Quellenverzeichnis-Ergänzung

Hartmann, M. (2007): **Analogisieren am Beispiel des Pythagoras**. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2007, Hildesheim: Franzbecker, 811-814.

Korrektur Seite 328-329

$$F_A^2 + F_B^2 + F_C^2 + F_D^2 = 2(F_A F_B \cos(CD) + F_B F_C \cos(AD) + F_C F_A \cos(BD) + F_A F_D \cos(BC) + F_B F_D \cos(CA) + F_C F_D \cos(AB)),$$

erhält man schließlich für die Schnittfläche, indem wir wieder $M_{c'}$ für M setzen

$$\boxed{4\,|M_{c'}AB|^2 = F_C^2 + F_D^2 + 2F_C F_D \cos(AB)} \quad (++).$$

Es ergeben sich einige unmittelbare Folgerungen

Die Schnittfläche ist höchstens so groß wie das arithmetische Mittel der Seitendreiecke, welche die Schnittkante gemein haben, z. B.

$$|M_{c'}AB| \le \frac{F_C + F_D}{2}.$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn die Seitenflächen zueinander senkrecht stehen.

Die Addition der der Schnittflächenquadrate für alle Kanten gemäß der Formel (++), führt mit entsprechenden Umformungen auf:

$$\boxed{|M_a DA|^2 + |M_b DB|^2 + |M_c DC|^2 + |M_{a'} BC|^2 + |M_{b'} CA|^2 + |M_{c'} AB|^2 = F_A^2 + F_B^2 + F_C^2 + F_D^2}$$

3) Viereckschnitte bei gleichem Teilverhältnis der Eckpunkte auf zwei Gegenkanten

Wir bringen zuerst ein Gegenbeispiel zu einem Satz aus **Altshiller-Court, N.:** Modern Pure Solid Geometry. New York: Chelsea Publishing 1964 (2. Auflage, spätere Auflagen sind Reprints), Seite 98:

"**280. Theorem.** *If a plane divides two opposite edges of a tetrahedron in a given ratio, it divides the volume of the tetrahedron in the same ratio."*
("Wenn eine Ebene zwei Gegenkanten eines Tetraeders in einem gegebenen Verhältnis teilt, teilt sie das Volumen des Tetraeders in demselben Verhältnis.")

In der **Abbildung 2.13.16** mit Bezeichnungen, die denen von Altshiller-Court entsprechen, ist ein mit vorgegebenen Kantenlängen konstruiertes Tetraeder zu sehen, bei dem zwar eine Ebene die Gegenkanten AB und CD mit den Teilpunkten P und P' im gleichen Verhältnis teilt, aber die beiden Teilkörpervolumina ein verschiedenes Verhältnis aufweisen. – In dem bei Altshiller-Court geführten Beweis wird als ein wesentliches Beweismittel der folgende, auf Seite 50 o. g. Buches stehende Hilfssatz falsch angewendet:

"**141. Converse Theorem.** *If a plane divides proportionally one pair of opposite sides of a skew quadrilateral, it also divides proportionally the other two sides."*
(*"Wenn eine Ebene zwei Gegenseiten eines räumlichen Vierecks proportional teilt, teilt sie auch die anderen zwei Seiten proportional."* – In einer Formulierung für Tetraeder: Wenn eine Ebene zwei Gegenkanten eines Tetraeders proportional teilt, teilt sie auch die zwei anderen Gegenkanten, welche sie schneidet, proportional.)

Selbst wenn man diesen Hilfssatz richtig anwendet, d. h., P' am Mittelpunkt von CD spiegelt, führt der Beweis nicht zu dem von Altshiller-Court angegebenen überraschend einfachen, aber falschen Ergebnis.

Bemerkung: Vorstehendes lehrt uns, dass man die Richtigkeit raumgeometrischer Aussagen und auch deren Beweise anhand von Beispielen überprüfen sollte. Die dazu notwendigen Konstruktionen können heute im virtuellen Raum mittels adäquater dynamischer 3D-Geometriesysteme, wie z. B. mit Cabri 3D, leicht ausgeführt werden.

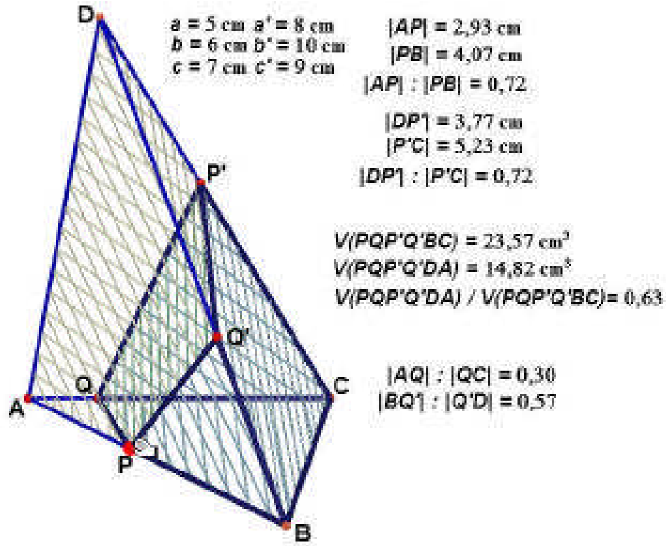

Abb. 2.13.16

Mit der Spezialisierung vorstehenden Hilfssatzes:

> ***Wenn eine Schnittebene durch die Mitten zweier Gegenkanten eines Tetraeders geht, dann teilen ihre Schnittpunkte mit den anderen sie schneidenden Gegenkanten diese in demselben Verhältnis, gemessen von den Endpunkten einer der halbierten Gegenkanten aus.***

kann man aber beweisen:

> ***Jede Schnittebene durch die Mitten zweier Gegenkanten eines Tetraeders halbiert dieses, d. h., sie zerlegt das Tetraeder in zwei Teilkörper gleichen Volumens.***

Illustration in **Abbildung 2.13.17** (für die Gegenkanten AB und CD)

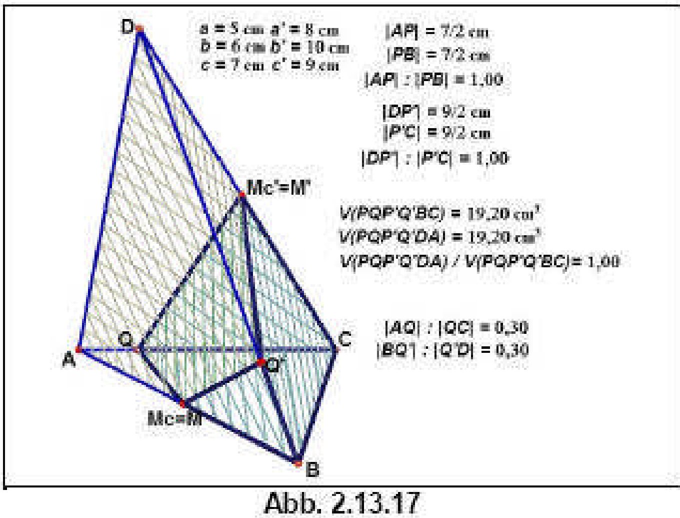

Abb. 2.13.17

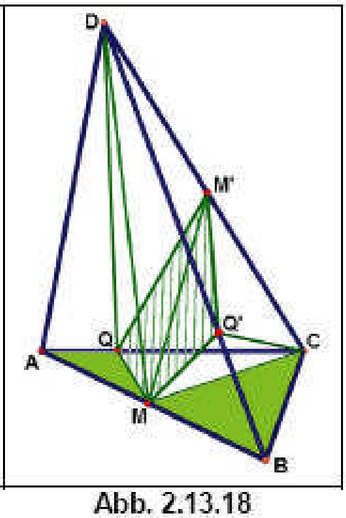

Abb. 2.13.18