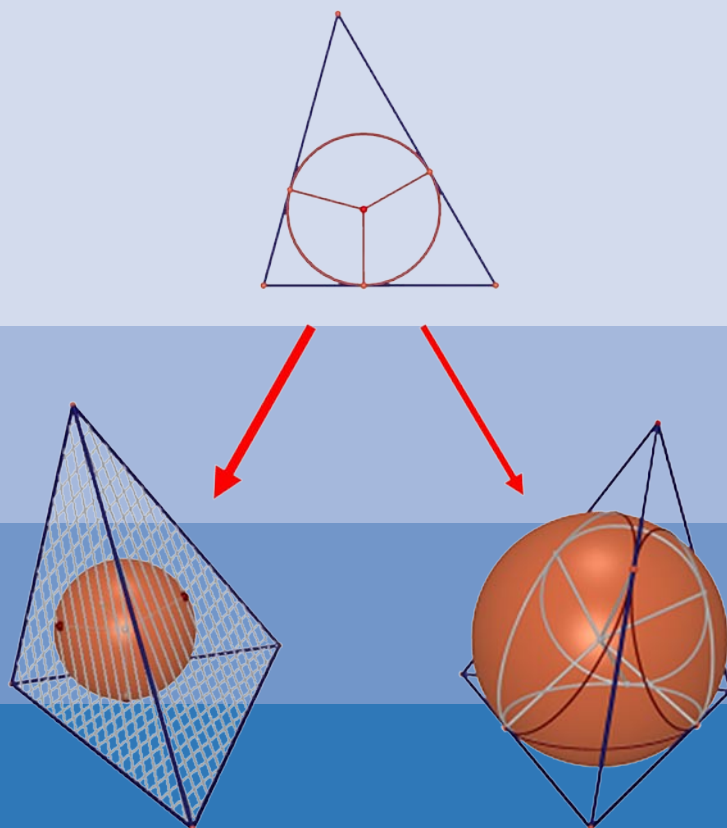


Heinz Schumann

# Elementare Tetraedergeometrie

Eine Einführung in die Raumgeometrie





Heinz Schumann

# Elementare Tetraedergeometrie

## Eine Einführung in die Raumgeometrie

0.	<b>Einleitung</b> .....	1
1.	<b>Besondere Tetraeder</b> .....	11
1.1.	<b>Das gleichkantige oder regelmäßige Tetraeder</b> .....	13
1.1.1.	Konstruktionen des regelmäßigen Tetraeders.....	13
1.1.2.	Deckabbildungen des regelmäßigen Tetraeders.....	17
1.1.3.	Besondere Geraden und Punkte des regelmäßigen Tetraeders.....	19
1.1.4.	Berechnungen am regelmäßigen Tetraeder.....	20
1.1.5.	Sätze über das regelmäßige Tetraeder.....	22
1.1.6.	Lückenhafte Raumfüllung mit regelmäßigen Tetraedern.....	26
1.2.	<b>Gleichseitige Tetraeder</b> .....	29
1.2.1.	Eine erste Konstruktion gleichseitiger Tetraeder und erste Aussagen.....	29
1.2.2.	Eine zweite Konstruktion gleichseitiger Tetraeder und weitere Aussagen..	38
1.2.3.	Einige weitere Kennzeichnungen gleichseitiger Tetraeder.....	43
1.2.4.	Berechnungen am gleichseitigen Tetraeder.....	46
1.2.5.	Die besonderen Kugeln gleichseitiger Tetraeder.....	49
1.2.6.	Das Höhen-Hyperboloid gleichseitiger Tetraeder.....	57
1.3.	<b>Rechtwinklige Tetraeder</b> .....	63
1.3.1.	Konstruktionen rechtwinkliger Tetraeder.....	63
1.3.2.	Berechnungen an rechtwinkligen Tetraedern.....	69
1.3.3.	Räumliche Analogisierung des Pythagoras-Satzes.....	74
1.3.4.	Tetraeder mit „Pythagoras-Eigenschaft“.....	79
1.3.5.	Einige Ungleichungen an rechtwinkligen Tetraedern.....	87
1.4.	<b>„Rechteckige“ Tetraeder</b> .....	91
1.4.1.	Existenz und Eigenschaften rechteckiger Tetraeder.....	91
1.4.2.	Weitere Konstruktionen rechteckiger Tetraeder.....	93
1.4.3.	Berechnungen am rechteckigen Tetraeder.....	94
1.4.4.	Symmetrische rechteckige Tetraeder.....	99
2.	<b>Das allgemeine Tetraeder</b> .....	101
2.1.	<b>Tetraeder-Klassifikationen</b> .....	103
2.1.1.	Klassifikation nach Symmetrie-Eigenschaften.....	103
2.1.2.	Klassifikation nach Kantengleichheit.....	121
2.1.3.	Klassifikation nach Innenwinkeln der Seitendreiecke.....	125
2.1.4.	Klassifikation nach Winkeln zwischen zwei Seitendreiecken.....	130
2.1.5.	Abschließende Bemerkung zu den Klassifikationen nach Winkeln.....	136
2.2.	<b>Winkelmessungen am Tetraeder</b> .....	139
2.2.1.	Die Summe der Kantenwinkel eines Tetraeders.....	139
2.2.2.	Abschätzung der Flächenwinkel-Summe eines Tetraeders.....	139
2.2.3.	Abschätzung der Raumwinkel-Summe eines Tetraeders.....	143
2.3.	<b>Tetraederkonstruktionen</b> .....	149
2.3.1.	Tetraederkonstruktionen aus Seitendreiecken und Flächenwinkeln.....	149
2.3.2.	Kongruenzsätze für Tetraeder mittels Seitendreiecken und Flächenwinkel .....	155
2.3.3.	Tetraederkonstruktionen aus Kanten und Kantenwinkeln.....	156
2.3.4.	Konstruktionen ähnlicher Tetraeder aus Kantenwinkeln.....	160
2.3.5.	Ähnlichkeitssätze über Tetraeder mittels Flächen- und Kantenwinkel.....	166

2.4.	<b>Die Umkugel des Tetraeders</b> .....	169
2.4.1.	Die Mittelsenkrechte einer Dreiecksfläche.....	169
2.4.2.	Konstruktion der Umkugel des Tetraeders.....	171
2.4.3.	Zur Lage des Umkugelmittelpunkts.....	173
2.4.4.	Der Umkugelradius als Term aus den Kantenlängen.....	175
2.4.5.	Eine analytische Berechnung der Lage des Umkugelmittelpunkts.....	183
2.5.	<b>Die Inkugel des Tetraeders</b> .....	187
2.5.1.	Abstandsgleiche Halbebenen.....	187
2.5.2.	Kanten- und Flächenabstandsgleiche einer dreikantigen Ecke.....	188
2.5.3.	Konstruktion der Inkugel des Tetraeders.....	192
2.5.4.	Analogien zwischen Um- und Inkreisen und Um- und Inkugeln.....	195
2.5.5.	Der Inkugelradius des Tetraeders.....	198
2.5.6.	Eine Beziehung zwischen In- und Umkugelradius des Tetraeders.....	198
2.5.7.	Tetraeder-Teilung durch Flächenabstandsgleiche und Flächenwinkel- halbierende.....	199
2.5.8.	Eine analytische Berechnung der Lage des Inkugelmittelpunkts.....	201
2.5.9.	Ein Satz über die Winkel an den Inkugel-Berührungspunkten.....	202
2.6.	<b>Die flächenberührenden Kugeln des Tetraeders</b> .....	205
2.6.1.	Die Raumteilung mittels eines Tetraeders.....	205
2.6.2.	Die flächenberührenden Kugeln und ihre Radienbeziehungen.....	206
2.6.3.	Zusammenfassung über die flächenberührenden Kugeln.....	216
2.7.	<b>Der Schwerpunkt des Tetraeders</b> .....	217
2.7.1.	Konstruktion des Tetraeder-Schwerpunkts.....	217
2.7.2.	Vektorielle Berechnung des Schwerpunkts.....	219
2.7.3.	Das Schwerpunktetetraeder.....	221
2.7.4.	Die Schwerpunktekugel.....	222
2.7.5.	Die Mittenparallelogramme und das Mittenoktaeder.....	223
2.7.6.	Beziehungen zwischen den Kanten eines Tetraeders und seinen Schwerlinien.....	226
2.8.	<b>Die physikalischen Schwerpunkte des Tetraeders</b> .....	229
2.8.1.	Die physikalischen Schwerpunkte des Dreiecks.....	231
2.8.2.	Der Ecken- und der Volumenschwerpunkt des Tetraeders.....	234
2.8.3.	Der Flächenschwerpunkt des Tetraeders.....	236
2.8.4.	Der Kantenschwerpunkt des Tetraeders.....	240
2.8.5.	Vektorielle Konstruktion der physikalischen Schwerpunkte.....	243
2.9.	<b>Die Höhen des Tetraeders</b> .....	247
2.9.1.	Aussagen über die Tetraederhöhen.....	247
2.9.2.	Der Punkt von Monge.....	254
2.9.3.	Das Höhen-Hyperboloid des Tetraeders.....	259
2.10.	<b>Berechnungen am Tetraeder</b> .....	263
2.10.1.	Die Standard-Volumenformel des Tetraeders.....	263
2.10.2.	Weitere Volumenformeln des Tetraeders.....	268
2.10.3.	Sinussätze am Tetraeder.....	279
2.10.4.	Kosinussätze am Tetraeder.....	281
2.10.5.	Einige vektorielle Berechnungsergebnisse am Tetraeder.....	289
2.11.	<b>Ungleichungen am Tetraeder</b> .....	291
2.11.1.	Von der Dreiecksungleichung zu Tetraederungleichungen.....	291
2.11.2.	Existenzaussagen für Tetraeder.....	296
2.11.3.	Anwendung von Standard-Ungleichungen.....	302

2.12.	<b>Die Sätze von Menelaos und Ceva</b> .....	303
2.12.1.	Der Satz von Menelaos für Dreiecke und für Tetraeder.....	303
2.12.2.	Der Satz von Ceva für Dreiecke und für Tetraeder.....	307
2.12.3.	Eine Anwendung des Satzes von CEVA auf Dreiecke und auf Tetraeder	314
2.13.	<b>Verschiedenes</b> .....	323
2.13.1.	Ebene Tetraederschnitte .....	323
2.13.2.	Minimierung der Tetraederoberfläche .....	337
2.13.3.	Der Lote-Satz von Jacob Steiner .....	350
2.13.4.	Satz von Miquel .....	360
2.13.5.	Der Satz von Desargues.....	366
3.	<b>Besondere Tetraeder (Fortsetzung)</b> .....	373
3.1.	<b>Tetraeder mit Höhenschnittpunkt (orthozentrische Tetraeder)</b> .....	375
3.1.1.	Einfache Konstruktionen orthozentrischer Tetraeder.....	375
3.1.2.	Lage des Höhenschnittpunkts.....	376
3.1.3.	Weitere Aussagen über orthozentrische Tetraeder .....	377
3.1.4.	Die Zwölfpunktekugeln .....	379
3.1.5.	Einige Berechnungen an orthozentrischen Tetraedern.....	388
3.2.	<b>Tetraeder mit kantenberührender Kugel</b> .....	395
3.2.1.	Notwendige Bedingungen für Tetraeder mit Kantenkugel-Eigenschaft....	395
3.2.2.	Hinreichende Bedingungen für ein Tetraeder mit Kantenkugel-Eigenschaft .....	396
3.2.3.	Konstruktion eines Tetraeders zu vorgegebener Kantenkugel .....	402
3.2.4.	Flächenwinkel-Kennzeichnung des Tetraeders mit Kantenkugel.....	404
3.2.5.	Formel für den Radius der Kantenkugel .....	406
3.2.6.	Beziehung des Tetraeders mit Kantenkugel zu den orthozentrischen und gleichseitigen Tetraedern .....	409
3.3.	<b>Tetraeder mit gleichen Gegenkantenprodukten (isodynamische Tetraeder)</b> .....	411
3.3.1.	Eine Konstruktion isodynamischer Tetraeder .....	411
3.3.2.	Beziehung isodynamischer Tetraeder zu anderen Tetraedertypen .....	411
3.3.3.	Kennzeichnungen isodynamischer Tetraeder.....	412
3.3.4.	Die Lemoine-Kreise und die Lemoine-Kugeln.....	415
	<b>Quellenverzeichnis</b> .....	419
	<b>Anhang</b> .....	435
	A1 Raumgeometrische Basisbegriffe und -aussagen .....	437
	A2 Geometrische Konstruktionen im Raum .....	449

Das Buch enthält **464 Seiten, 848 Abbildungen, 5 Diagramme, 11 Tabellen.**

Die raumgeometrischen Figuren sind mit Cabri 3D ([www.cabri.com](http://www.cabri.com)) konstruiert.

**Anlage: CD mit Buch als Hypertext, Cabri 3D (30-Tage-Version) und Handbuch**  
Hinweise zur Installation und Benutzung in der Liesmich-Datei auf der CD.

**ISBN 978-3-88120-520-7 (Buch mit CD), 978-3-88120-521-4 (nur CD)**

Verkaufspreis (Buch plus CD): 37,80 €; Verkaufspreis nur CD: 20,- €

**Verlag Franzbecker, Hildesheim und Berlin 2011**

<http://www.franzbecker.de>