich durch die Schnittbildungen diese Anzahlbeziehung oder ist sie invariant ?

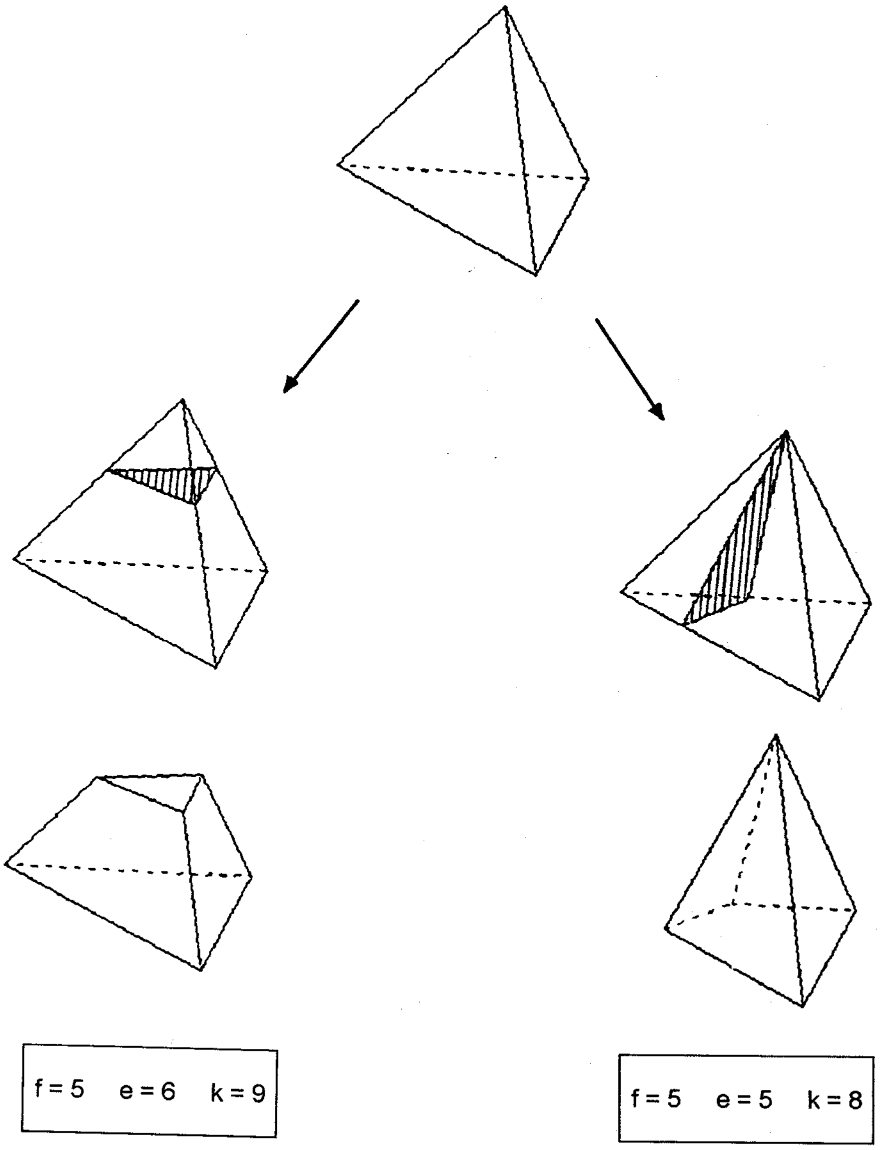
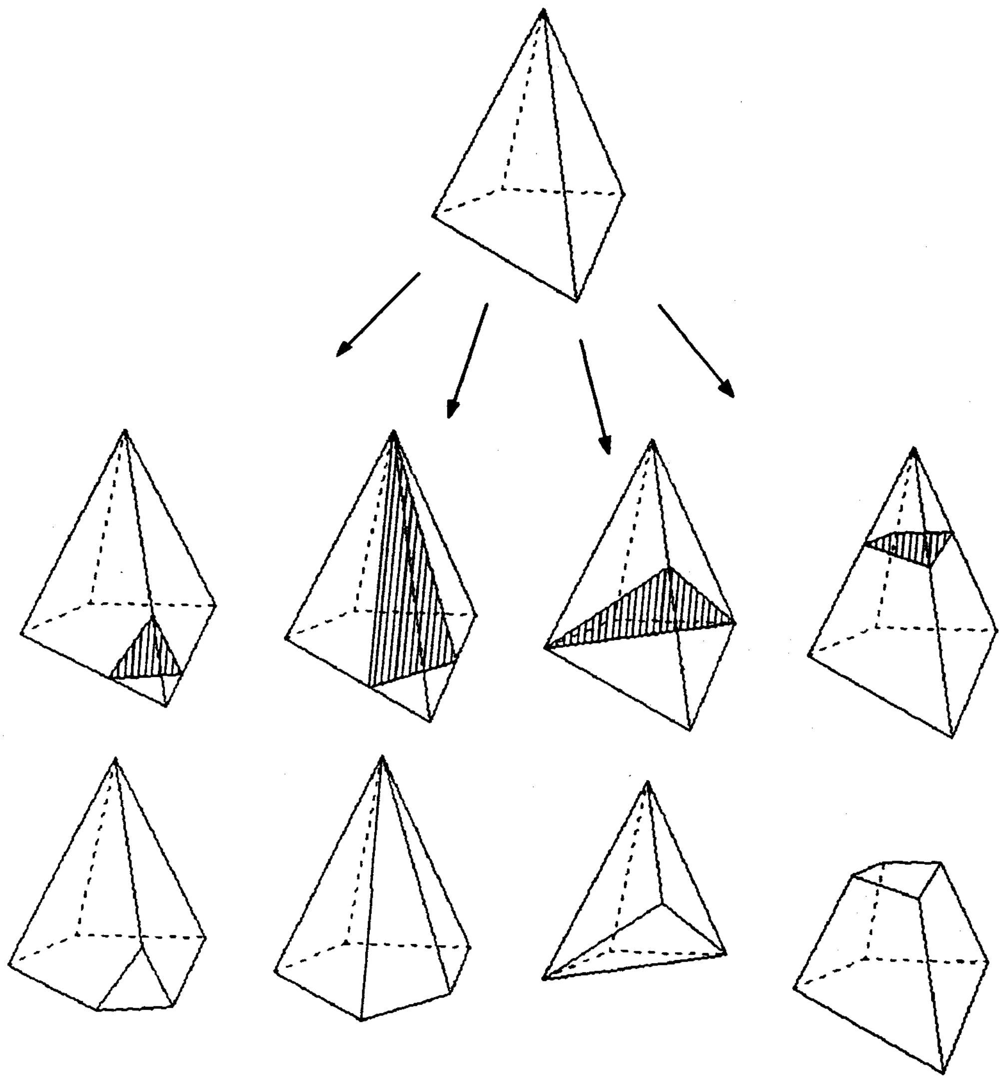


Fig. 2.4.20



$f = 6 \quad e = 7 \quad k = 11$	$f = 6 \quad e = 6 \quad k = 10$	$f = 6 \quad e = 5 \quad k = 9$	$f = 6 \quad e = 8 \quad k = 12$
$f_3 = 3 \quad f_4 = 2 \quad f_5 = 1$	$f_3 = 5 \quad f_4 = 0 \quad f_5 = 1$	$f_3 = 6$	$f_3 = 0 \quad f_4 = 6$
$e_3 = 6 \quad e_4 = 1$	$e_3 = 5 \quad e_4 = 0 \quad e_5 = 1$	$e_3 = 2 \quad e_4 = 3$	$e_3 = 8$

Fig. 2.4.21

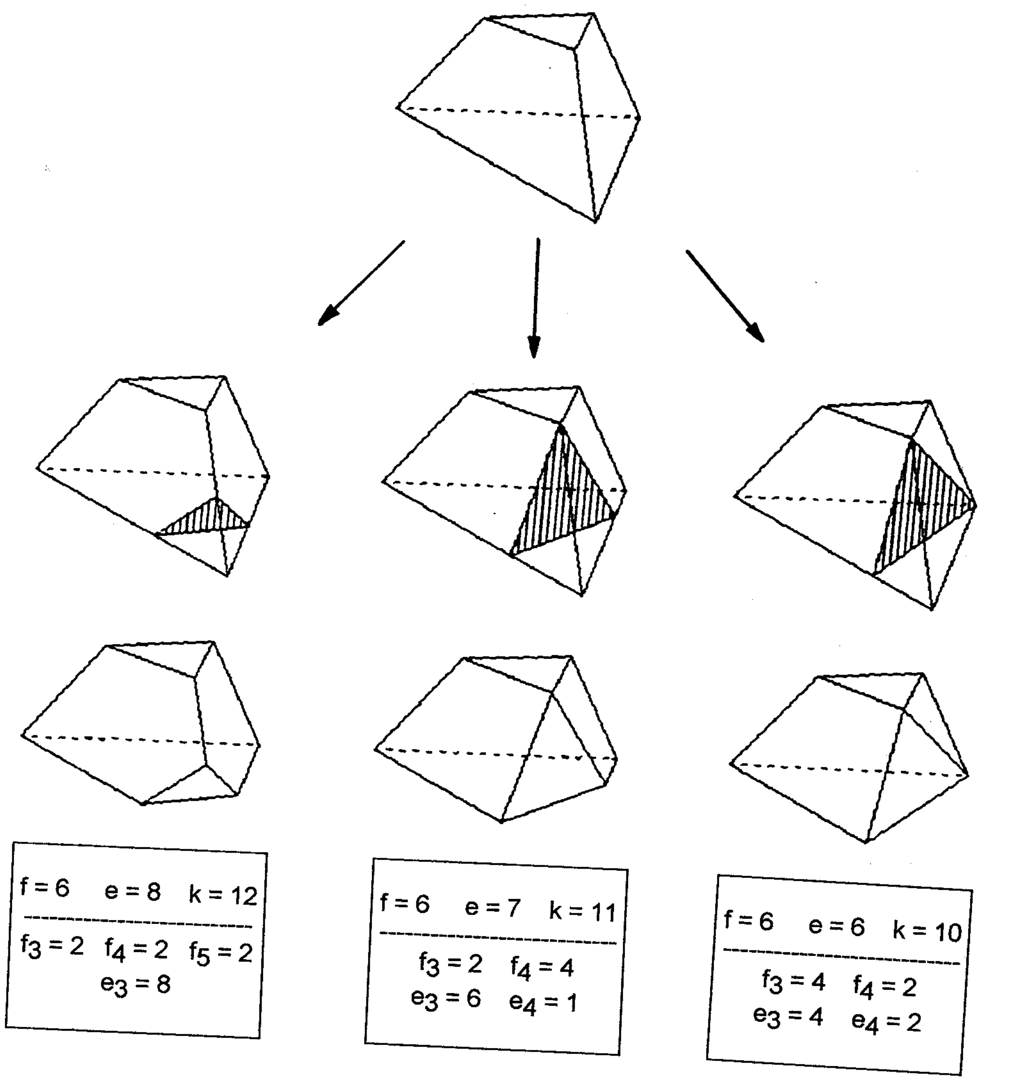

$f = 6 \quad e = 8 \quad k = 12$
$f_3 = 2 \quad f_4 = 2 \quad f_5 = 2$
$e_3 = 8$
$f = 6 \quad e = 7 \quad k = 11$
$f_3 = 2 \quad f_4 = 4$
$e_3 = 6 \quad e_4 = 1$
$f = 6 \quad e = 6 \quad k = 10$
$f_3 = 4 \quad f_4 = 2$
$e_3 = 4 \quad e_4 = 2$

Fig. 2.4.22

Aufgabenblatt zum Projekt 'Vom Tetraeder zu den Hexaedern'

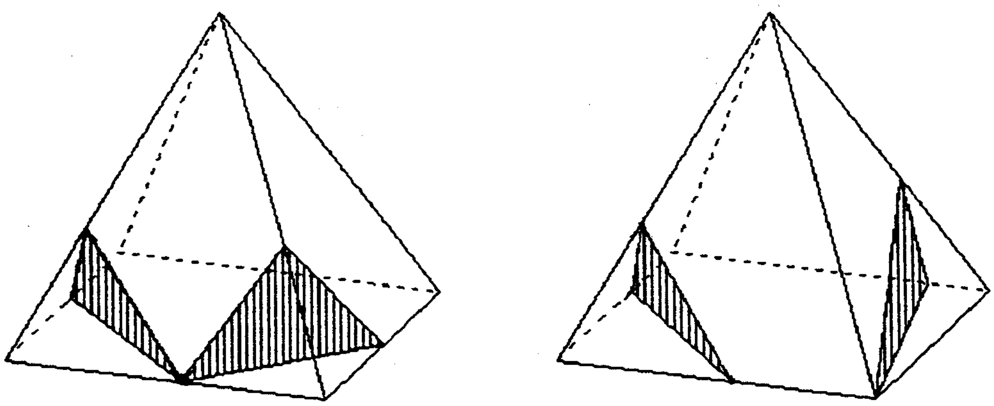
1) Lege Schnitte in das Tetraeder so, daß nach Schnittausführung neue Körpertypen entstehen. Welche Typen sind das ? Stelle aus den Netzausdrucken Körpermodelle her. Beschreibe die Körper mit ihren jeweiligen Flächen-, Ecken- und Kantenanzahlen.
(Menüs: 'Schnitt', 'Ansicht')

2) a) Lege Schnitte in eine vierseitige Pyramide so, daß nach Schnittausführung neue Körpertypen entstehen.

b) Lege Schnitte in einen dreiseitigen Pyramidenstumpf so, daß nach Schnittausführung neue Körpertypen entstehen.

Drucke die Schrägbilder aller von Dir gefundenen neuen Körpertypen aus. Reicht die Angabe der Flächen-, Ecken- und Kantenzahl noch aus, um die Körpertypen zu beschreiben ? Welche Kennzahlen mußt Du noch hinzunehmen ?

Schneide auf verschiedene Art zwei dreikantige Ecken einer vierseitigen Pyramide ab. Du erhältst Siebenflächner. Lassen sich diese Siebenflächner durch die in Aufgabe 2 dort zur Beschreibung von Körpern ausreichenden Kennzahlen unterscheiden ?



$f = 7$	$e = 8$	$k = 13$
$f_3 = 3$	$f_4 = 3$	$f_5 = 1$
$e_3 = 6$	$e_4 = 2$	

Fig. 2.4.23

2.4.6 Von den Platonischen zu (den) Archimedischen Körpern

Eine Möglichkeit der Verallgemeinerung der Platonischen Körper (konvexe reguläre Polyeder) besteht darin, die Deckungsgleichheit (Kongruenz) der regelmäßigen Seitenvielecke aufzugeben, aber die Deckungsgleichheit der Körperecken beizubehalten. Die so verallgemeinerten Körper nennt man Archimedische Körper (konvexe halbreguläre Polyeder). Die Archimedischen Körper lassen sich durch Schnittbildung aus den Platonischen Körpern erzeugen.
- Die Dimensionierung der Schnitte erfordert - das Tetraeder ausgenommen - das Rechnen mit Wurzeln oder im Falle des Dodekaeders und Ikosaeders einfacherweise trigonometrisches Rechnen (vgl. Fig. 2.4.25 a - 2.4.27 a). Von daher könnte das Projekt - wenn der Lehrer/Lehrerin nicht die entsprechenden Maße vorgeben oder zeichnerisch ermitteln lassen will - frühestens in Klasse 9 durchgeführt werden. Wir schließen hier aus Gründen der Einfachheit und Übersicht die Gewinnung der Prismen, Antiprismen als halbreguläre Polyeder, des abgeschrägten Würfels bzw. Oktaeders und des abgeschrägten Dodekaeders bzw. Ikosaeders aus. Wir weisen darauf hin, daß nicht alle Archimedischen Körper auf metrische Weise durch Schnittbildung aus den Platonischen Körpern gewonnen werden können, sondern in den meisten Fällen nur topologische äquivalente Körper (Zeitaufwand: ca. 6 Stunden, bei Arbeitsteilung).

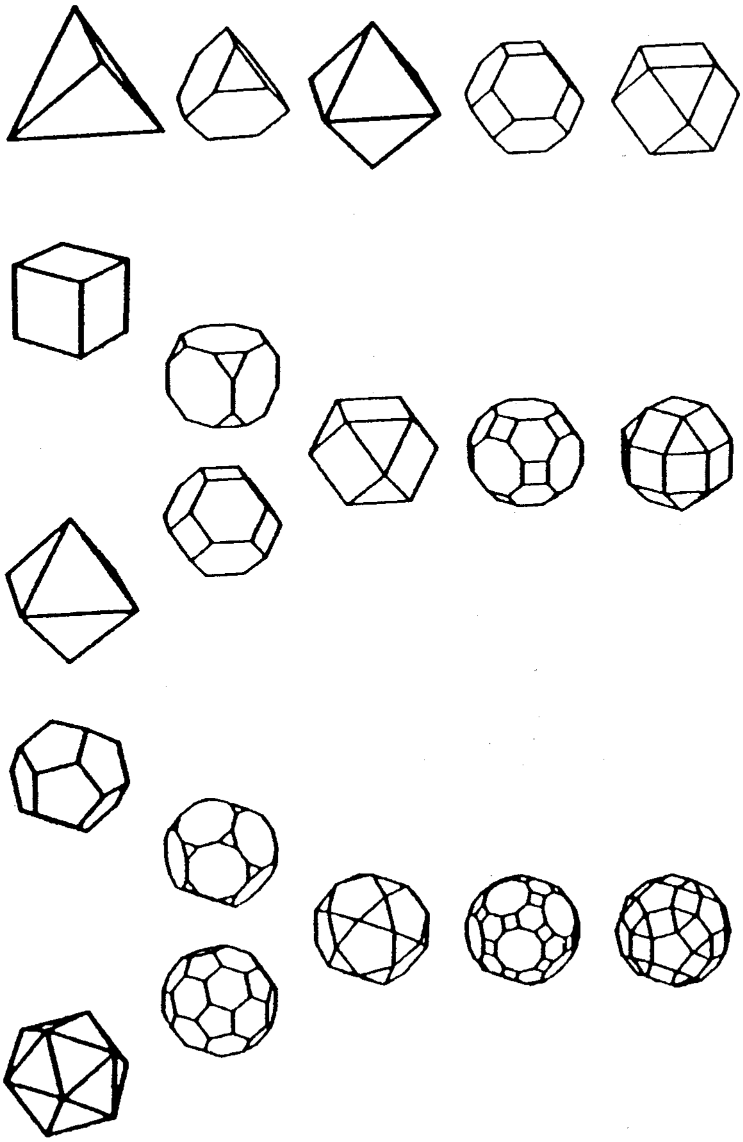


Fig. 2.4.24 a

Tetraeder — Abgestumpftes Tetraeder — Oktaeder — Abgestumpftes Oktaeder — Kuboktaeder

Würfel (Hexaeder) — Abgestumpfter Würfel
Oktaeder — Abgestumpftes Oktaeder
— Kuboktaeder — Abgestumpftes Kuboktaeder — Rhombenkuboktaeder (1)

Dodekaeder — Abgestumpftes Dodekaeder
Ikosaeder — Abgestumpftes Ikosaeder
— Ikosidodekaeder — Abgestumpftes Ikosidodekaeder — Rhombenikosidodekaeder

Fig. 2.4.24 b

$\frac{1}{3}$

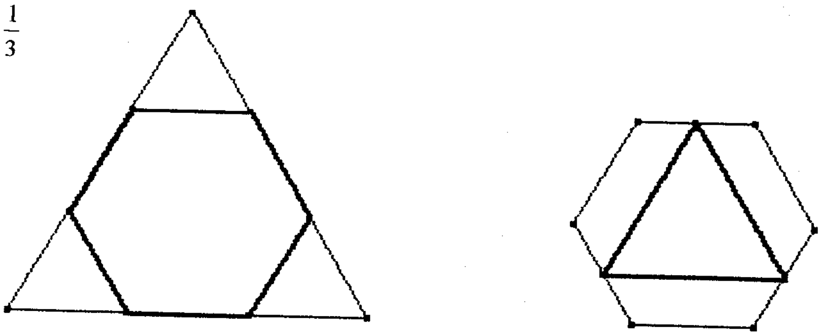


Fig. 2.4.25 a / b

$\frac{1}{2+\sqrt{2}}$

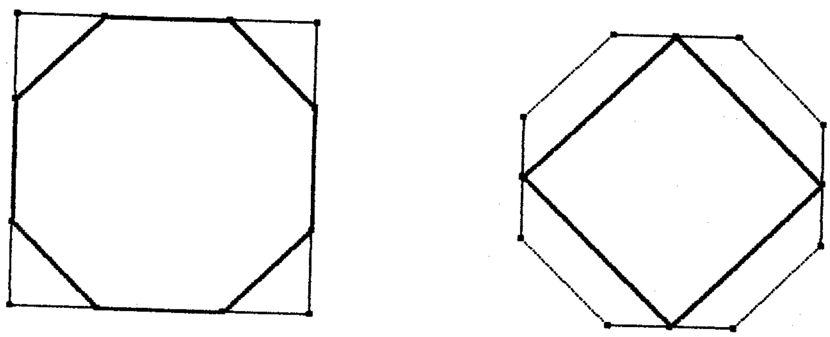


Fig. 2.4.26 a/b

$\frac{1}{2\,(1+\cos\,(36°))}$

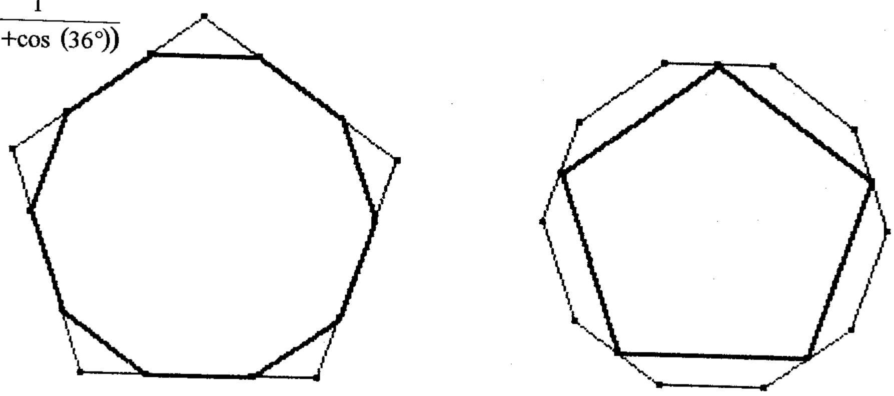


Fig. 2.4.27 a/b

Die Figur 2.2.24 a zeigt in einem Überblick die Entwicklung von Archimedischen Körpern aus den Platonischen durch fortlaufendes Abschneiden (Stumpfen) von Ecken bzw. Verlagern von Schnittflächen. Figur 2.2.24 b gibt die entsprechenden geometrischen Bezeichnungen zu der in Figur 2.2.24 a dargestellten Gruppierung an.

Die Schnittverwandten des Tetraeders:
Wir stumpfen die Ecken des Tetraeders mit 1/3-Eckenabschnitten (Fig. 2.4.25 a) und erhalten das Abgestumpfte Tetraeder (Fig. 2.4.24 erste Körperfolge). Verlagern wir die Schnittflächen bis zur Mitte der Kanten (Fig. 2.4.25 b), so bekommen wir das Oktaeder, das wir auch direkt durch 1/2-Eckenabschnitte aus dem Tetraeder hätten gewinnen können. 1/3-Eckenabschnitte am Oktaeder führen auf das Abgestumpfte Oktaeder; durch Schnittverlagerung zu den Kantenmitten hin erhält man das Kuboktaeder, das sich auch direkt aus dem Oktaeder durch 1/2-Eckenabschnitte erzeugen läßt.

Die Schnittverwandten des Würfels (regulären Hexaeders) und des Oktaeders:
Wir stumpfen den Würfel mit $1/(2+\sqrt{2})$ - Eckenabschnitten (vgl. Fig. 2.4 26 a) und erhalten den Abgestumpften Würfel (Fig. 2.4.24 zweite Körperfolge). Verlagerung der Schnittflächen zu den Kantenmitten (Fig. 2.4.26 b) bringt das Kuboktaeder hervor, welches man auch direkt durch 1/2- Eckenabschnitte aus dem Würfel produzieren kann. Wie schon oben geschildert, gelangt man vom Oktaeder zum Kuboktaeder. Vom Kuboktaeder können wir mittels Schnittbildung nur zu einem der Abgestumpften Kuboktaeder (topologisch) baugleichen Körper kommen, denn das symmetrische Abstumpfen einer Ecke liefert immer ein nicht quadratisches Rechteck mit dem Seitenverhältnis $1 : \sqrt{2}/2$, also kein Quadrat (vgl. Fig. 2.4 28 a); außerdem können entweder nur aus den Seitenquadraten des Kuboktaeders regelmäßige Achtecke oder nur aus den gleichseitigen Dreiecksflächen des Kuboktaeders regelmäßige Sechsecke gemacht werden, da das Schnittflächenrechteck für beide Bedingungen das Seitenverhältnis $(\sqrt{2}-1) : \sqrt{2}/6$ $(\neq 1 : \sqrt{2}/2)$ haben müßte (Aufgabe für den Leser). Um zum letzten Körper in dieser Folge (Fig. 2.4.24 mittlere Folge) zu gelangen, könnte man das Kuboktaeder mit 1/2-Eckenabschnitten stumpfen; die Schnittflächen wären dann nichtquadratisch rechteckig (vgl. Fig. 2.4.28 b), und man erhielte nur einen zum Rhombenkuboktaeder (topologisch) isomorphen Körper. - Wir erkennen hier deutlich die Grenzen der Schnittbildung als Methode, um möglichst viele im metrischen Sinne halbreguläre Polyeder zu erzeugen. Die Methode des Zusammensetzens von regelmäßigen Vielecken zu Flächenmodellen - für die es geeignete Materialien gibt (z.B. POLYDRON) - kann wahlweise eingesetzt werden.

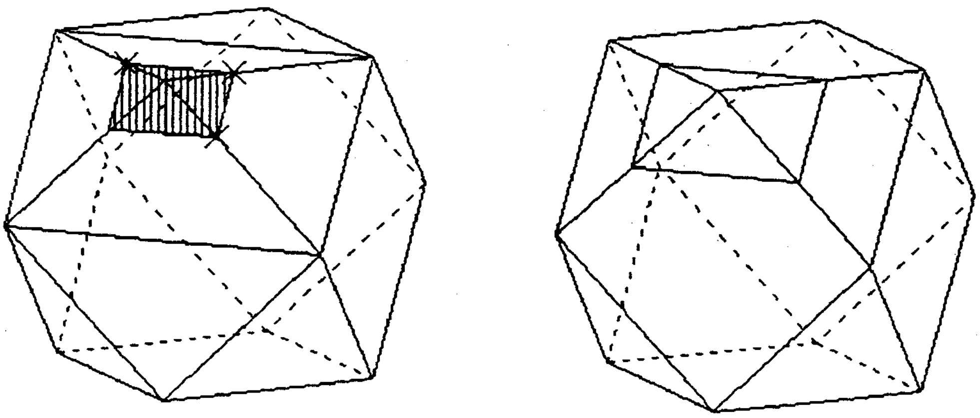


Fig. 2.4.28 a/b

Die Schnittverwandten des Dodekaeders und des Ikosaeders:
Wir stumpfen das Dodekaeder mit 1/2 (1 + cos (36°))-Eckenabschnitten und erhalten das Abgestumpfte Dodekaeder (Fig. 2.4.27 a und Fig. 2.4.24 dritte Körperfolge). Durch Schnittverlagerung zu den Kantenmitten hin (Fig. 2.4.27 b) bekommen wir das Ikosidodekaeder, welches wir auch direkt mittels 1/2-Eckenabschnitten aus dem Dodekaeder oder dem Ikosaeder herstellen können. Aus dem Ikosaeder erzeugen wir mit 1/3-Eckenabschnitten das Abgestumpfte Ikosaeder (isomorph dem 'Fernsehfußball') und aus diesem durch Verlagerung der Schnittflächen das Ikosidodekaeder. Ähnlich wie schon beim Kuboktaeder kann man aus dem Ikosidodekaeder durch Schnitte nur zum Abgestumpften Ikosidodekaeder und zum Rhombenikosidodekaeder nicht metrische baugleiche Polyeder gewinnen (Fig. 2.4.24, die beiden Körper am Ende der dritten Körperfolge.) -

Wir fügen hier noch operative Überlegungen zur Varianz der Ecken-, Flächen- und Kantenanzahl und der Invarianz ihrer Anzahlbeziehungen (Eulerscher Polyedersatz) beim Stumpfen von regulären bzw. halbregulären Polyedern durch die Operationen 't-Eckenabschnitte' ($0 < t < 1/2$ bzw. $t = 1/2$) an. - Mit 'alten' Anzahlen: e, f, k; 'neuen' Anzahlen e', f', k'; o = Ordnung der Ecken, d.h. Anzahl der Kanten in einer Ecke, erhalten wir dann:

Für das Stumpfen mit t-Eckenabschnitten $0 < t < 1/2$ (z.B. $t = 1/3$):
Mit $e' = e + e \cdot (o-1)$; $f' = f + e$; $k = k + e \cdot o$ wird
$$e' - k' + f' = e + e \cdot (o-1) - (k + e \cdot o) + f + e$$
$$= e - k + f = 2$$

Für das Stumpfen mit 1/2-Eckenabschnitten:

Mit $e' = e \cdot o - k$; $f' = f + e$; $k' = e \cdot o$ wird

$$e' - k' + f' = e \cdot o - k - e \cdot o + f + e$$
$$= e - k + f = 2$$

Die Fragestellungen für den Schüler könnten lauten: Wie berechnest Du aus den Ecken-, Flächen- und Kantenzahlen des noch nicht geschnittenen Körpers die entsprechenden Anzahlen für den Schnittkörper ? Ändert sich die Beziehung zwischen diesen Anzahlen ?

Aufgabenblatt zum Projekt 'Von den Platonischen zu Archimedischen Körpern'

Verwende die Dateien PLATON1 (Tetraeder), PLATON2 (Würfel), PLATON3 (Oktaeder), PLATON4 (Dodekaeder), PLATON5 (Ikosaeder). Verschaffe Dir beim Legen der Schnitte Übersicht, in dem Du Dir Dein Arbeitsfeld durch Vergrößern und Drehen des Körpers entsprechend einrichtest.

1) Kantenhalbierendes Eckenabschneiden

   a) Setze auf allen Kanten des Tetraeders, Würfels (Hexaeders), Oktaeders, Dodekaeders und des Ikosaeders den Kantenmittelpunkt. Schneide kantenhalbierend alle Ecken ab. Wie ändert sich die Flächen-, Ecken- und Kantenanzahl des ursprünglichen Körpers ? Beschreibe die neuen Körper.
   Drucke die Schrägbilder der neuen Körper aus und falte die Netzausdrucke zu Flächenmodellen auf.

   b) Die unter 1 a erzeugten neuen Körper werden Kuboktaeder und Ikosidodekaeder genannt. Führe an diesen Körpern erneut kantenhalbierendes Eckenabschneiden durch. Du erhältst zwei neue Körpertypen: das (nicht gleichkantige) Rhombenkuboktaeder und das (nicht gleichkantige) Rhombenikosidodekaeder. Beschreibe diese neuen Körper.

2) Kantendrittelndes Eckenabschneiden

   Setze auf allen Kanten die zwei Punkte, die die Kante 'dritteln'. Schneide 'kantendrittelnd' alle Ecken des Tetraeders, Oktaeders und des Ikosaeders ab. Du erhältst drei neue Körper. Beschreibe diese, wie ändern sich die Flächen-, Ecken- und Kantenanzahlen ?
   Die drei Körper heißen: abgestumpftes Tetraeder, abgestumpftes Oktaeder, abgestumpftes Ikosaeder ('Fernsehfußball').

3 Schlußbemerkungen

Wir schließen mit einigen Bemerkungen über Perspektiven der Unterrichtssoftware-Entwicklung für die Raumgeometrie.

3.1 Schnittbildung an nicht polyedrischen Körpern

Eine weitere Entwicklung von Unterrichtssoftware für die Raumgeometrie muß unbedingt auch die Erzeugung ebener Schnitte an nicht polyedrischen Körpern und die Erzeugung entsprechender Schnittkörper einschließen. Das ist aus Gründen der Kompatibilität zur Schulgeometrie als auch aus Gründen der geometrischen Modellierung der uns umgebenden Formenvielfalt notwendig. Zumindest sollte die Schnittbildung an Zylinder, Kegel, Kugel und Torus (als Beispiel für einen Körper, der nicht das Geschlecht 0 hat) möglich sein. - Als Vorbild für eine entsprechende Unterrichtssoftware-Entwicklung aus inhaltlicher und software-ergonomischer Sicht können punktuell 3-D-CAD Systeme, wie z.B. AutoCAD mit seiner 3-D-Erweiterung zur Erzeugung und Bearbeitung von Vollkörpern (Advanced Modelling Extension) dienen. Der Solid Modeller von AutoCAD verfügt über eine Option zum Erzeugen von interaktiv festlegbaren ebenen Schnitten in einem Körper (Solid-section) - vgl. Figur 3.1 und zum Erzeugen von Schnittkörpern (Solid-cut) nach vorausgegangenem Solid-section - vgl. Figur 3.2. - Mit der Option Solid-feature lassen sich an einem Schnittkörper neben der Schnittfläche zusätzlich die Schnittlinien für eine Untersuchung extrahieren (Fig. 3.3); man stelle sich die Anwendung dieser Option, z.B. bei der Untersuchung von Kegelschnitten vor.

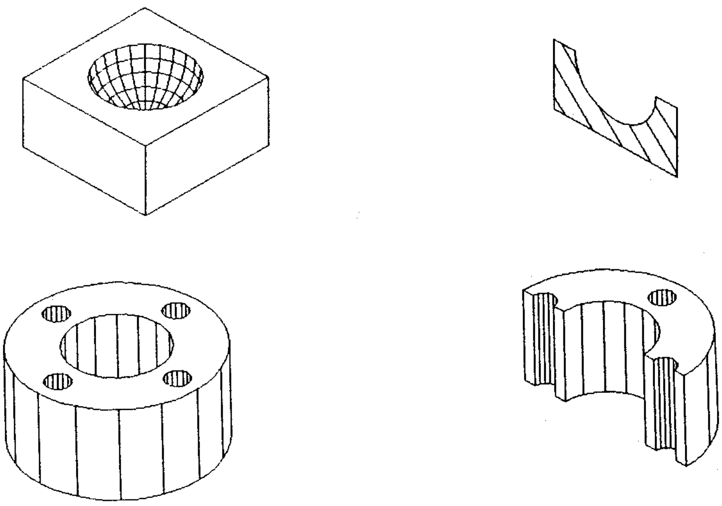


Fig. 3.1 - 3.2

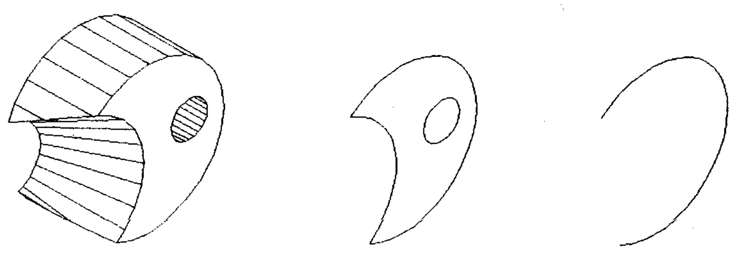


Fig. 3.3

3.2 Automatisches Berechnen an Schnittkörpern

Die o.g. Erweiterung von AutoCAD besitzt auch Optionen zur automatischen Berechnung von Kanten, Winkeln, Flächen und Rauminhalten von Körpern. Damit kann das Lösen von speziellen Berechnungsaufgaben (vgl. Abschnitt 1.6) unterstützt und kontrolliert werden. - Mit der Variation der Lage eines Körperschnitts und der aus ihr folgenden Variation der Schnittkörper ergeben sich neue Möglichkeiten einer operativen Untersuchung von Größen: Wie ändert sich die Länge der Kante, die Größe des Winkels, die Größe der Fläche, der Rauminhalt, wenn ... ?

3.3 Integriertes Werkzeug für die synthetische Raumgeometrie in der Schule

Das Computerwerkzeug SCHNITTE ist als Stand-Alone-Module für einen computerunterstützten Unterricht in Raumgeometrie langfristig gesehen von geringer Bedeutung. Es stellt eine Insellösung für den konstruktiven Problemkreis "Polyederschnitte" dar. Andere Insellösungen sind z.B. für den Problemkreis "Vereinigung, Durchdringung und Differenzbildung von Körpern" oder dem Problemkreis "Körperberechnungen" denkbar. Der (die) sie benutzende Schüler(in) und Lehrer(in) müßten stets neue Benutzeroberflächen lernen und hätten Schwierigkeiten bei der Bewältigung komplexerer Aufgaben, die den Einsatz verschiedener spezifischer Werkzeuge und den Austausch von Daten zwischen diesen erforderlich machen würden. Wir geben deshalb hier eine grobe Beschreibung wesentlicher Menüs eines relativ universellen Computerwerkzeugs für den Unterricht in Raumgeometrie (vgl. auch Schumann 1989 u. 1991), das sich unter MS-WINDOWS realisieren ließe. (Professionelle 3-D-CAD Systeme sind keine Lösung für dieses Software-Entwicklungsproblem, da diese Systeme prinzipiell nicht kompatibel zur Schulgeometrie sind und ihre Komplexität sich für naive und temporäre Benutzer, wie sie Schüler und Lehrer darstellen, nicht eignen.)

Das Menü zum Erzeugen von geometrischen Körpern enthält Optionen für die Booleschen Operationen, die Schnittkörperbildung, die Erzeugung durch Körperduplikation, durch Rotation und Translation von Flächen etc. (In einer individuell erweiterbaren Körperdatei werden elementare Körper zur Bearbeitung bereitgestellt.)
Das Menü zum interaktiven Konstruieren besteht aus Optionen zur direkten Konstruktion geometrischer Konfigurationen im Raum - ohne etwa die in der klassischen darstellenden Geometrie notwendigen zweidimensionalen Verfahren, wie das Umlegen, das Umklappen oder Umprojizieren praktizieren zu müssen. Es lassen sich die Konstruktionen mit Zirkel, Lineal und Geodreieck simulieren; zu diesen Werkzeugen treten im Raum noch - fiktiv - das Ebenenlineal, der Kugelzirkel und das Geoprisma (für räumliche Lot- bzw. Normalenaufgaben). Die räumliche Interpretation wird durch Brechung der in der Tiefe liegenden und überdecktem Objekte unterstützt. Es existiert eine Option für das Definieren von Makrokonstruktionen, wie dies schon von 2-D-Grafiksystemen bekannt ist. Ebenso wie in diesen Systemen gibt es einen Zug-Modus zur kontinuierlichen Variation von räumlichen Figuren.
Das Menü 'Darstellen' enthält Optionen für das dynamische Visualisieren von Körpern, für das Wandeln von Körperdarstellungen (Kanten-, Flächen-, Vollkörpermodelle), für die Darstellung eines Körpers oder einer Konfiguration in Mehrtafelprojektion oder/und Parallel- bzw. Zentralprojektion, für die Darstellung eines Körpers in verschiedenen Hidden-Line Modi, für die plastische Darstellung von Körpern durch Schattierung bei Beleuchtung oder durch anaglyphische Repräsentation (Raumbilder als Brücke zwischen 'Realobjekt' und Bildschirmdarstellung des Objekts !), für das Verebnen von abwickelbaren Körpermodellen (Körpernetze) sowie das Zerlegen eines Körpers in seine ein-, zwei-, dreidimensionalen Bestandteile, für das dynamische Darstellen von Körperveränderungsprozessen (Animationsgrafik) usw. - Ideal wäre eine Schnittstelle zu einer CNC-Maschine, mit der man vorher auf dem Bildschirm konstruierte Vollkörpermodelle herstellen könnte, um sie der taktilen Erfahrung zugänglich zu machen.
Das Menü 'Berechnen' besteht aus Optionen zur automatischen Messung bzw. Berechnung der ebenen und räumlichen geometrischen Größen und einem Formeleditor zur Termgenerierung aus symbolisch repräsentierten Maßwerten, um individuelle Berechnungsaufgaben lösen zu können. Makroberechnungen sind definierbar.
Es ist selbstverständlich, daß die Software-Ergonomie den zeitgemäßen professionellen Standards für Werkzeugsoftware zu genügen hat (das schließt die Möglichkeit der Menümodifikation zur Anpassung des Werkzeugs an Adressatengruppen und/oder raumgeometrische Problemkreise ein).
Das Werkzeug für die synthetische Behandlung der Raumgeometrie in der Schule kann auch mit einer komfortablen grafischen Benutzersprache betrieben werden, die die Kodierung nicht sequentieller Algorithmen zuläßt.
Wir sind uns bewußt, daß die Entwicklung eines solchen Werkzeugs beeinflußt sein wird von der Wahl und den (begrenzten) Möglichkeiten der Software-Entwicklungs-

werkzeuge und den bewußten oder unbewußten Auffassungen der Softwareentwickler von synthetischer Raumgeometrie.

3.4 Geometrielernen in Virtuellen Wirklichkeiten

Bei der Nutzung der heutigen Raumgeometrieprogramme bleiben Mensch und Computersystem getrennt. Der Mensch kann nur mittelbar mit dem Computer interagieren, indem er z.B. das Grafikeingabegerät 'Maus' bedient; seine kinästhetischen Empfindungen und Erfahrungen sind deshalb sehr eingeschränkt; er läßt Kommandos ausführen und beobachtet das (räumliche) Ergebnis auf einem planaren Bildschirm; dir räumliche Interpretation kann allenfalls durch stereografische Darstellungen und die Benutzung einer Rot-Grün-Brille verbessert werden. Die Computergenerierung sogenannter virtueller Wirklichkeiten (vgl. u.a. Rheingold 1992, Woffender 1991) hebt die Grenzen zwischen den Systemen Mensch und Computer partiell auf: Mittels einer geeigneten Schnittstelle, dem Eye Phone, einer elektronischer Brille, ausgerüstet mit stereografisch arbeitenden Bildschirmen und Stereolautsprechern, aus visueller und akustischer Schnittstelle und einem elektronischen Handschuh als (Data Glove) als taktiler Schnittstelle ist es möglich, daß der Mensch die (illusionäre) Empfindung hat, sich in einer simulierten dreidimensionalen Welt (Cyberspace) ganzkörperlich zu bewegen und zu betätigen, indem er z.B. Operationen an Objekten der virtuellen Realität vornimmt. Obwohl zur Zeit die Personalcomputer sich noch nicht für eine Echtzeit-Verarbeitung der bei solchen Simulationen anfallenden Datenmengen eignen, so ist doch folgendes Szenarium für eine zukünftiges Geometrielernen denkbar: Der Geometrielerner agiert als Cybernaut in einer dreidimensionalen geometrischen Welt der Formen z.B. in einer zum Erforschen von Polyedern. Er geht zwischen den Körpern spazieren, betrachtet diese aus der Frosch- oder der Vogelperspektive, klettert auf den Körpern herum, spürt die spitzen Ecken und die scharfen Kanten, rutscht die glatten Körperflächen herunter, dringt in die Körper ein und betrachtet sie von innen; er bewegt die Körper, baut sie zusammen, entfaltet sie in die Ebene, verändert ihre Größe, deformiert sie nach Belieben und nimmt an ihren Operationen vor, z.B. Schnittoperationen oder er 'spielt' selbst einen Körper und 'erlebt' z.B. das Rollen desselben usw.

Wie wird eine derart computerrepräsentierte Geometrie das 'Bild' von Geometrie bei den Schülern und Schülerinnen prägen ? Wie wird sich ihre Beziehung zu der sie umgebenden nicht virtuellen dreidimensionalen Welt verändern ?

4 Literatur

Alexandroff, P.S. (Hrsg.):	Enzyklopädie der Elementarmathematik Band IV: Geometrie. Berlin 1969.
Autodesk AG/Switzerland:	Advanced Modelling Extension Release 2.1, Reference Manual. 1992.
Bauersfeld, H.:	Drei Gründe, Geometrisches Denken in der Grundschule zu fördern. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1992. S. 7-33.
Besuden, H.:	Operieren mit Gummibändern, Ebene Schnitte an geometrischen Körpern. In: mathematik lehren 1994, Heft 67, S. 11-15.
Bender, P./ Schreiber A.:	Operative Genese der Geometrie. Stuttgart 1985.
Bill, M.:	Form. Basel 1952.
Bollnow, O.F.:	Die Pädagogik der deutschen Romantik, von Arndt bis Fröbel. - 2. Aufl., Stuttgart 1967.
Coxeter, H.S.M.:	Regular Polytopes. New York 1973.
Doorman, L.M./ Wijers, M.:	Doorsneden Doorzien. In: Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs, Sept. 1991, S. 43-47.
Fay, E. et al.:	Der Raumvorstellungstest Schnitte - Untersuchungen zur Validität eines neuen Verfahrens zur Erfassung des räumlichen Vorstellungsvermögens. - In: Schuler, H. und Funke, U.: Eignungsdiagnostik in Forschung und Praxis. Stuttgart 1991.
Frey, K.:	Die Projektmethode. - 5 Aufl. Weinheim 1993.
Geddes, D. et al.:	Geometry in the middle grades. Reston/VA 1992.
Gerstner, K.:	Das Apollinische in der Kunst - Max Bill zum 80. In: Die Zeitschrift der Kultur - du 1988, Heft 10, S. 26-35.
Gusev, V. et al.:	Solving Problems in Geometry. Moscow 1988.
Gutiérrez, A.:	Exploring the links between Van Hiele levels and 3-dimensional geometry. In: Structural Topology 18, 1992, S. 31-62.

Hanko, W./ Steidle, A. (Hrsg.): Elementare Technik, Klassenstufe 9. Stuttgart 1986.

Heller, L. et al.: Praktisches Lernen mit geometrischen Körpern nach Fröbel. Projektbericht - unveröffentl. Tübingen 1993.

Hilbert, A.: Wir wiederholen: Räumliche Geometrie. Thun 1983.

Holz-Hoerz: Werbeprospekt. Münsingen 1992.

Klafki, W.: Das pädagogische Problem des Elementaren und die Theorie der kategorialen Bildung. - 3./4. Aufl., Weinheim 1964.

Laborde, J.-M. et al.: Cabri-Géomètre - Zweidimensionales Grafiksystem zum geometrischen Konstruieren. Duisburg 1990. (Deutsche Bearbeitung von H. Schumann)

Lange, W. (Hrsg.): Friedrich Fröbel's gesammelte pädagogische Schriften. Abt. 1, Band 1 und 2; Abt. 2. - Nachdruck der Ausgaben 1862/63.

Litwinenko, W.N.: Zadatschi na razwitie prostranstwennych predstawljeni (Aufgaben zur Entwicklung der räumlichen Vorstellung). - Moskau 1991.

Ministerium für Kultus und Sport B.-W. (Hrsg.): Lehrpläne für das Fach Mathematik: Grundschule, Hauptschule, Realschule, Gymnasium. Stuttgart 1983/84 und 1994.

Müller, K.P.: Körperpackungen und Raumvorstellungen. In: Der Mathematikunterricht 1983, Heft 6, S. 56-82.

Nohl, H.: Erziehergestalten. - 4. Aufl., Göttingen 1965.

Nutsch, W. (Hrsg.): Fachkunde für Schreiner. Wuppertal 1980.

O'Daffer, P.G./Clemens, S.R.: Geometry: An Investigative Approach. Menlo Park/CA 1976.

Piaget, J. et al.: Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde. Stuttgart 1975.

Polydron International: Polydron, Teacher Notes. Brackmills/England 1985.

Rheingold, H.: Virtuelle Welten, Reisen im Cyberspace. Reinbek 1992.

Schönherr, R. et al.: umwelt: technik 7. Stuttgart 1986.

Schumann, H.: Zur Geschichte der Rauminhaltslehre dreidimensionaler Polyeder. In: mathematica didactica 1982, Heft 3, S. 155-162.

Schumann, H.: Invarianz und Varianz der Oberflächengröße - Größenspezifische Unterschiede bei einem informellen Test. In: Journal für Mathematik-Didaktik 1989, Heft 1, S. 63-92.

Schumann, H.: Deltaeder - ein raumgeometrisches Entdeckungs- und Übungsfeld. In: Didaktik der Mathematik 1989, Heft 4, S. 263-295.

Schumann, H.: Die simultane Variation von Schräg- und Dreitafelbild geometrischer Körper mit dem Computer als Interaktivem Werkzeug. In: mathematica didactica 1991, Heft 4, S. 42-54.

Schumann, H.: Computerunterstütztes Stumpfen und Sternen von Polyedern. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 1993, S. 191-195.

Spranger, E.: Aus Friedrich Fröbels Gedankenwelt - 4. Aufl. Heidelberg 1964.

Steinitz, E.: Vorlesungen über die Theorie der Polyeder. Berlin 1934.

Wagemann, E.: Quadrat, Dreieck, Kugel. Die Elementarmathematik und ihre Bedeutung für die Pädagogik bei Pestalozzi, Herbart und Fröbel. Göttingen 1960.

Wijers, M. u. Doorman, M.: Doorsneden (Leerlingenteckst). Utrecht 1992.

Wittmann, E.: Grundfragen des Mathematikunterrichts. - 4. Aufl. Braunschweig 1976.

Woffender, M. (Hrsg.): Cyberspace, Ausflüge in virtuelle Wirklichkeiten. Reinbek 1991.

Wölpert, H.: Materialien zur Entwicklung der Raumvorstellung im Mathematikunterricht. In: Der Mathematikunterricht 1983, Heft 6, S. 7-42.

Zeitler, H.: Die Würfelschnitte von Max Bill. In: Didaktik der Mathematik 1990, Heft 2, S. 81-89.

5 Namens- und Sachregister