

## **Modulares Arbeiten im Geometrieunterricht**

### **1 Einführung**

Die Zerlegung eines zu lösenden Problems in Teilprobleme und die Zusammensetzung der Lösungen dieser Teilprobleme zur Lösung des gesamten Problems ist eine der allgemeinen Methoden für das Problemlösen. Die Beherrschung der Methode des modularen Problemlösens ist Bestandteil der Methodenkompetenz für das Problemlösen.

Die Makro-Technik, das heißt die Zusammenfassung einzelner Arbeitsschritte zu einem einzigen Arbeitsschritt und dessen Symbolisierung und Referenzierbarkeit ist eine wesentliche Arbeitstechnik beim Einsatz von Computerwerkzeugen. Diese Technik unterstützt auch in computerisierten Lernumgebungen das modulare Problemlösen. In traditionellen Lernumgebungen wird das modulare Arbeiten durch das kleinschrittige und unökonomische Abarbeiten von Teillösungen nicht unterstützt. Das modulare Arbeiten wird eigentlich erst durch den Einsatz von Computerwerkzeugen mit der Möglichkeit der Definition von entsprechenden Makros realisierbar. Die mentale Repräsentation eines Arbeitsmoduls kann jetzt auf ein entsprechendes Makro abgebildet werden. Außerdem haben parametrisierte Makros den Vorteil, dass man sie flexibel an die jeweilige spezifische Problemstellung anpassen kann. Parametrisierte Makros stellen Lösungen allgemeiner (Teil-)Probleme dar, die einerseits zum Aufbau eines eigenen Repertoires an Problemlösungen dienen und die andererseits dem Problemlöser im Rahmen der Gestaltung einer Lernumgebung zur Verfügung gestellt werden können.

Mit dynamischen Geometrie-Systemen, die erlauben Makros zu definieren, kann deshalb auf vielfältige Weise modular gearbeitet werden u. a. bei der Zusammensetzung

- von Teilformen zu einer neuen Form
- von Teilkonstruktionen zu einer neuen Konstruktion
- von Teilberechnungen zu einer neuen Berechnung
- von Teilabbildungen zu einer neuen Abbildung
- von Teiltransformationen zu einer neuen Transformation.

Die Parameter der betreffenden Makros sind grafischer und/oder numerischer Art. Im folgenden illustrieren wir die Definition und Anwendung solcher Makros an

ausgewählten Beispielen unter Verwendung von Cabri Géomètre II, dessen Makro-Konzept für unsere Zwecke besonders geeignet ist. Wir beschränken uns dabei auf Makros erster Stufe, d. h. auf Makros, zu deren Definition nur eigene Konstruktionen und bereits fest implementierte Makros verwendet werden.

## 2 Beispiele für das modulare Arbeiten

### 2.1 Formen aus Formen

Beispiel (Netze (halb-)regelmäßiger konvexer Polyeder): Ein Netz des gestumpften Würfels ist aus gleichseitigen Dreiecken und regelmäßigen Achtecken zusammengesetzt. Zur Definition der entsprechenden Formenmakros konstruieren wir zuerst ein gleichseitiges Dreieck und ein regelmäßiges Achteck, so dass jeweils zwei benachbarte Eckpunkte Parameter sind (Ergebnis in Abbildung 1.1). Wir setzen mit dem Formenmakro „Regelmäßiges Achteck“ passend Achtecke aneinander (Abb. 1.2), um dann die regelmäßigen Dreiecke mittels des Makros „Gleichseitiges Dreieck“ anzufügen (Abb.1.3). Dabei kontrollieren wir durch gedankliches Auffalten oder sogar durch Ausdrucken, Ausschneiden und manuelles Auffalten, ob wir wirklich ein Netz des gestumpften Würfels konstruiert haben. Die Abbildung 1.4 zeigt ein falsches Netz. Die Verwendung solcher Formenmakros unterstützt auch das Lösen entsprechender offener Aufgaben, in unserem Beispiel die Konstruktion vieler verschiedener Netze.

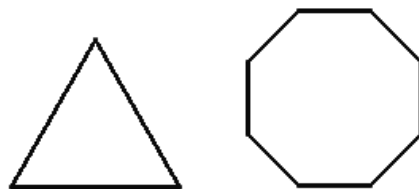


Abb. 1.1

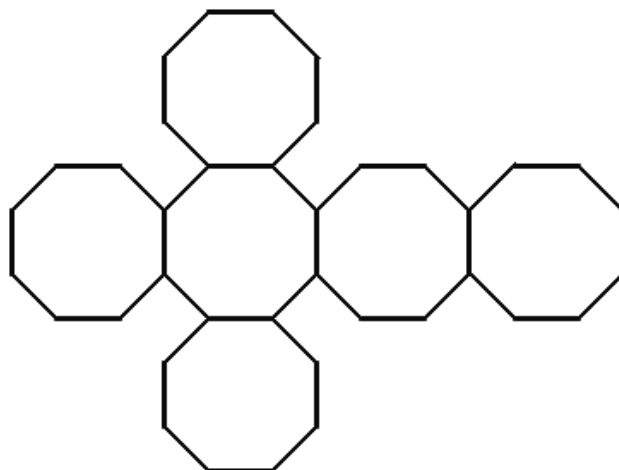


Abb. 1.2

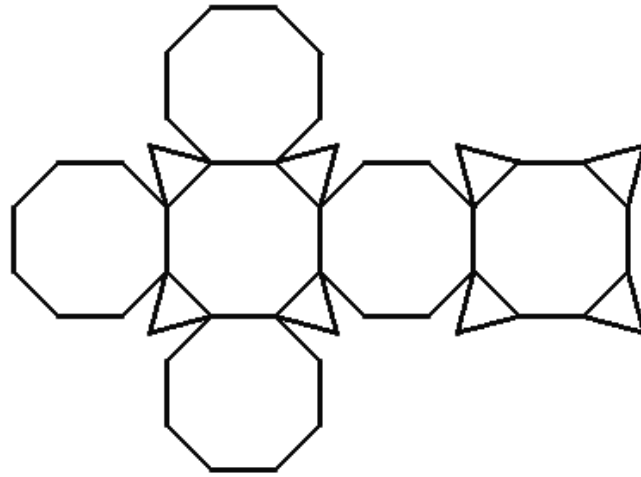


Abb. 1.3

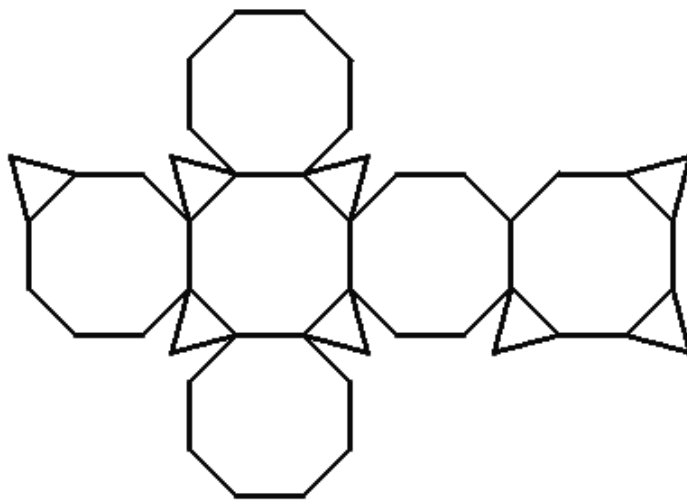


Abb. 1.4

## 2.2. Konstruktionen aus Konstruktionen

Beispiel (Eine Satzfindung): Zu jedem Viereck  $A_1A_2A_3A_4$  gibt es die vier Dreiecke  $A_1A_2A_3$ ;  $A_2A_3A_4$ ;  $A_3A_4A_1$ ;  $A_4A_1A_2$ , in die besondere Linien und Punkte eingezeichnet werden können. Es soll z.B. untersucht werden, ob die gleichartigen Punkte in den vier Dreiecken Eckpunkte eines besonderen Vierecks sind. Indem man für die Konstruktion besonderer Punkte im Dreieck entsprechende Makros definiert, lassen sich solche Untersuchungen ökonomisch durchführen.

Im Sehnenviereck ist zu untersuchen, welche Eigenschaften das Viereck aus den Mittelpunkten des Inkreises der vier Dreiecke, die zum Viereck  $A_1A_2A_3A_4$  gehören, hat. Dazu wird ein Makro definiert, mit dem für jedes Dreieck der Inkreis mit seinem Mittelpunkt konstruiert werden kann (Abb. 2.1). Dieses Makro wenden wir auf die vier Dreiecke an (Abb.2.2) und erhalten ein entsprechendes Viereck, das durch

Ausmessen und Variation von A1A2A3A4A5A6 als Rechteck identifiziert wird. Mittels eines Makros „Rechteck“ (Figurenüberprüfung mittels Kongruenz –auch eine Anwendung von Konstruktionsmakros!) oder mittels Eigenschaftsprüfung (Orthogonalität und Äquidistanz) wird diese Vermutung erhärtet (Abb.2.3). Wenn das Sehnenviereck die Form eines Drachens hat, so ist das Rechteck sogar quadratisch (Abb.2.4). Die Umkehrung dieser Aussage ist falsch (Gegenbeispiel durch geeignetes Verziehen von Eckpunkten des Sehnenvierecks). Abschließend könnte man ein Makro definieren, das zu einem Sehnenviereck gleich dieses Rechteck konstruiert.

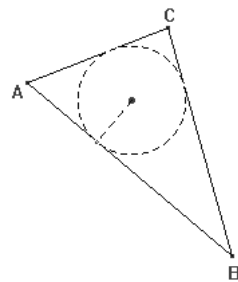


Abb. 2.1

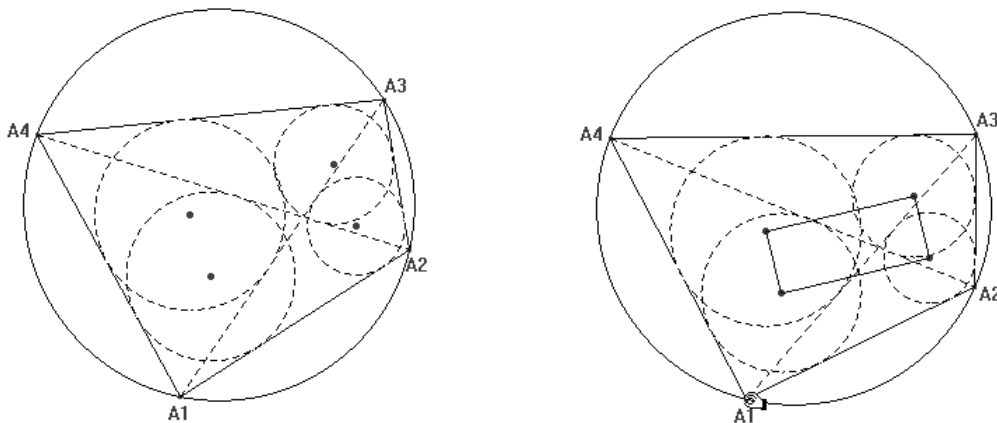


Abb. 2.2/3

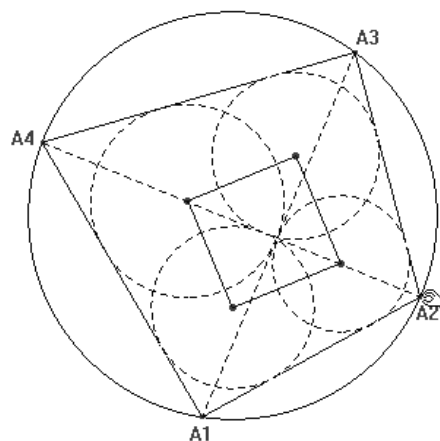


Abb. 2.4

## 2.3 Berechnungen aus Berechnungen

Beispiel (aus der Flächeninhaltslehre): Die automatische Berechnung des Flächeninhalts von Polygonen soll transparent gemacht werden. Dazu bestimmt man zuerst den Flächeninhalt des Dreiecks z.B. folgendermaßen: Das Dreieck ABC wird am Mittelpunkt  $M_a$  von BC gespiegelt und so zu einem Parallelogramm doppelten Flächeninhalts ergänzt. Mittels der als bekannt vorausgesetzten Inhaltsformel für das Parallelogramm ist  $|ABC|=c \cdot h_c / 2$  (Abb.2.1). Ein entsprechendes Makro mit dem Parameter Dreieck gibt das Maß für den Inhalt des Dreiecks an, der mit dem Wert der Messautomatik übereinstimmt. Jetzt zeichnen wir z.B. ein „sternförmiges“ Sechseck A1A2A3A4A5A6, d. h. ein Sechseck, das sich von einem Punkt P aus triangulieren lässt (Abb. 3.2). Dann bestimmen wir den Flächeninhalt des Sechsecks als Summe der Inhalte seiner Teildreiecke. Der so bestimmte Inhalt ist gleich dem automatisch mit der Messoption berechneten. Eine geeignete Lageänderung von P ändert am Ergebnis nichts (Abb. 3.3). Falls P wie in Abbildung 3.4 verzogen wird, so ergibt sich ein größerer Inhalt, denn das Dreieck A1A6P wird doppelt gezählt, einmal für sich und einmal als Teildreieck von A1A2P. Verändert man das Sechseck so, dass es keinen Punkt mehr gibt, von dem aus es trianguliert werden kann, versagt unsere Formel generell (Abb. 3.5) und wir müssen nach anderen Lösungen Ausschau halten, z.B. nach der Gaußschen Inhaltsformel für geschlossene Polygone (dazu ist das Polygon aber in ein Koordinatensystem einzubetten)...

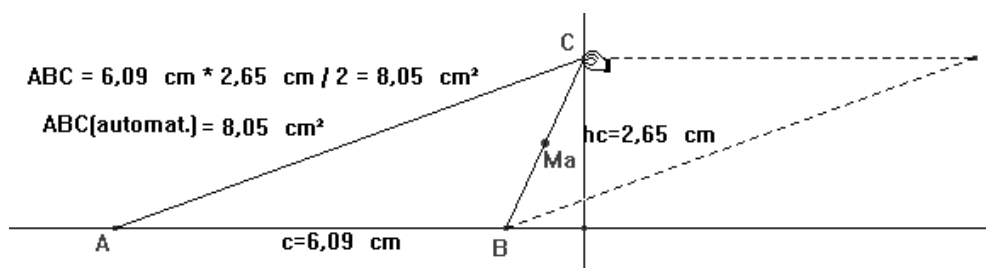
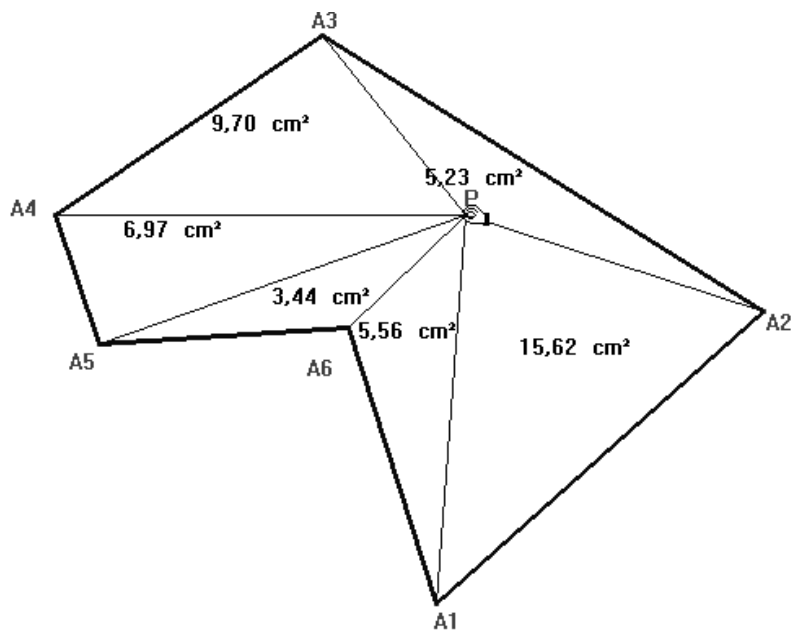


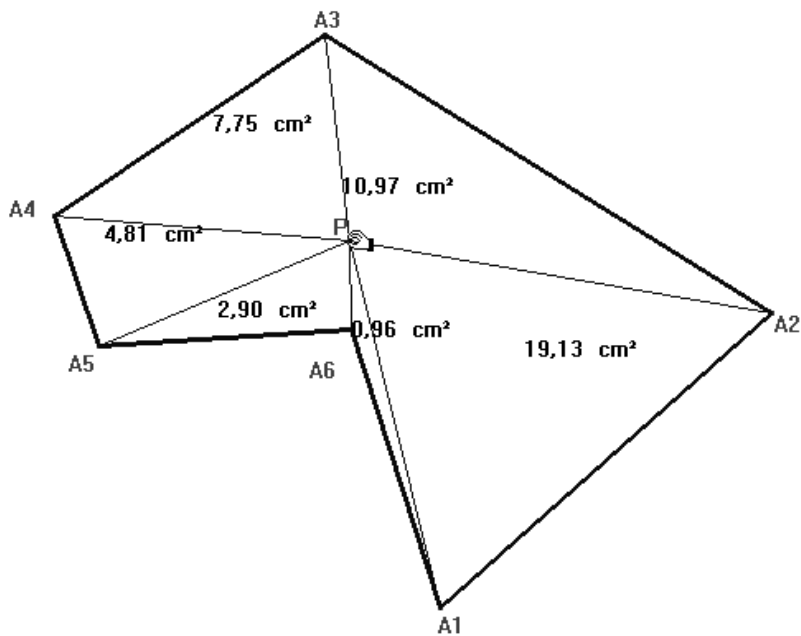
Abb. 3.1



$$A1A2A3A4A5A6 = 15,62 \text{ cm}^2 + 5,23 \text{ cm}^2 + 9,70 \text{ cm}^2 + 6,97 \text{ cm}^2 + 3,44 \text{ cm}^2 + 5,56 \text{ cm}^2 = 46,52 \text{ cm}^2$$

$$A1A2A3A4A5A6(\text{automat.}) = 46,52 \text{ cm}^2$$

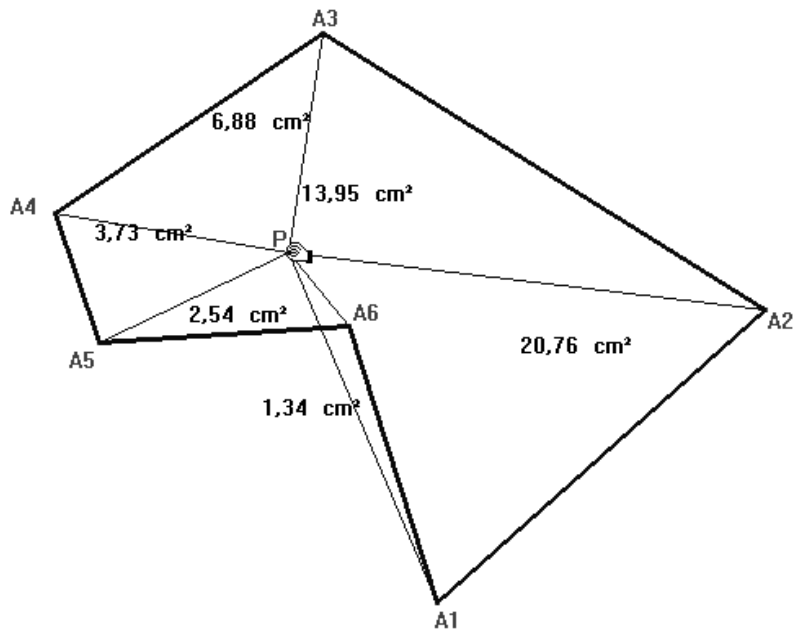
Abb. 3.2



$$A1A2A3A4A5A6 = 19,13 \text{ cm}^2 + 10,97 \text{ cm}^2 + 7,75 \text{ cm}^2 + 4,81 \text{ cm}^2 + 2,90 \text{ cm}^2 + 0,96 \text{ cm}^2 = 46,52 \text{ cm}^2$$

$$A1A2A3A4A5A6(\text{automat.}) = 46,52 \text{ cm}^2$$

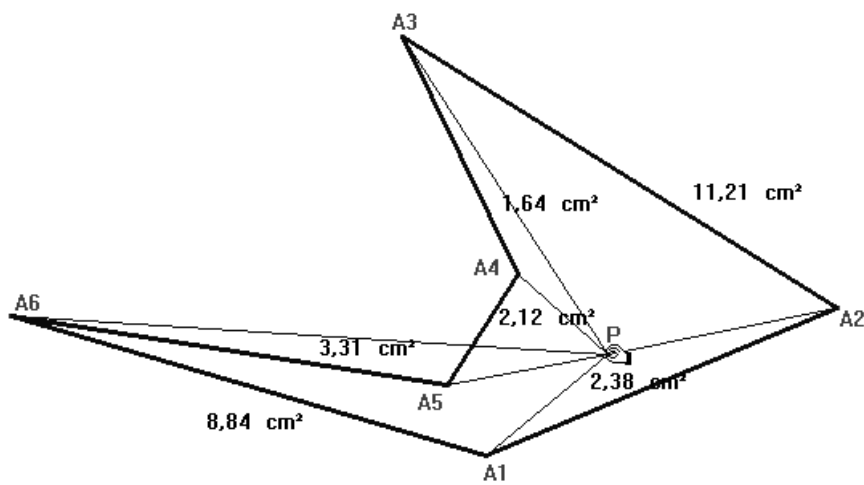
Abb. 3.3



$$A1A2A3A4A5A6 = 20,76 \text{ cm}^2 + 13,95 \text{ cm}^2 + 6,88 \text{ cm}^2 + 3,73 \text{ cm}^2 + 2,54 \text{ cm}^2 + 1,34 \text{ cm}^2 = 49,20 \text{ cm}^2$$

$$A1A2A3A4A5A6[\text{automat.}] = 46,52 \text{ cm}^2$$

Abb. 3.4



$$A1A2A3A4A5A6 = 2,38 \text{ cm}^2 + 11,21 \text{ cm}^2 + 1,64 \text{ cm}^2 + 2,12 \text{ cm}^2 + 3,31 \text{ cm}^2 + 8,84 \text{ cm}^2 = 29,51 \text{ cm}^2$$

$$A1A2A3A4A5A6[\text{automat.}] = 22,88 \text{ cm}^2$$

Abb. 3.5

## 2.4 Abbildungen aus Abbildungen

Einfache Abbildungen können zu komplexeren zusammengefasst werden. So. z.B. erhalten wir die Kongruenzabbildungen als Produkte von Geradenspiegelungen oder die Ähnlichkeitsabbildungen als Produkte von zentrischer Streckung mit Rotation, Translation und Spiegelung usw.

Produkte von Abbildungen sind als Makros definierbar. Die Parameter der einzelnen Abbildungen bilden die Parameter der zusammengesetzten Abbildung. Entsprechende Abbildungsmakros dienen der Figurenerzeugung, dem Studium von Abbildungen und von Beziehungen zwischen Originalfigur und Bildfigur (etwa bei abbildungsgeometrischen Beweisen).

Beispiel: Die Drehstreckung eines Dreiecks mit Drehzentrum  $M$  und Drehwinkel  $\alpha$  und Streckzentrum  $ZS$  und Streckfaktor  $k$  (Abb. 4.1) definieren wir als Abbildungsmakro, das zu einem beliebigen Dreieck bei Vorgabe der Abbildungsparameter ein Bilddreieck konstruiert (Abb.4.2).

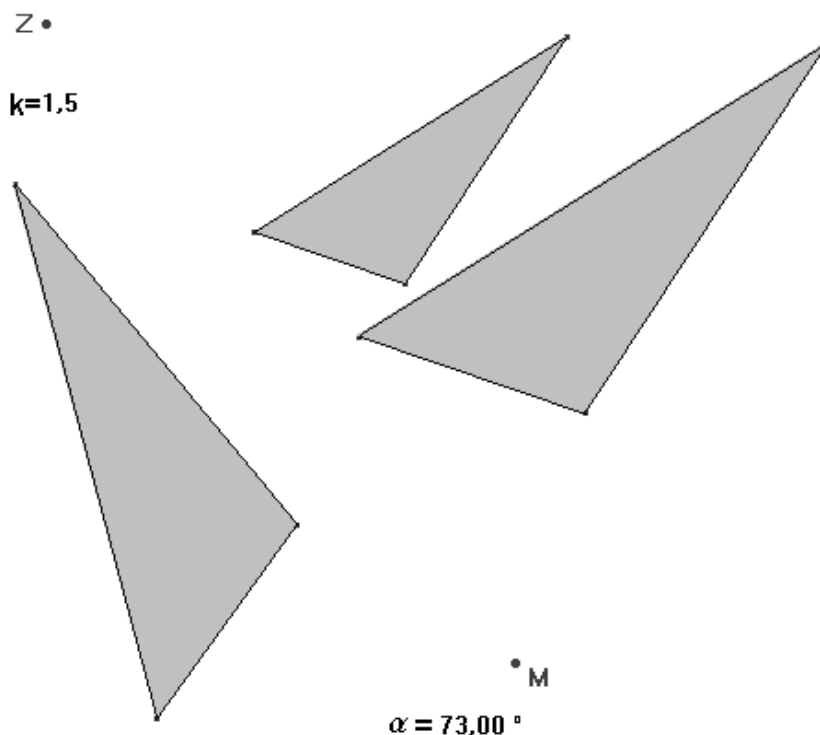


Abb. 4.1



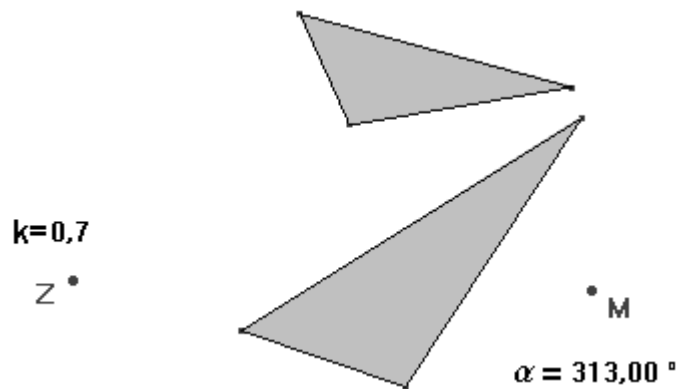


Abb. 4.2

Wir benutzen nun das Drehstreckungsmakro mit zusammenfallendem Dreh- und Streckzentrum, um einen Satz aus der Dreieckslehre zu finden und gleichzeitig zu begründen: Auf das Dreieck  $ABC$  wird eine Drehstreckung bei geeigneter Parameterwahl so angewendet, dass es von seinem Bilddreieck  $A'B'C'$  sechsmal geschnitten wird (Abb. 5.1). Die Innenwinkel des Dreiecks  $ABC$  stimmen mit den Innenwinkeln von  $A'B'C'$  überein, da es sich um ähnliche Dreiecke handelt.

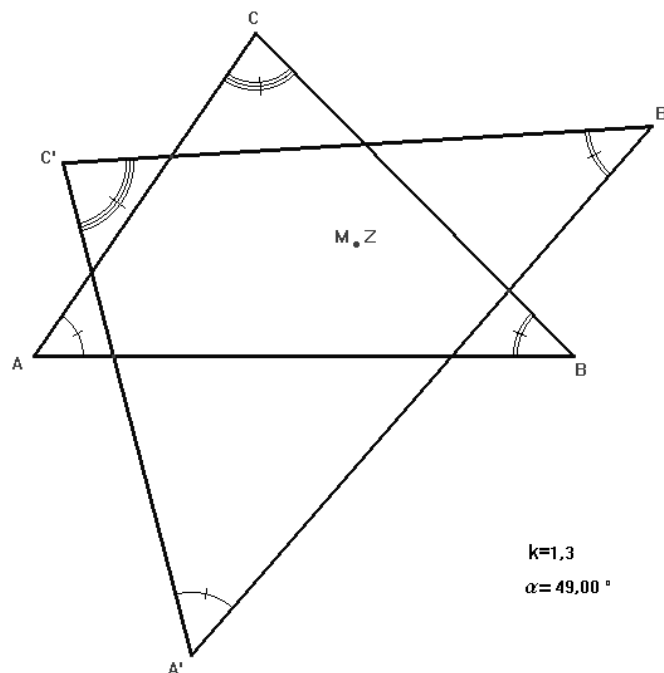


Abb. 5.1

Durch Schnitt von  $AB$  mit  $A'B'$ ,  $BC$  mit  $B'C'$ ,  $CA$  mit  $C'A'$  entstehen die Punkte  $D, E, F$ . Über den Strecken  $DE, EF, FD$ , die wir als Sehnen auffassen, sind jeweils die Winkel mit den Scheiteln  $B, B'$  bzw.  $C, C'$  bzw.  $A, A'$  gleich. Nach der Umkehrung des Umfangwinkelsatzes müssen deshalb die Punkte  $D, B, B', E$ ;  $E, C, C', F$ ;  $F, A, A', D$  jeweils auf einem Kreis liegen, was wir mittels des 3-Punkte-Kreis-Makros bestätigen

(Abb. 5.2). Diese Kreise haben das Drehstreckzentrum gemein; das sich auf diese Weise konstruieren lässt, was hier vorausgesetzt werden soll ( zur Bestimmung des Zentrums genügt die Konstruktion von zwei der drei Kreise). –Die Mittelpunkte MAA'D, MBB'E, MCC'F der Kreise bilden wieder ein Dreieck, das ähnlich zum Dreieck ABC ist (Abb. 5.3 mit variierten Parametern, ohne Begründung).

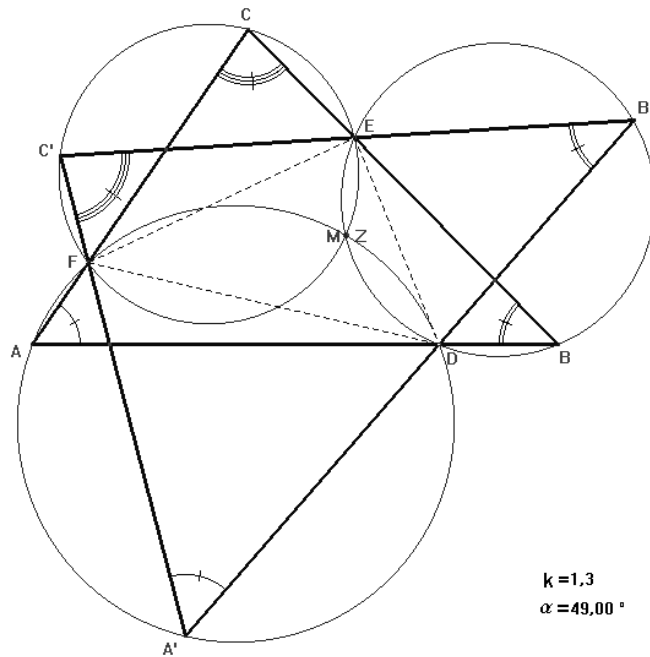


Abb. 5.2

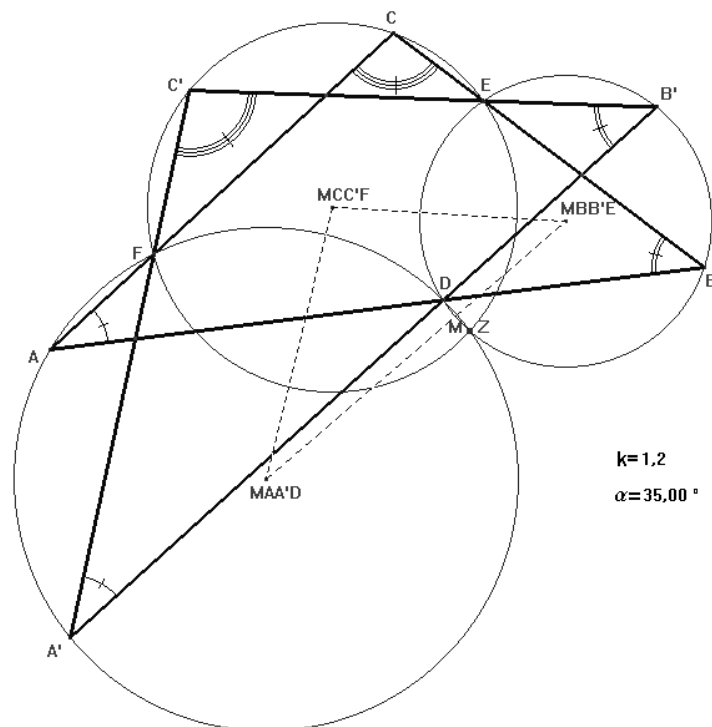


Abb. 5.3

## 2.5 Transformationen aus Transformationen

Über die Standardabbildungen hinaus gibt es Figurentransformationen bei deren Ausführung die Makrotechnik mit Erfolg angewendet werden kann.

Wir demonstrieren das am Beispiel der umfangsinvarianten aber flächenvergrößernden Transformation von Vierecken, einem Beispiel für sogenannte isoperimetrische Probleme.

Jedes Viereck ABCD (Abb. 6.1) lässt sich durch eine innere Diagonale in zwei Dreiecke zerlegen, von denen jedes zu einem umfangsgleichen, aber flächengrößeren gleichschenkligen Dreieck, die die Diagonale als Basis hat, verwandelt werden kann, falls es nicht schon gleichschenklilig ist (Abb. 6.2).

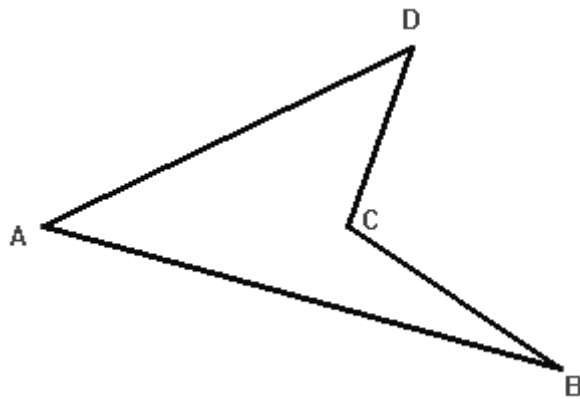


Abb. 6.1

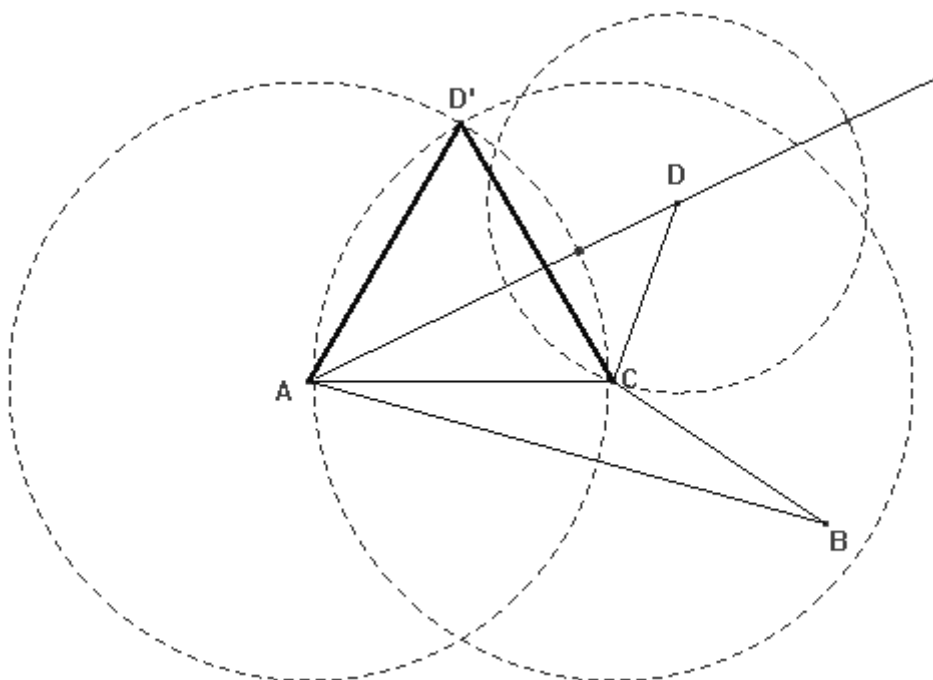


Abb. 6.2

Diese Verwandlung definieren wir als Makro und wenden es zweimal an, um aus einem (nicht drachenförmigen) Viereck einen umfangsgleichen und flächengrößeren Drachen zu machen (Abb. 6.3). Den (nicht rautenförmigen) Drachen transformieren wir auf die gleiche Weise in eine umfangsgleiche und flächengrößere Raute (Abb. 6.4), zu der wir in ein umfangsgleiches und flächengrößeres Quadrat konstruieren (Abb. 6.5; wenn man die Raute als Gelenkviereck auffasst, so ist ihr Aufrichten zum Quadrat gut vorstellbar).

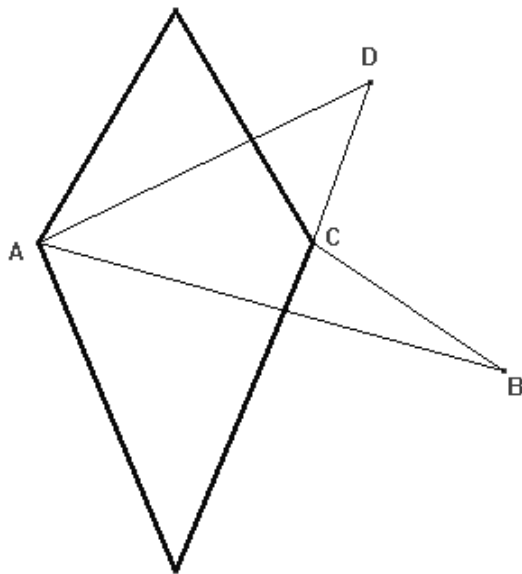


Abb. 6.3

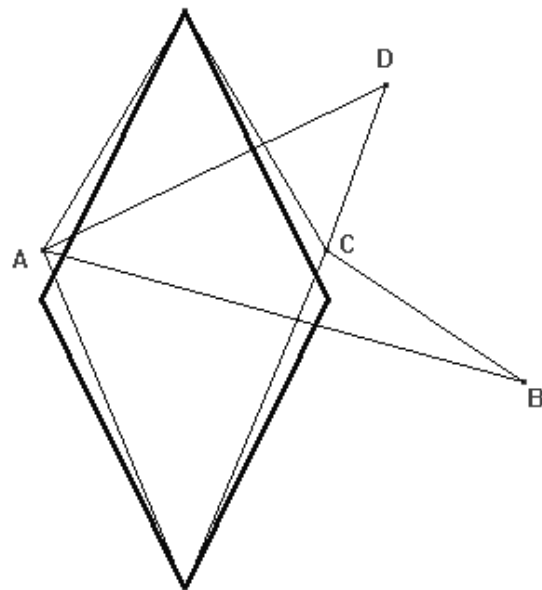


Abb. 6.4

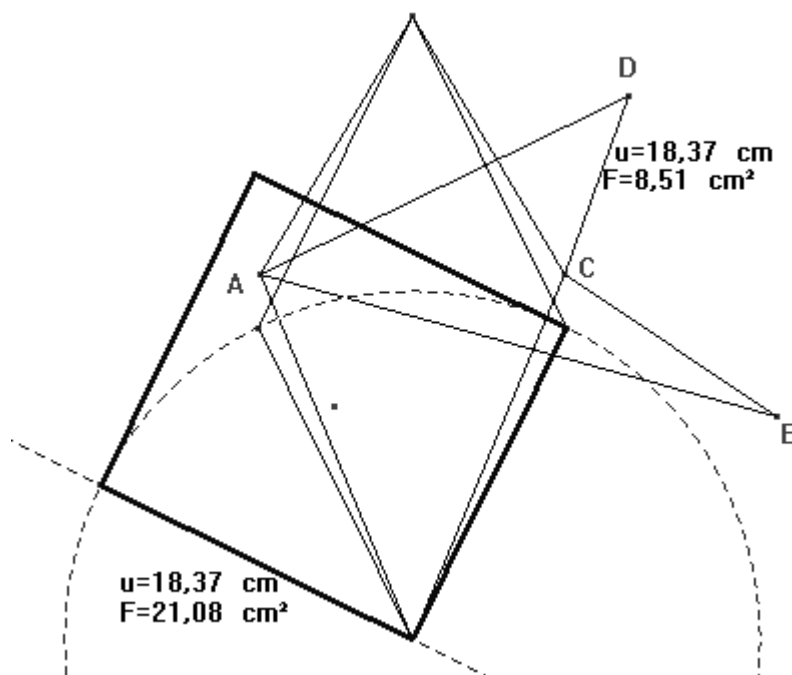


Abb. 6.5

Schließlich wird ein Makro definiert, das zu jedem Anfangsobjekt (nichtquadratisches) Viereck das umfangsgleiche, aber flächengrößere Quadrat erzeugt; das Makro wird dabei so definiert, dass auch noch die Maßzahlen für den Umfang und die Flächeninhalte, an denen man den Flächengewinn ablesen kann, ausgegeben werden. Mit diesem Makro können wir nun auf experimentelle Weise zeigen, dass unter den Vierecken mit dem Umfang  $u_0$  das Quadrat mit der Seitenlänge  $u_0/4$  den größten Inhalt hat (Abb. 6.6/7).

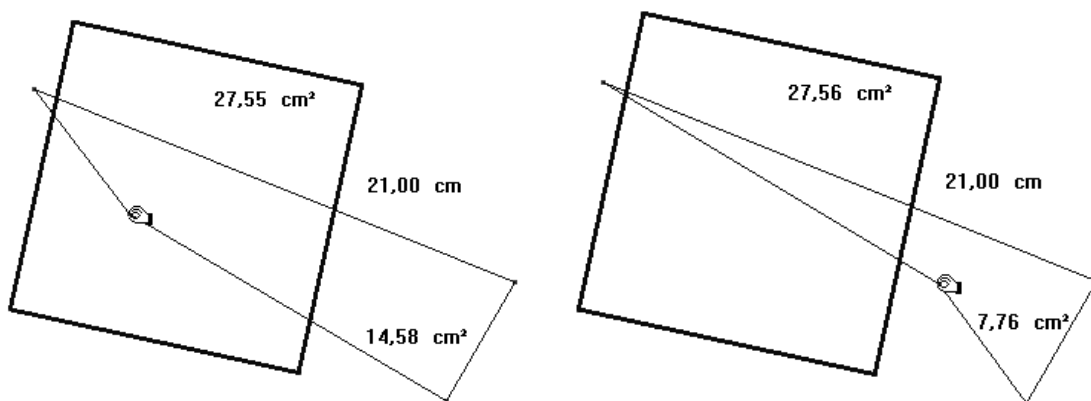


Abb. 6.6/7

Das zu diesem duale Problem, ein Viereck in das inhaltsgleiche, aber umfangsminimale Quadrat zu transformieren, kann makrotechnisch auf ähnliche Weise gelöst werden.

**Zusatz:** Die in Dynamischen Geometrie-Systemen definierten Makros basieren alle auf einer figuralen Repräsentation. Im Falle des modularen geometrischen Berechnens können wir uns von dieser figuralen Repräsentation lösen, indem wir z. B. das algebraische Makro-Konzept von DERIVE verwenden. Das verdeutlichen wir an folgendem Aufgabenbeispiel:

Von einem Quader sind die Länge ( $l = 5 \text{ cm}$ ), die Oberfläche ( $O = 120 \text{ m}^2$ ) und das Volumen ( $V = 80 \text{ cm}^3$ ) bekannt. Bestimme die Größe der restlichen Kanten ( $b$ ,  $h$ ), den Inhalt  $b \times h$  des Seitenflächenrechtecks  $b$  auf  $h$ , die Länge der Raumdiagonalen  $d$  des Quaders und den Winkel  $\alpha$  zwischen der durch  $b$  und  $l$  festgelegten Flächendiagonalen und der entsprechenden Raumdiagonalen in Abhängigkeit von  $l$ ,  $O$ ,  $V$ .

Lösung mit Derive unter Verwendung von Berechnungsmakros:

Wir geben die Oberflächen- und Volumenformel des Quaders ein (Ausdruck, Zeile 1/2), lösen  $O$  nach  $b$  und  $V$  nach  $h$  auf; substituieren  $h$  in  $b$ , und lassen die Gleichung

nach  $b$  auflösen. (Wegen der zwei Lösungen handelt es sich um eine quadratische Gleichung, was wir aber erst nach Umformung erkennen könnten; DERIVE erkennt übrigens nicht, dass  $O^2l^2 - 4OVI + 4V^2$  faktorisiert werden kann.) Durch Rücksubstitution gibt es auch für  $h$  zwei Lösungen. Wir erkennen, dass die Lösungspaare  $b, h$  bis auf Vertauschung übereinstimmen, es also nur ein Quader mit den gegebenen Größen existieren kann.

In Zeile 9/10 definieren wir  $b$  und  $h$  als von  $l, O$  und  $V$  abhängige Berechnungsmakros. Das Einsetzen der gegebenen Werte in diese Terme liefert die ebenfalls die gesuchten Kantenlängen, exakt und näherungsweise (Zeile 11-16). Existiert immer ein Quader für vorgegebene Werte  $l, O, V$ ? – Eine notwendige Bedingung für die Existenz: der Radikand muss größer/gleich null sein (Zeile 17); so z.B. gibt es für  $l = 5, O = 100, V = 80$  keinen Quader, denn die Oberfläche ist zu klein gewählt, um das Volumen quaderförmig einzupacken (Zeile 18/19).

$$\#1: O = 2 \cdot (l \cdot b + b \cdot h + h \cdot l)$$

$$\#2: V = l \cdot b \cdot h$$

$$\#3: \left[ b = \frac{O - 2 \cdot h \cdot l}{2 \cdot (h + l)} \right]$$

$$\#4: \left[ h = \frac{V}{b \cdot l} \right]$$

$$\#5: \left[ b = \frac{O - 2 \cdot \frac{V}{b \cdot l} \cdot l}{2 \cdot \left( \frac{V}{b \cdot l} + l \right)} \right]$$

$$\#6: \left[ b = \frac{\sqrt{(O^2 \cdot l^2 - 4 \cdot O \cdot V \cdot l + 4 \cdot V^2 - 16 \cdot V \cdot l^3)} + O \cdot l - 2 \cdot V}{4 \cdot l^2}, b = - \frac{\sqrt{(O^2 \cdot l^2 - 4 \cdot O \cdot V \cdot l + 4 \cdot V^2 - 16 \cdot V \cdot l^3)} - O \cdot l + 2 \cdot V}{4 \cdot l^2} \right]$$

$$\#7: \left[ h = - \frac{\sqrt{(O^2 \cdot l^2 - 4 \cdot O \cdot V \cdot l + 4 \cdot V^2 - 16 \cdot V \cdot l^3)} - O \cdot l + 2 \cdot V}{4 \cdot l^2} \right]$$

$$\#8: \left[ h = \frac{\sqrt{(O^2 \cdot l^2 - 4 \cdot O \cdot V \cdot l + 4 \cdot V^2 - 16 \cdot V \cdot l^3)} + O \cdot l - 2 \cdot V}{4 \cdot l^2} \right]$$

$$\#9: b(l, O, V) := \frac{\sqrt{(O^2 \cdot l^2 - 4 \cdot O \cdot V \cdot l + 4 \cdot V^2 - 16 \cdot V \cdot l^3)} + O \cdot l - 2 \cdot V}{4 \cdot l^2}$$

$$\#10: h(l, O, V) := - \frac{\sqrt{(O^2 \cdot l^2 - 4 \cdot O \cdot V \cdot l + 4 \cdot V^2 - 16 \cdot V \cdot l^3)} - O \cdot l + 2 \cdot V}{4 \cdot l^2}$$

Nun verwenden wir mit Vorteil gegenüber dem händischen Rechnen Berechnungsmakros, um  $b_xh(l,O,V)$ ,  $d(l,O,V)$ ,  $\alpha(l,O,V)$  zu bestimmen: In Zeile 20 ist  $b_xh$  als Makro mittels der Makros für  $b$  und  $h$  definiert. Das Makro für die Länge der Raumdiagonalen erhält man mit Hilfe des Pythagoras-Satzes aus  $l$  und den Makros für  $b$  und  $h$  (Zeile 23). Das Makro für den Winkel  $\alpha$  zwischen Flächen- und Raumdiagonale enthält  $d$  als Makro von Makros (Zeile 26). – Den Inhalt der definierten Berechnungsmakros, die quasi als Black-Boxes verwendet werden, kann man mittels „Vereinfachen“ ausgeben; so ergibt sich z. B. für  $\alpha(l,O,V)$  ein recht komplexer Term.

```
#11: b(5, 120, 80)
#12:  $\frac{2 \cdot \sqrt{21}}{5} + \frac{22}{5}$ 
#13: 6.23303
#14: h(5, 120, 80)
#15:  $\frac{22}{5} - \frac{2 \cdot \sqrt{21}}{5}$ 
#16: 2.56696
#17:  $0 \cdot 1^2 - 4 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 1 + 4 \cdot 0^2 - 16 \cdot 0 \cdot 1^3 \geq 0$ 
#18:  $100 \cdot 5^2 - 4 \cdot 100 \cdot 80 \cdot 5 + 4 \cdot 80^2 - 16 \cdot 80 \cdot 5^3 \geq 0$ 
#19: false
#20:  $b_xh(1, 0, U) := b(1, 0, U) \cdot h(1, 0, U)$ 
#21:  $b_xh(5, 120, 80)$ 
#22: 16
#23:  $d(1, 0, U) := \sqrt{(1^2 + b(1, 0, U)^2 + h(1, 0, U)^2)}$ 
#24:  $d(5, 120, 80)$ 
#25: 8.39285
#26:  $\alpha(1, 0, U) := \text{ASIN}\left(\frac{h(1, 0, U)}{d(1, 0, U)}\right)$ 
#27:  $\alpha(5, 120, 80)$ 
#28: 17.8093
```

### 3 Schlussbemerkung

Beim (modularen) Lösen von Aufgaben mit Unterstützung von Computerwerkzeugen in der Art von Anwenderprogrammen kann man im allgemeinen nur sequentielle Algorithmen abarbeiten. Es fehlen Kontrollstrukturen – wie sie in den standardisierten Programmiersprachen (z.B. in BASIC und in LOGO) oder auch in spezifischen Benutzersprachen (z.B. in Derive) verfügbar sind – für die Wiederholung gleichförmiger Arbeitsschritte und für die Auswahl von Arbeitsschritten. Das Fehlen kann in herkömmlichen Lernumgebungen oder in Anwenderprogramm-Lernum-

gebungen zu zeitaufwendigen oder sogar zu überhaupt nicht ausführbaren Lösungen gewisser Aufgaben führen. Für die Lösung solcher Aufgaben ist der Einsatz von Programmierwerkzeugen unumgänglich. Handelt es sich um eine modular zu lösende Aufgabe, so kommt die Unterprogramm-Technik zum Tragen.

#### **4 Literatur**

Abelson, H. (1983): Einführung in LOGO. Vaterstetten: IWT

Baumann, R. (1996): Didaktik der Informatik. Stuttgart: Klett

Kutzler, B. (1997): Einführung in Derive für Windows. Hagenberg: bk teachware

Laborde, J.-M., Bellemain, F. (1994-1996),: Cabri géomètre II. – Université Joseph Fourier. Grenoble. Deutsche Bearbeitung (German adaptation by) von H. Schumann, Freising: Texas Instruments 1996

Schumann, H.(1991): Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer. Stuttgart:Teubner&Metzler.

Weth, T. (1992): Computerunterstütztes modulares Konstruieren im Geometrie-Unterricht. In: ZDM (24) 4, S. 148-153