Heinz Schumann

Konstruktion von Polyedermodellen mit Cabri 3D im Umfeld der platonischen Körper

Vielfältige Verfahren – vielfältige Produkte

0. Einleitung

Bei der interaktiven Konstruktion von Polyedermodellen im virtuellen Raum, hier durch direkte Manipulation von räumlich wahrgenommenen raumgeometrischen Objekten, kann unterschieden werden zwischen

1) der **Konstruktion** von Polyedermodellen **aus zweidimensionalen Objekten**

a) **mittels exakter Konstruktion**:
Zirkel- und Linealkonstruktionen in Ebenen, Kugelzirkel- und Ebenenlineal-Konstruktionen im Raum, Konstruktion mittels ebener und räumlicher Kongruenzabbildungen als Makros aus vorstehenden Konstruktionen
(Sicherung der konstruktiven Existenz des konstruierbaren Polyeders)
b) **mittels dynamischer Passung** zu einem Polyeder durch Verziehen von Punkten
c) mittels Verräumlichen ebener Objekte zu Polyedern durch **Auffalten** von Netzen, **Extrudieren** (Flächenverschieben) und **Rotieren** von Flächenfacetten
d) **mittels Kombinationen** aus den vorstehenden Konstruktionsarten;

2) der **Konstruktion** von Polyedermodellen **aus bzw. an schon vorhandenen Polyedermodellen**

a) mittels der Booleschen Operationen (Vereinigung, Durchdringung, Differenz). Dynamische Boolesche Operationen sind wegen des bei der Realzeitverarbeitung anfallenden großen Rechenaufwandes noch nicht verfügbar.
In dynamischen 3D-Geometriesystemen ist deshalb von Bedeutung das **Zusammensetzen** von verfügbaren referenziebaren Polyedern zu neuen Polyedern (Verbundpolyeder mittels Duplizieren durch Mehrfachaufruf, durch Kopieren und Einfügen, durch Rotieren, Spiegeln, Parallelverschieben usw.);
das **Zerlegen** von verfügbaren referenzierbaren Polyedern zu neuen Polyedern durch Ebenenschnitt
das **Einbeschreiben** von Polyedern in Polyeder (insbesondere das Dualisieren),
das **Umbeschreiben** von Polyedern um Polyeder.
b) mittels Veränderungen an Polyedern zu neuen Polyedern: z.B. Abbauen durch **Stumpfen** von Ecken und Kanten, das **Sternen** (Addieren bzw. Subtrahieren von Seitenflächenpyramiden) und das **Facettieren**.
c) Mittels **Verziehen** von Punkten, die die Form des betreffenden Polyeders verändern (dabei aber seine topologischen Eigenschaften invariant lassen).

3) der Konstruktion von Polyedermodellen in Kombination mit den unter 1) und 2) genannten konstruktiven Möglichkeiten.

Beim raumgeometrischen Arbeiten und Denken im Rahmen einer Lernumgebung, in der ein Computerwerkzeug wie das dynamische Raumgeometriesystem Cabri 3D vorherrschend zum Einsatz kommt, intervenieren drei wesentliche in Wechselbeziehung stehende kognitive Kompetenzbereiche (vgl. Diagramm):
Raumvorstellungsfähigkeit unterstützt raumgeometrisches Wissen und 3D-Werkzeugnutzung: Notwendige Voraussetzung für raumgeometrisches Wissen und das Arbeiten

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

mit einem Raumgeometrie-Tool ist die Raumvorstellungsfähigkeit, die die individuelle räumliche Interpretation der mit dem Tool oder auf andere Weise dargestellten statischen und dynamischen raumgeometrischen Informationen sicherstellt.
Raumgeometrisches Wissen unterstützt Raumvorstellungsfähigkeit und 3D-Computerwerkzeugnutzung: An raumgeometrischem Wissen und der mittels diesem modellierten Welt wird Raumvorstellung entwickelt und geübt. Für die adäquate Nutzung eines 3D-Tools wie Cabri 3D ist raumgeometrisches Vorwissen, d. h. Kenntnis und Verständnis elementarer raumgeometrischen Begriffe und Verfahren, weitgehend vorauszusetzen.
3D-Computerwerkzeugnutzung unterstützt Raumgeometrisches Wissen und Raumvorstellungsfähigkeit: Die Nutzung eines solchen Werkzeugs fördert einerseits die Aneignung, das Verstehen und Anwenden raumgeometrischen Wissens und andererseits die Raumvorstellungsfähigeit durch das Agieren im virtuellen Anschauungsraum.
In der Hand der in den genannten Bereichen kompetenten Lehrkraft ist Cabri 3D ein mächtiges raumgeometrisches Demonstrations- und Explorationswerkzeug.

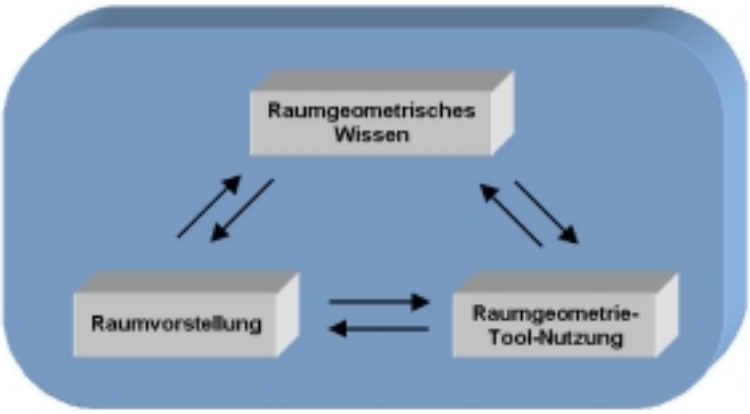


Diagramm (Raumgeometrisches Arbeiten und Denken in einer computerwerkzeug-unterstützten Lernumgebung; ⟶ bedeutet „unterstützt“)

Im folgenden dokumentieren wir Ergebnisse verschiedenartiger Konstruktionen und andeutungsweise auch Konstruktionsverläufe für die platonischen Körper, einige ihrer Abkömmlinge und Verallgemeinerungen – beispielgebend für das Konstruieren von Polyedern mit Cabri 3D in der Version 1.0. Besonders herausfordernd ist die Konstruktion von Polyederverwandlungen (Metamorphosen). In Tableaus werden Übersichten über spezifische Polyeder gegeben.

1. Darstellung und Konstruktion der platonischen Körper

1.1 Übersicht

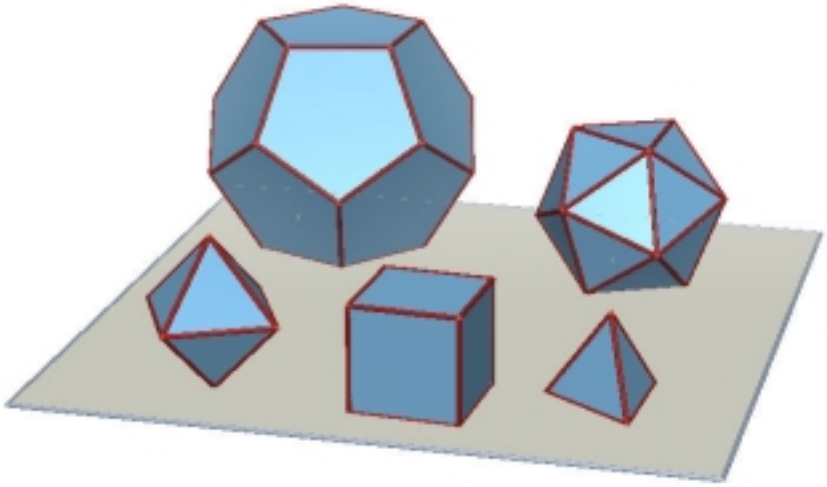


Abb. 1.1 Die Platonischen Körper: Flächenmodelle

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

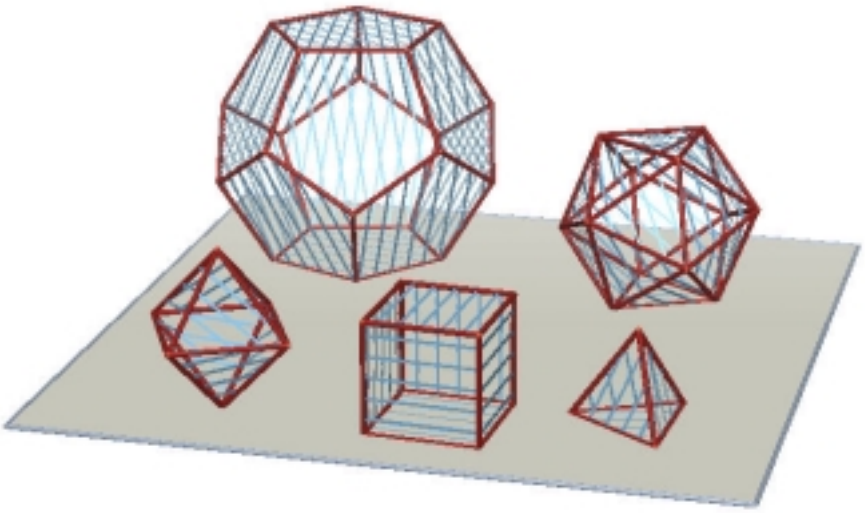


Abb. 1.2 Die Platonischen Körper: Flächenmodelle mit transparenter Oberfläche

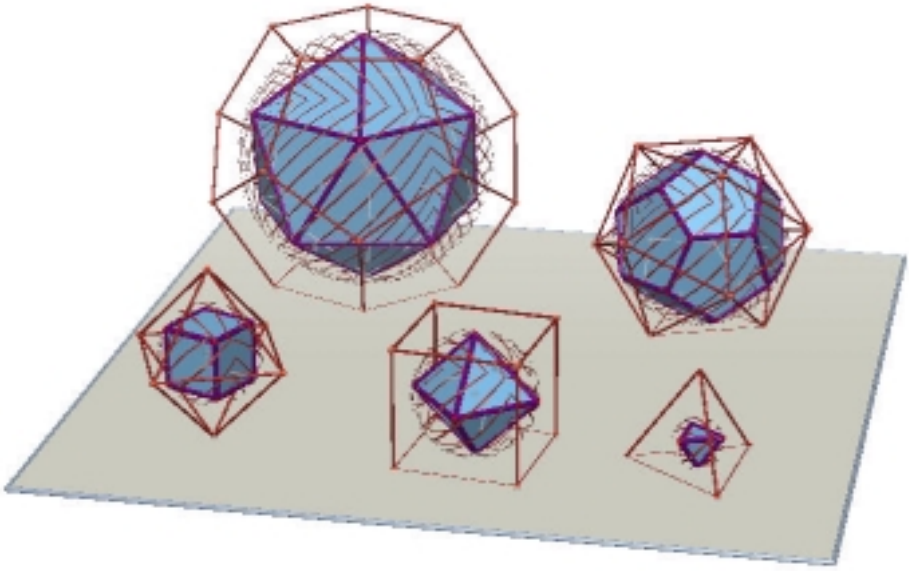


Abb. 1.3 Die Platonischen Körper: Kantenmodelle mit ihren Inkugeln und den dualen Körpern als Flächenmodellen

1.2 Konstruktion durch dynamische Passung

1.2.1 Regelmäßiges Tetraeder

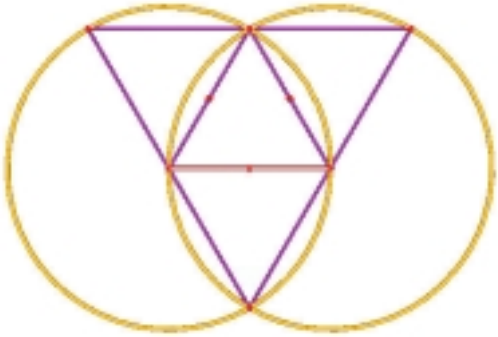


Abb. 2.1 Konstruktion eines Netzes

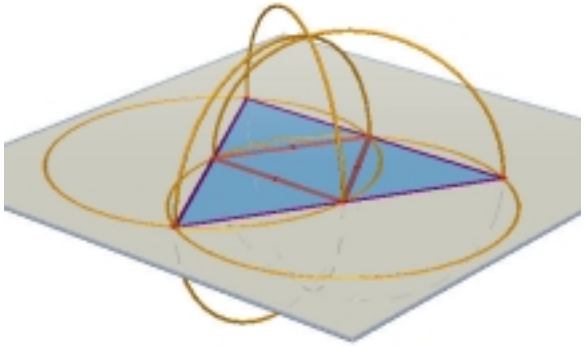


Abb. 2.2 Auffaltbahnen für die Seitenflächen

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

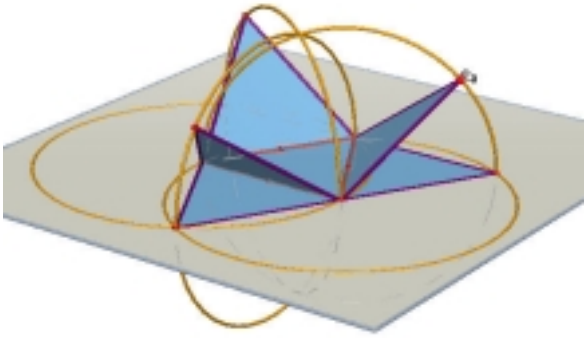


Abb. 2.3 Individuelles Auffalten

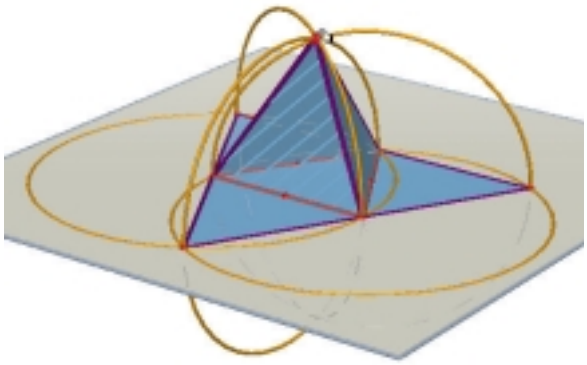


Abb. 2.4 Auffaltergebnis

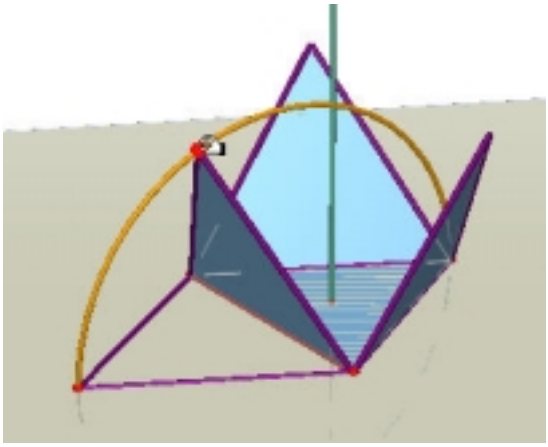


Abb. 2.5 Simultanes Auffalten

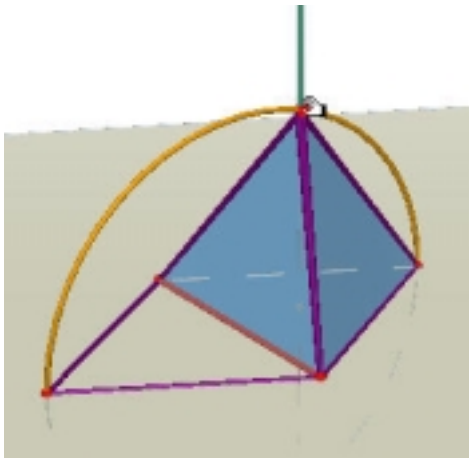


Abb. 2.6 Auffaltergebnis

1.2.2 Würfel (regelmäßiges Hexaeder)

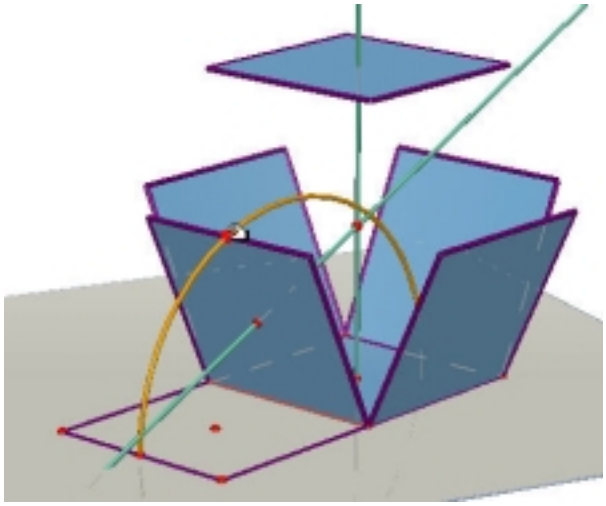


Abb. 2.7 Simultanes Auffalten und Deckeln

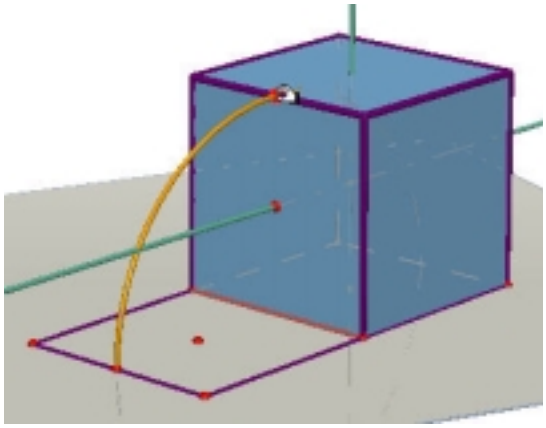


Abb. 2.8 Passungsergebnis

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

1.2.3 Regelmäßiges Oktaeder

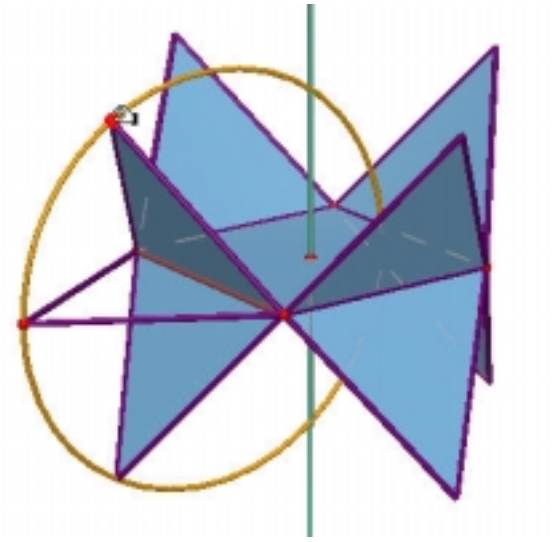


Abb. 2.9 Simultanes Auffalten

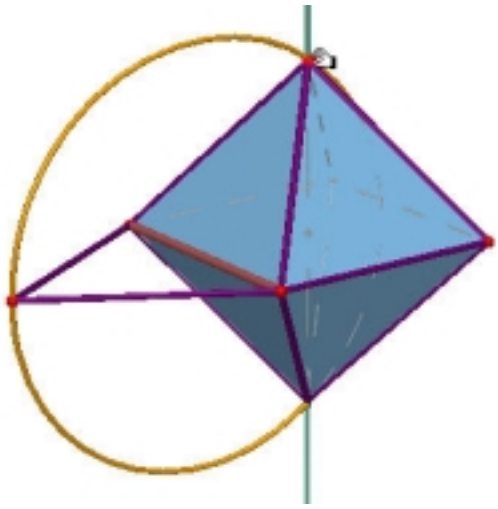


Abb. 2.10 Auffaltergebnis

1.2.4 Regelmäßiges Dodekaeder

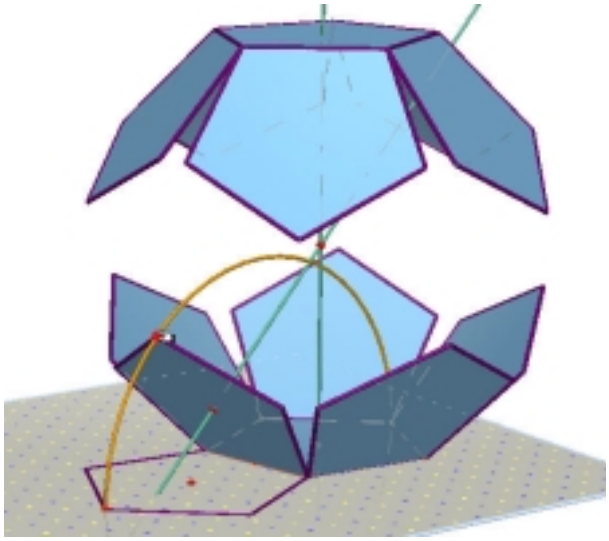


Abb. 2.11 Simultanes Auffalten und Deckeln

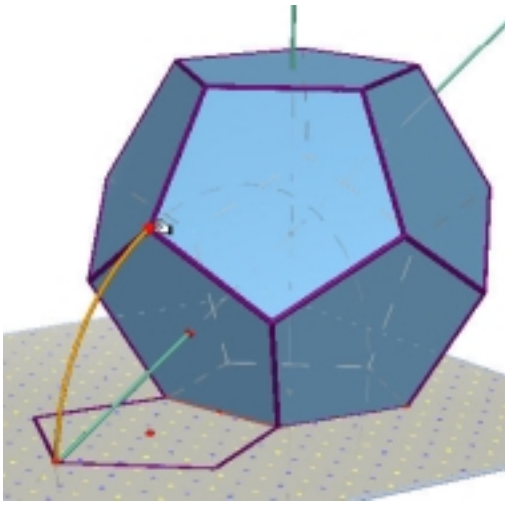


Abb. 2.12 Ergebnis der Passung

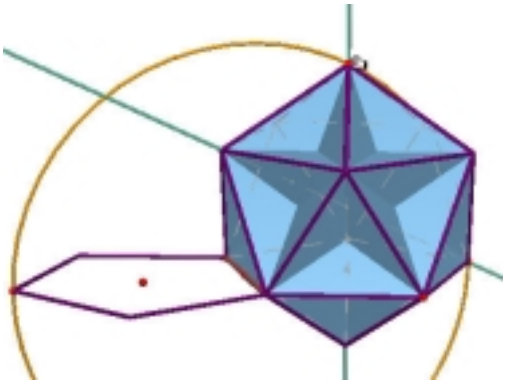


Abb. 2.13 Auffalten um den doppelten Drehwinkel: Großes Dodekaeder

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

1.2.5 Regelmäßiges Ikosaeder

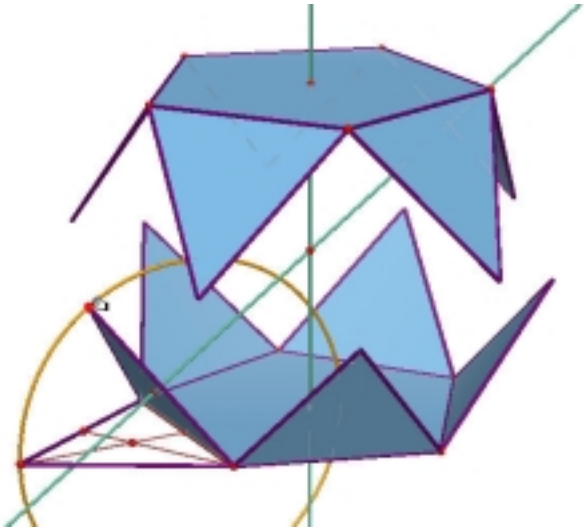


Abb. 2.14 Simultanes Auffalten und Deckeln des 10-seitigen Antiprisma

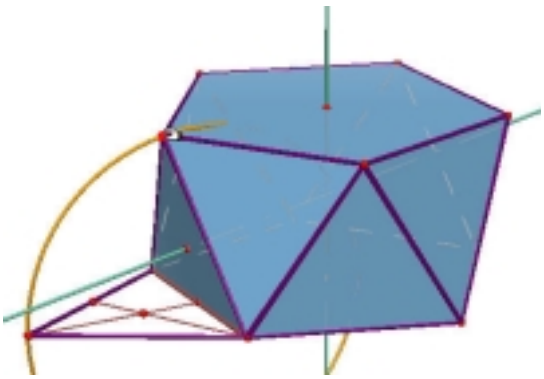


Abb. 2.15 Ergebnis der Passung

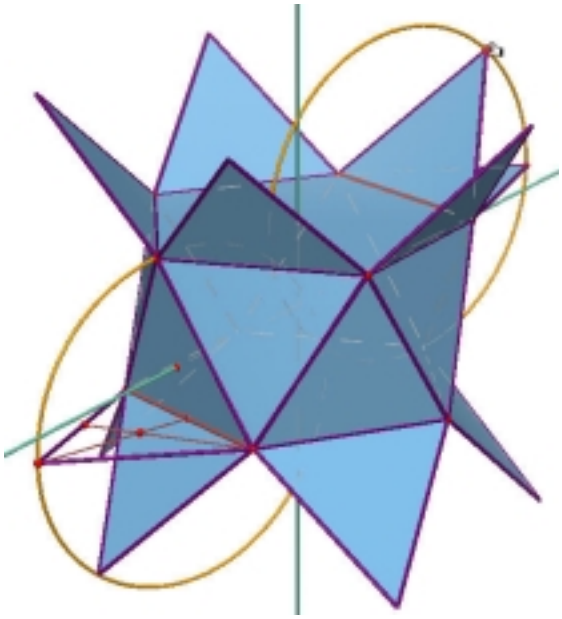


Abb. 2.16 Simultanes Auffalten der fünfseitigen Pyramiden

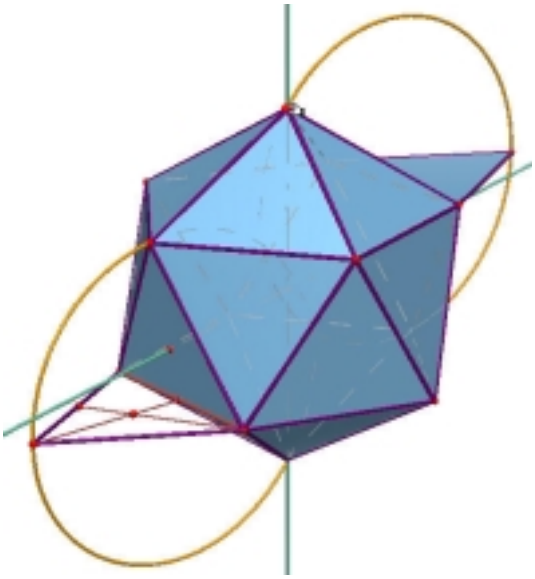


Abb. 2.17 Passungsergebnis

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

3. Exakte Auffaltungskonstruktionen

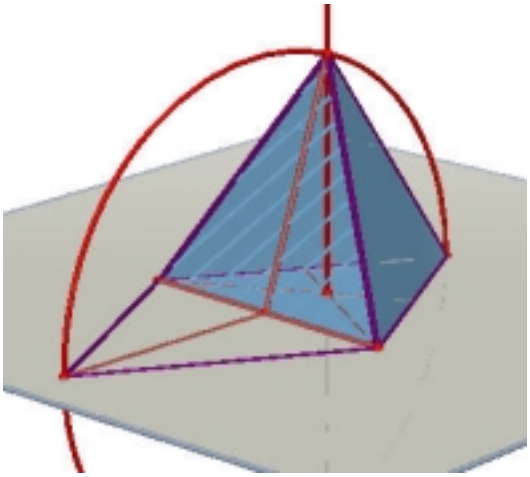


Abb. 3.1 Regelmäßiges Tetraeder

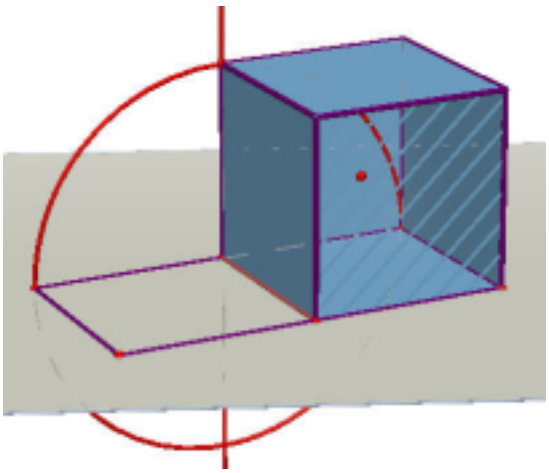


Abb. 3.2 Würfel

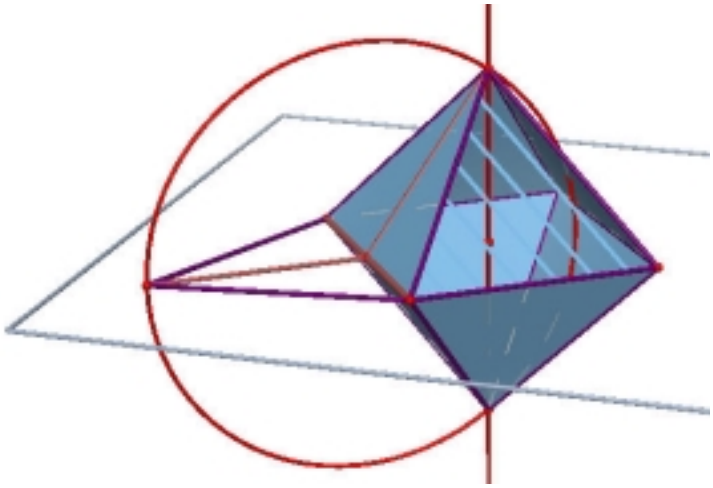


Abb. 3.3 Regelmäßiges Oktaeder

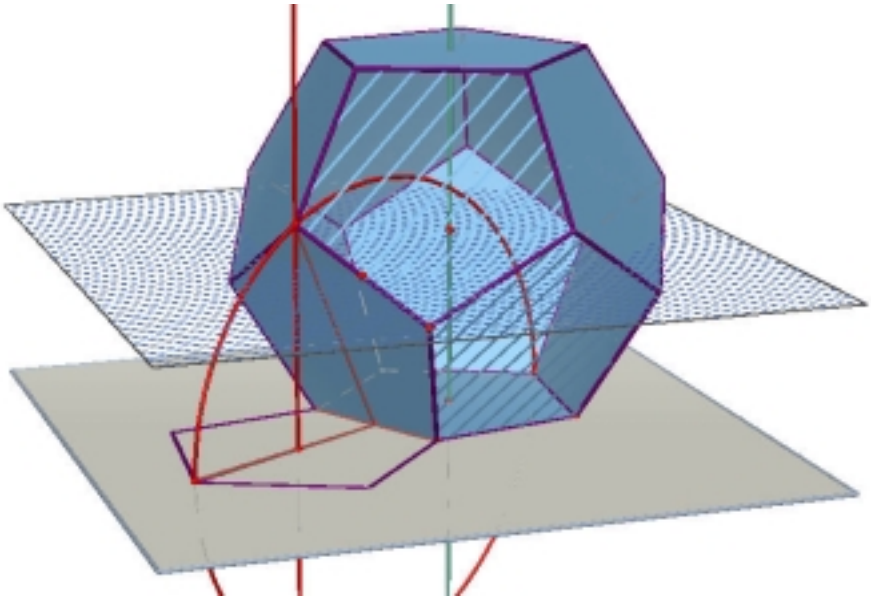


Abb. 3.4 Regelmäßiges Dodekaeder

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

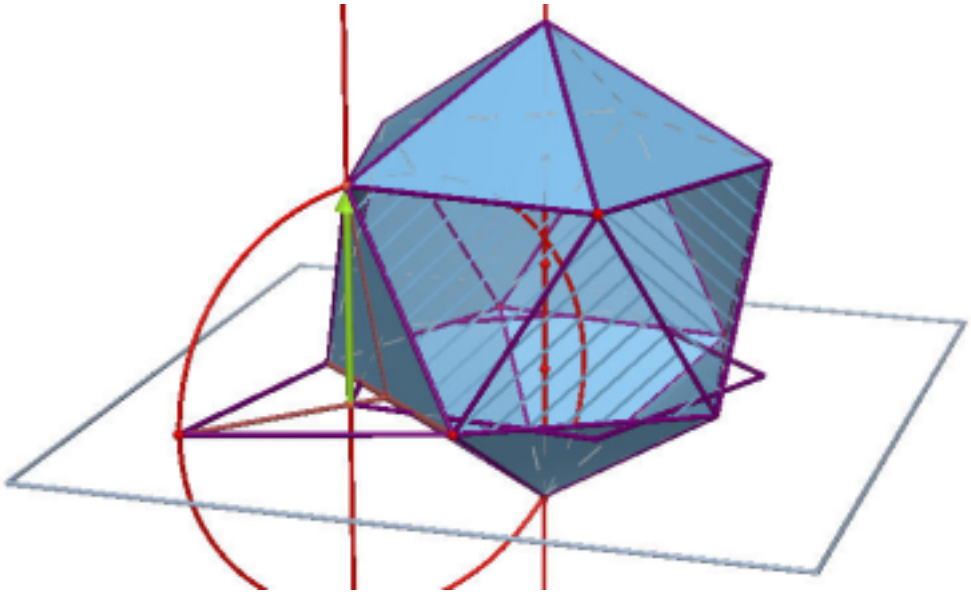


Abb. 3.5 Regelmäßiges Ikosaeder

4. Konstruktionen an und mit den platonischen Körpern und in ihrem Umfeld

4.1 Konstruktionen an und mit dem Tetraeder und in seinem Umfeld

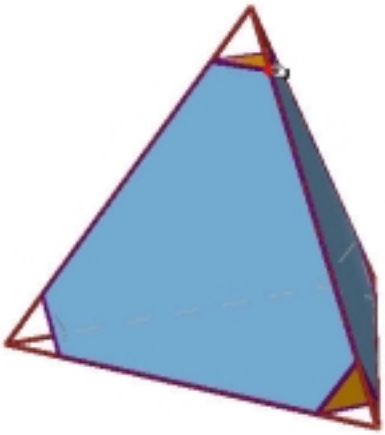


Abb. 4.1 Tetraeder abgestumpft (Metamorphose)

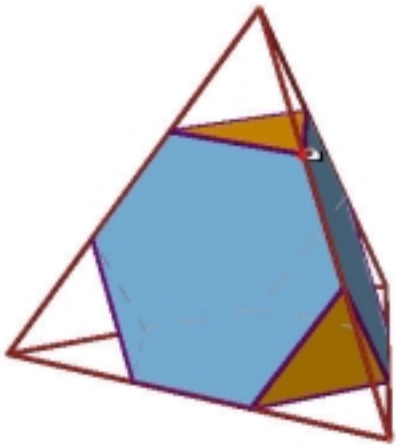


Abb. 4.2 Gestumpftes Tetraeder

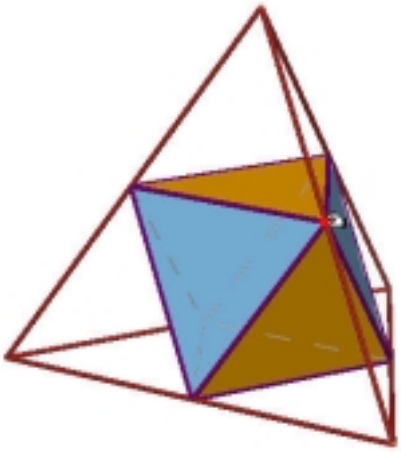


Abb. 4.3 Tetraeder abgestumpft zum Oktaeder

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

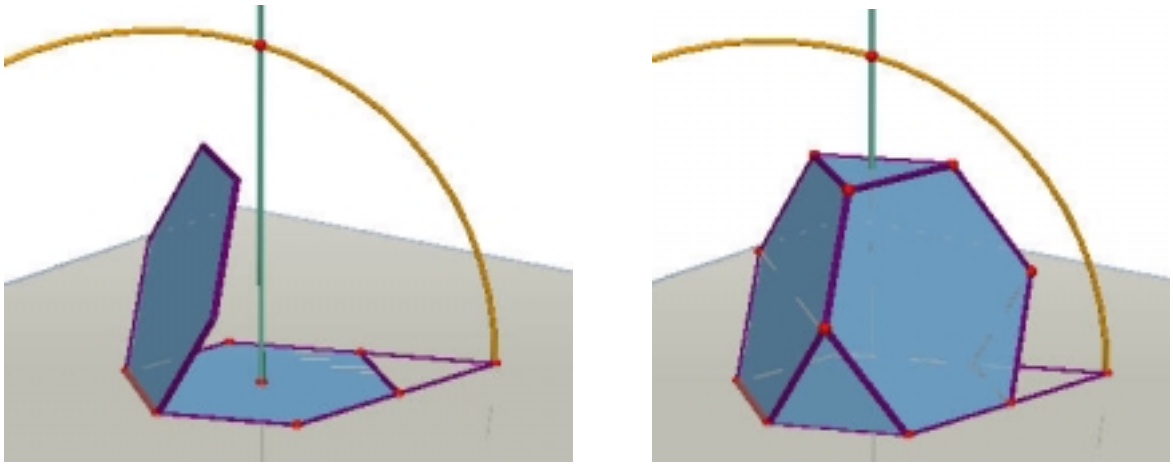


Abb. 4.4/5 Konstruktion des gestumpften Tetraeders

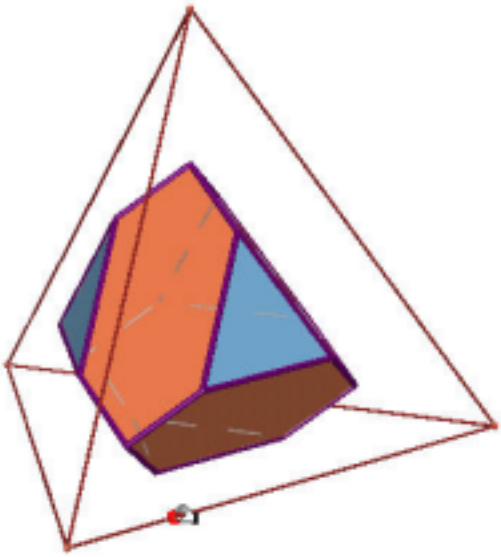


Abb. 4.6 Tetraeder abgekantet (Metamorphose)

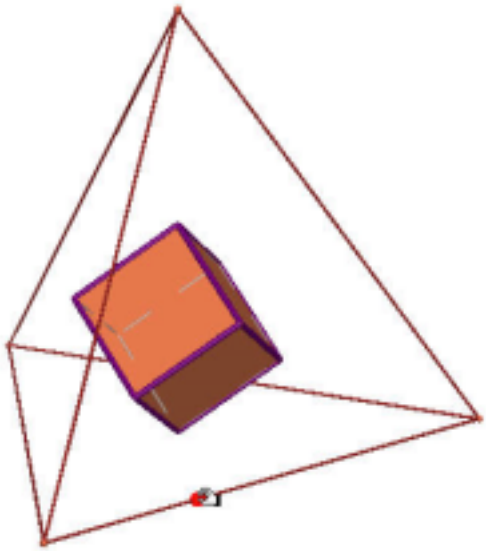


Abb. 4.7 Tetraeder abgekantet zum Würfel

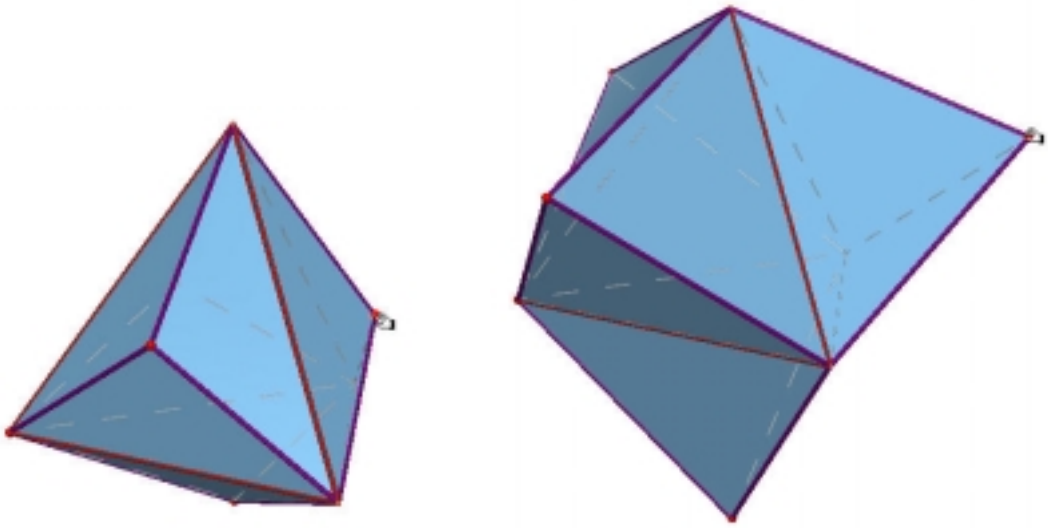


Abb. 4.8/9 Tetraeder dynamisch gesternt nach außen

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

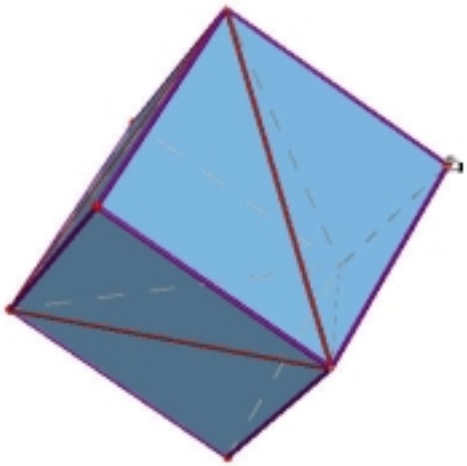


Abb. 4.10 Tetraeder gesternt zum Würfel

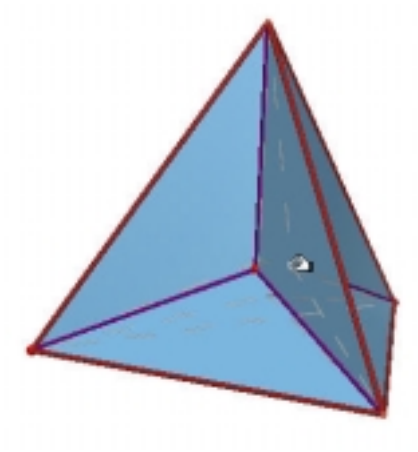


Abb. 4.11 Tetraeder gesternt nach innen

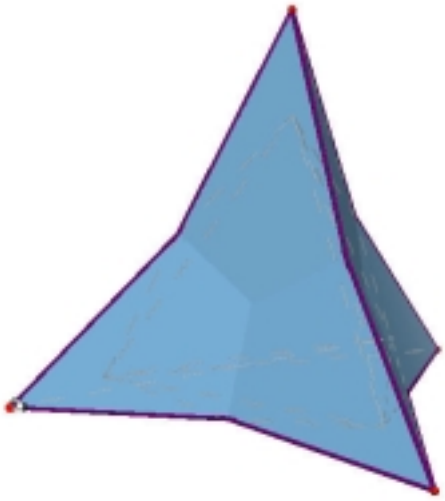


Abb. 4.12 Tetraeder gesternt nach innen durchgeschlagen

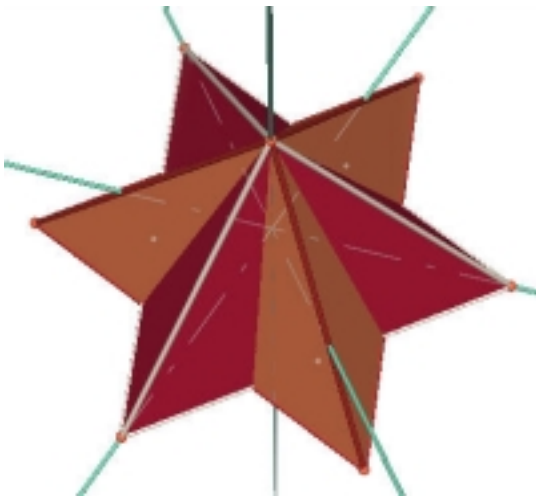


Abb. 4.13 Tetraederzwilling (Rotation um Ecke-Seitenmittenachse

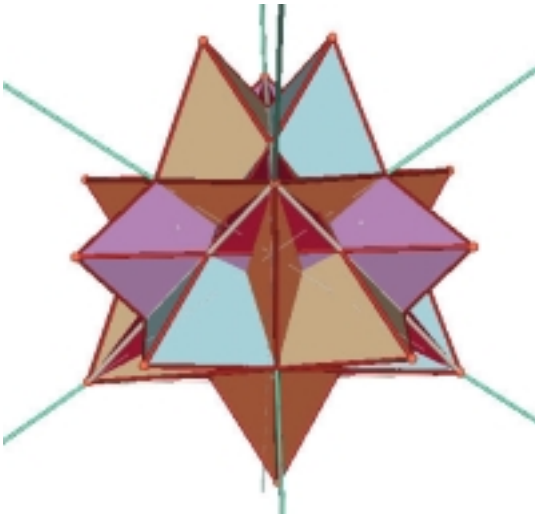


Abb. 4.14 Teraederfünfling (Rotation um Ecke-Seitenmittenachse

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

Abb. 4.15 Regelmäßige Pyramiden mittels dynamischer Passung

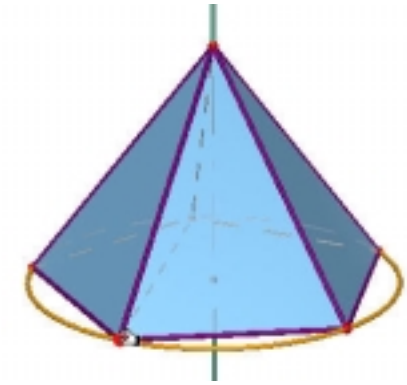


Abb. 4.16 Ein Passungsergebnis (5-seitige Pyramide)

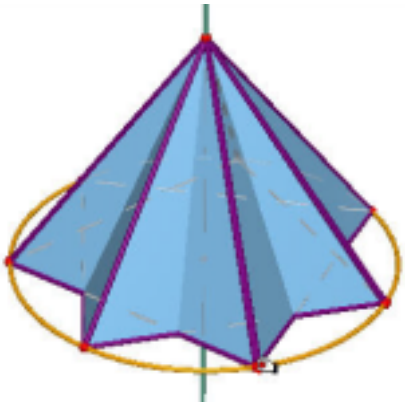


Abb. 4.17 Regelmäßige 7-eckige Sternpyramiden mittels durchgeschlagener Passung

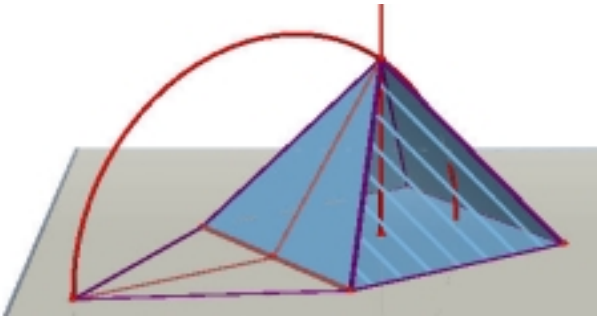


Abb. 4.18 Gleichkantige quadratische Pyramide: Konstruktion

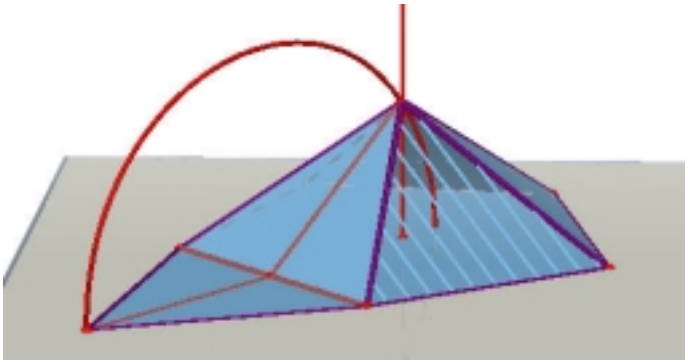


Abb. 4.19 Gleichkantige 5-seitige Pyramide: Konstruktion

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

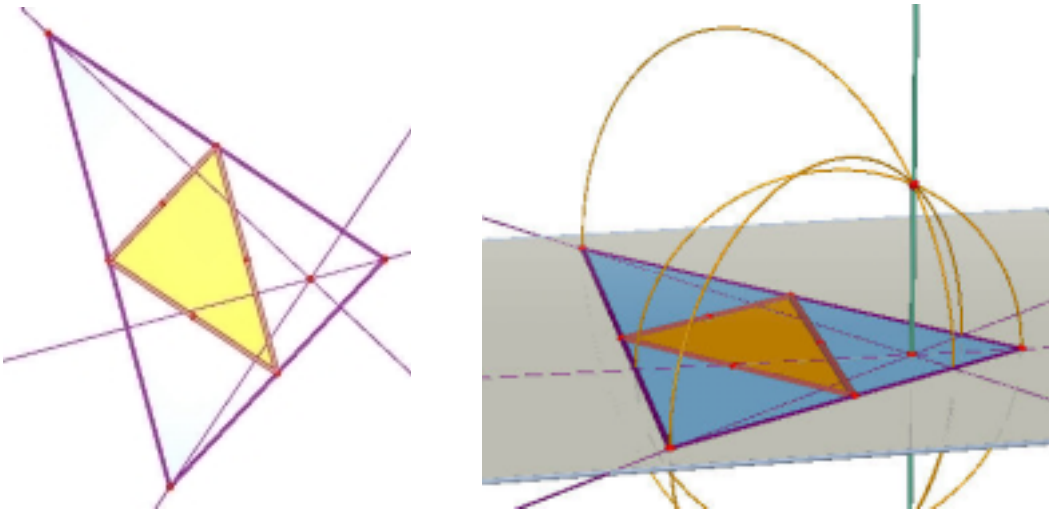


Abb. 4.20/21 Gleichseitiges Tetraeders: Konstruktion von Netz, Fußpunkt der Spitze/Spitze

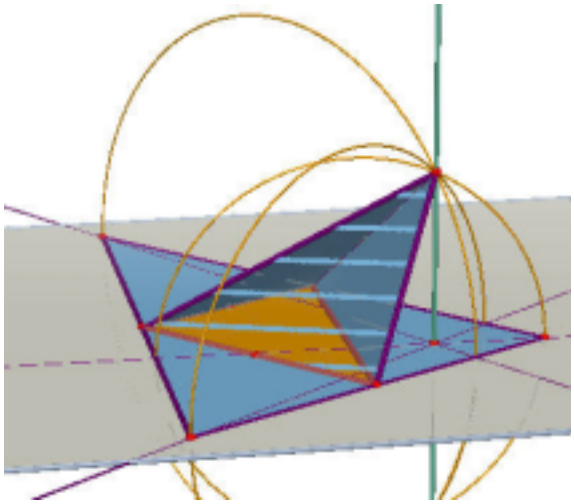


Abb. 4.22 Gleichseitiges Tetraeders: Konstruktionsergebnis

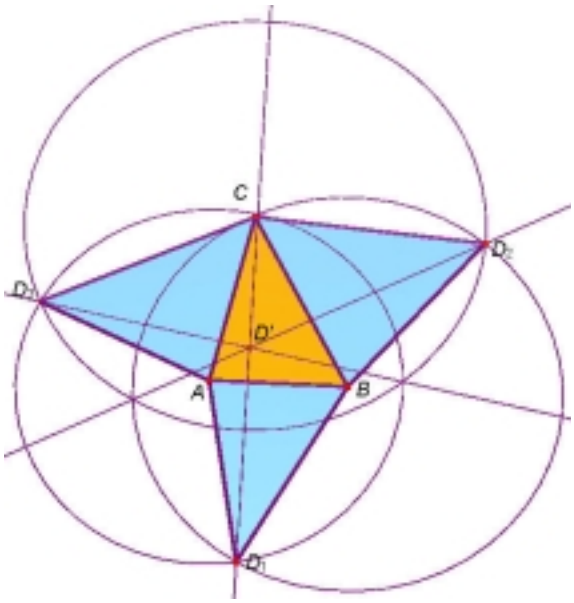


Abb. 4.23 Beliebiges Tetraeders: Konstruktion von Netz und Fußpunkt der Spitze

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

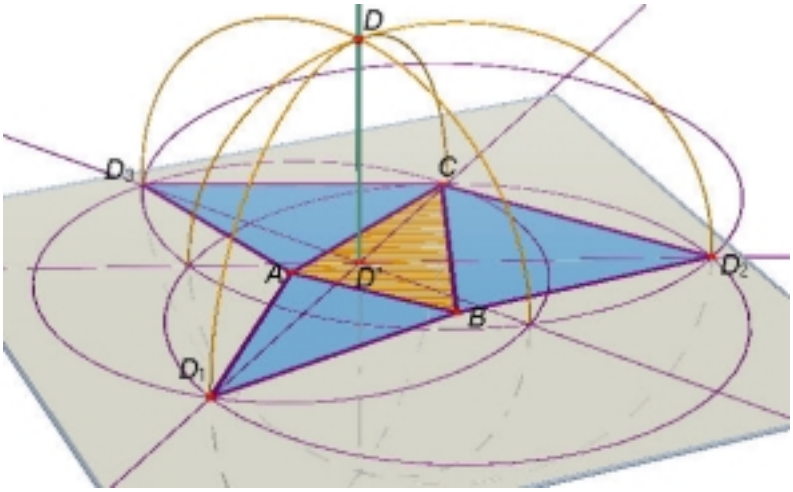


Abb. 4.24 Beliebiges Tetraeders: Konstruktion der Spitze

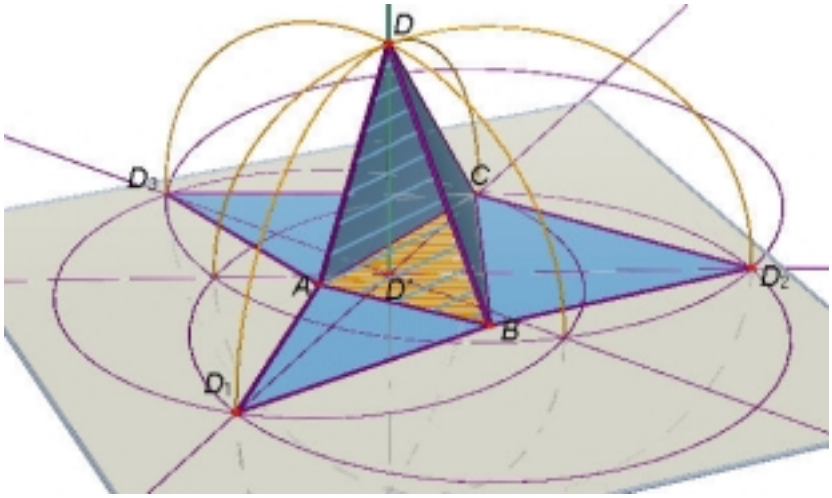
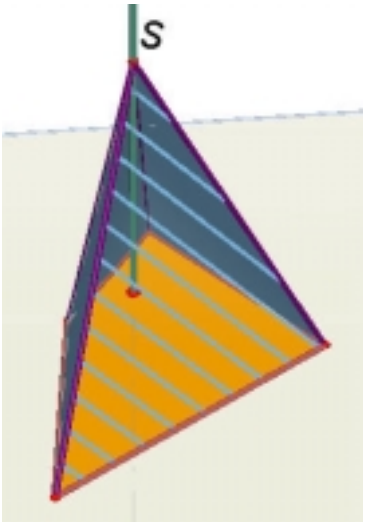


Abb. 4.25 Beliebiges Tetraeders: Konstruktionsergebnis



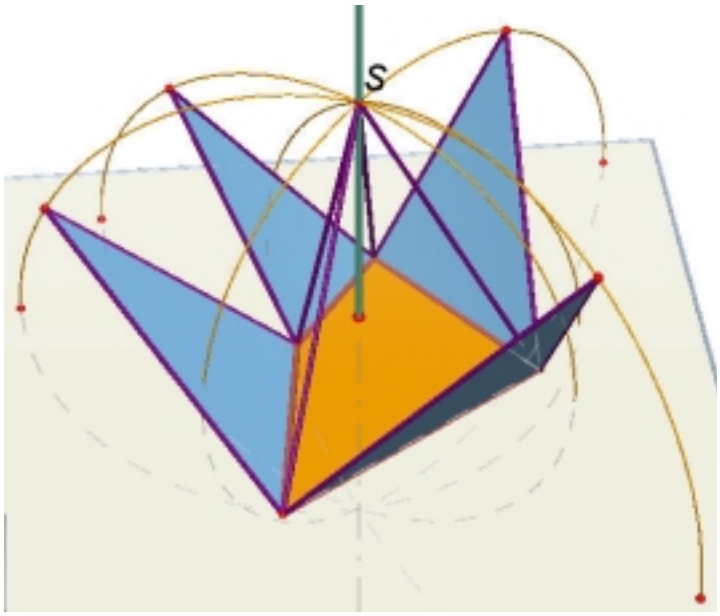


Abb. 4.26/27 Beliebige 4-seitige Pyramide und ihre Abfaltung (Analyse)

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

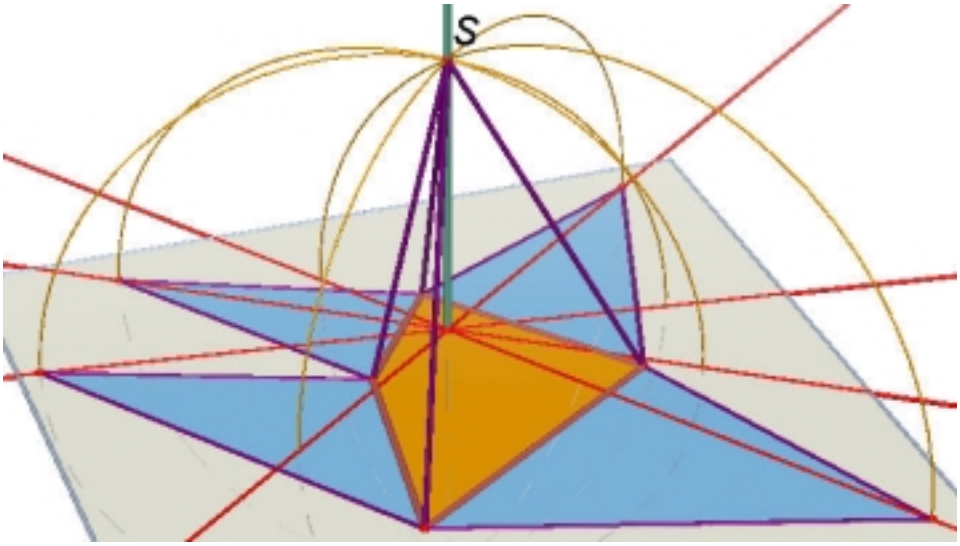


Abb. 4.28 Beliebige 4-seitige Pyramide abgefaltet mit Fußpunkt der Spitze (Analyse)

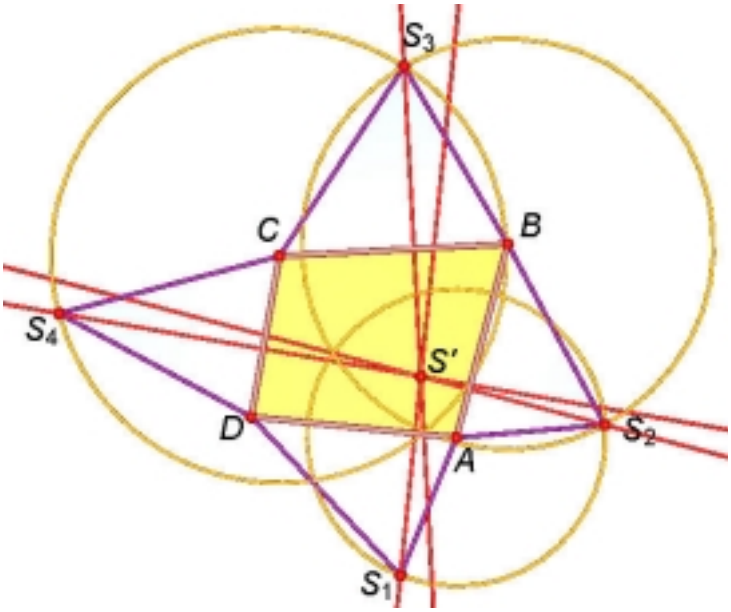


Abb. 4.29 Beliebige 4-seitige Pyramide: Konstruktion von Netz und Fußpunkt der Spitze

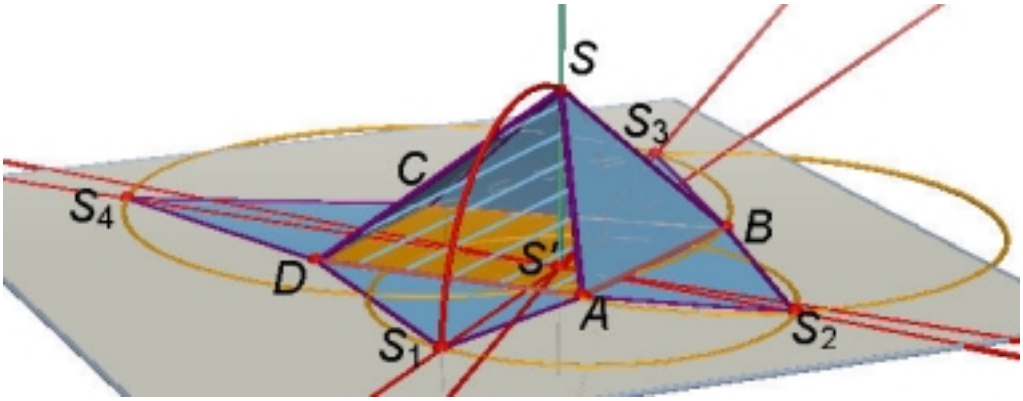


Abb. 4.30 Beliebige 4-seitige Pyramide: Konstruktionsergebnis

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

4.2 Konstruktionen an und mit dem Würfel und in seinem Umfeld

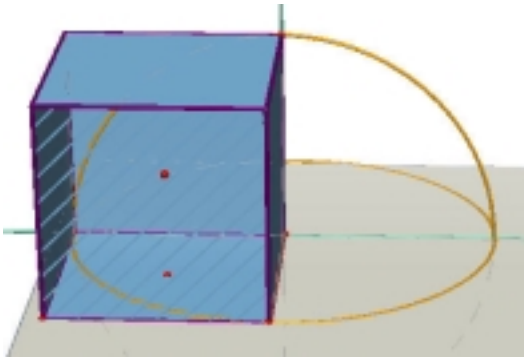


Abb. 4.31 Würfelkonstruktion optimal

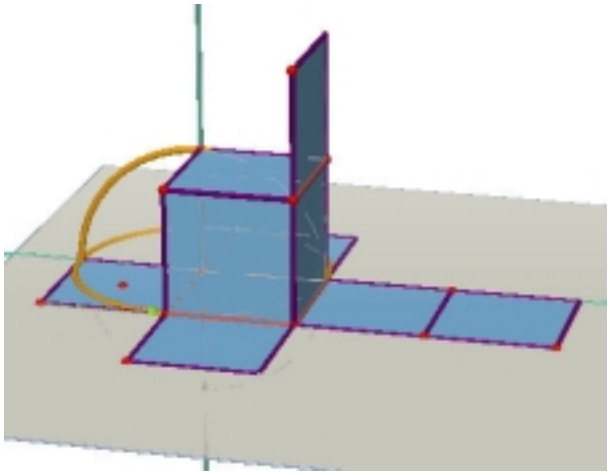


Abb. 4.32 Würfelkonstruktion aus einem Netz

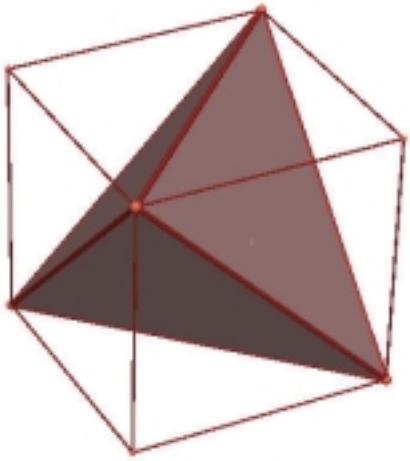


Abb. 4.33 Tetraeder dem Würfel einbeschrieben

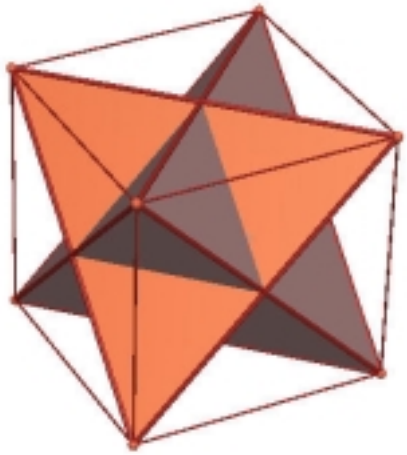
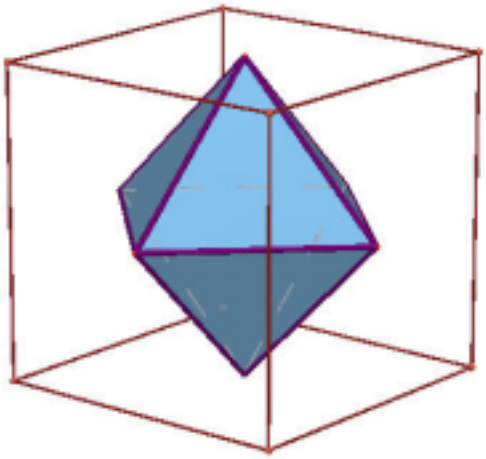


Abb. 4.34 Teteraederzwilling im Würfel (Stella Octangula)



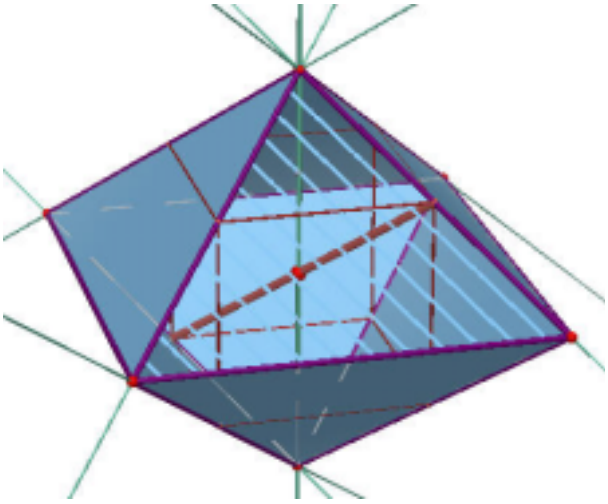


Abb. 4.35/36 Oktaeder dem Würfel ein-/umbeschrieben

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

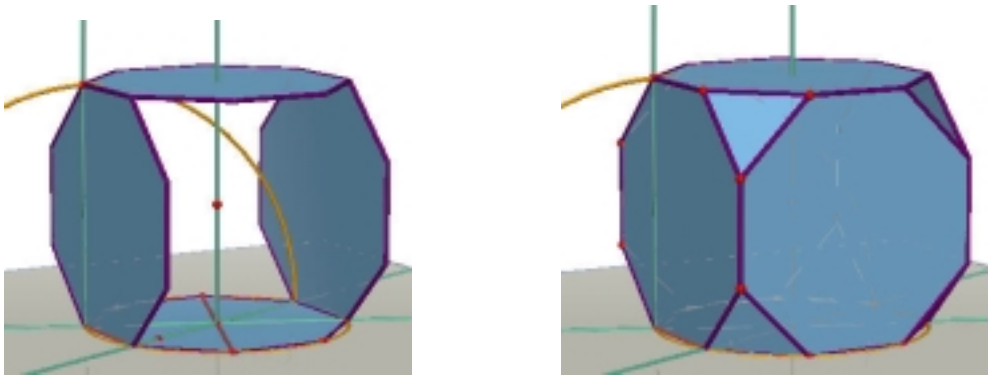


Abb. 4.37 Konstruktion des gestumpften Würfels

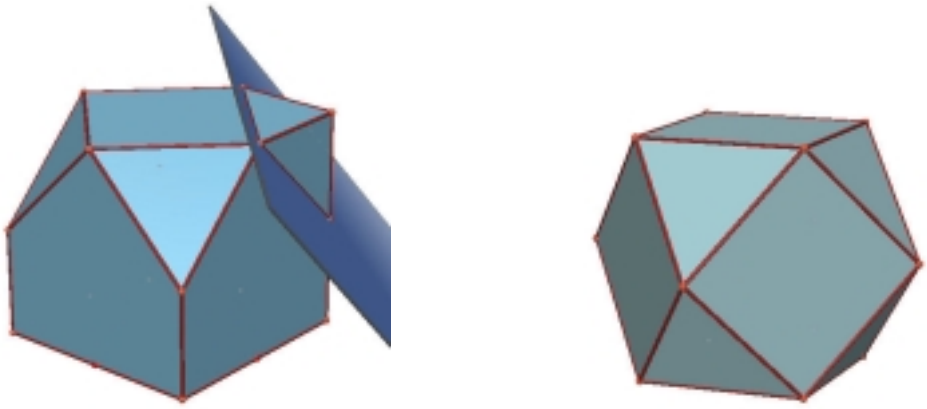


Abb. 4.38 Kuboktaeder-Konstruktion durch Eckenabschneiden

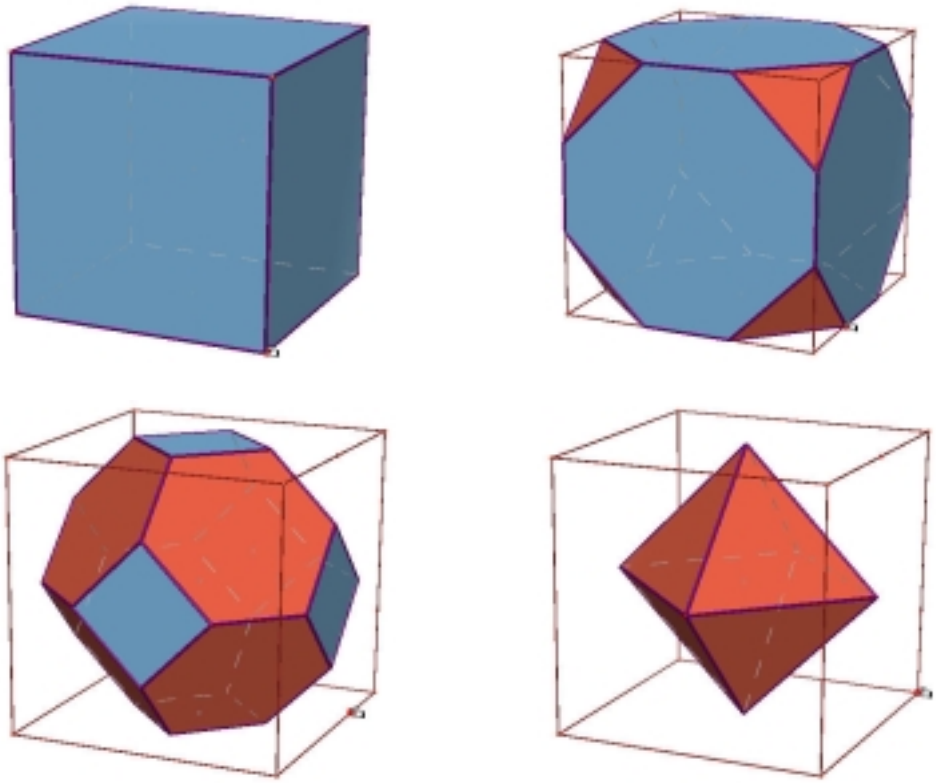


Abb. 4.39-42 Metamorphose des Würfels durch dynamisches Stumpfen (Zustände: Würfel, gestumpfter Würfel, gestumpftes Oktaeder, Oktaeder)

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

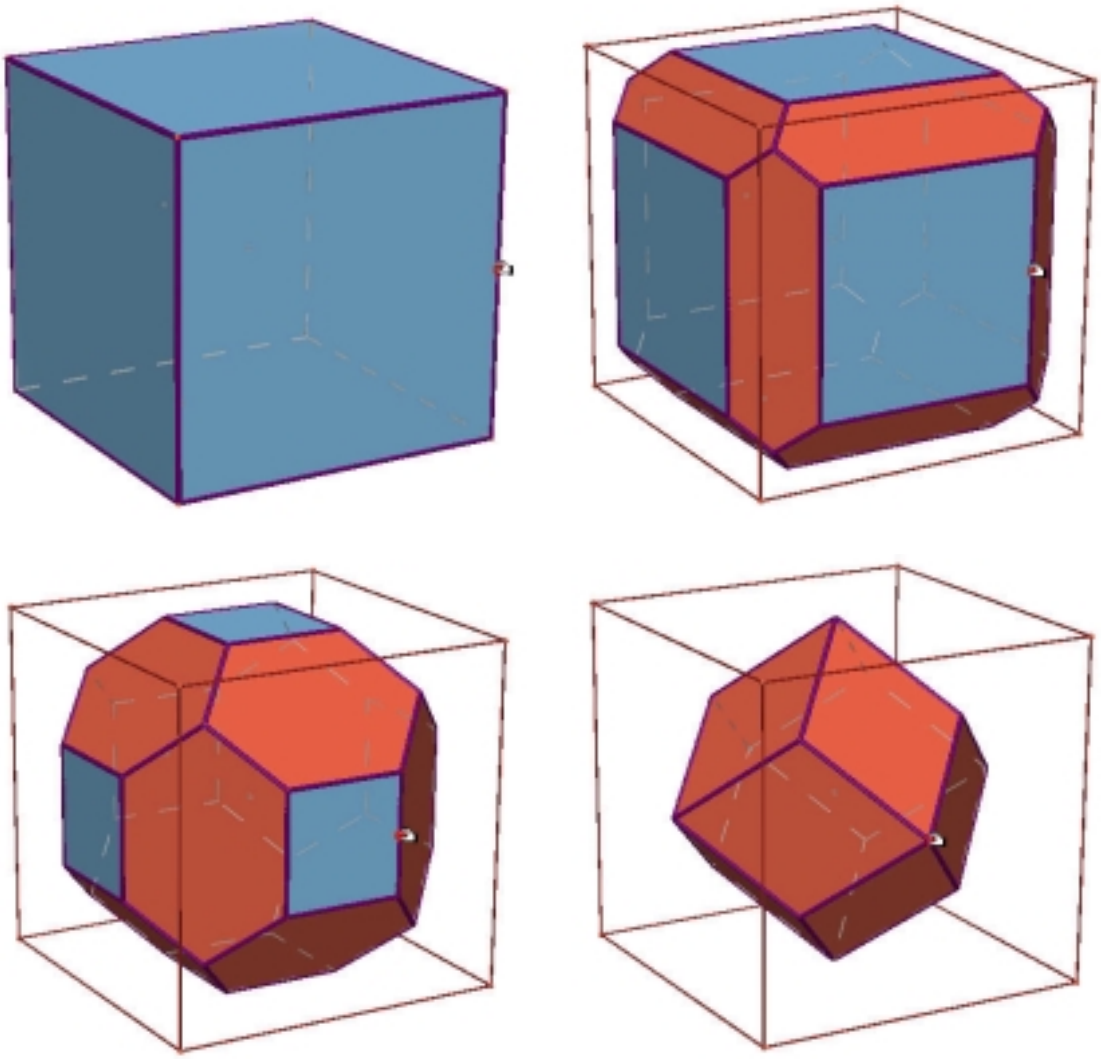


Abb. 4.43-46 Metarmophose des Würfels durch Abkanten zum Rhombendodekaeder

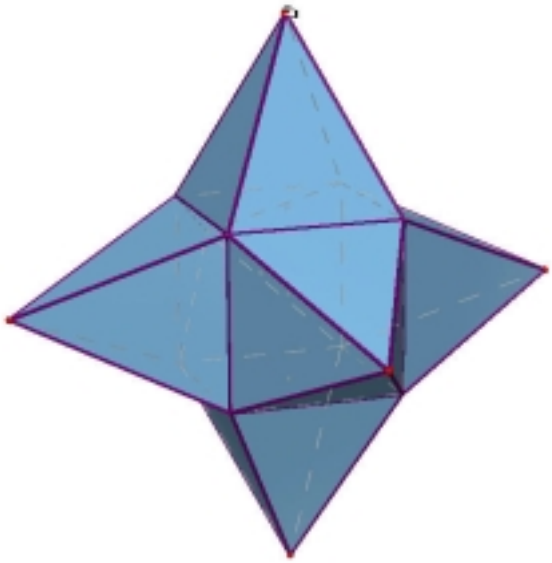


Abb. 4.47 Dynamisches Sternen des Würfels nach außen

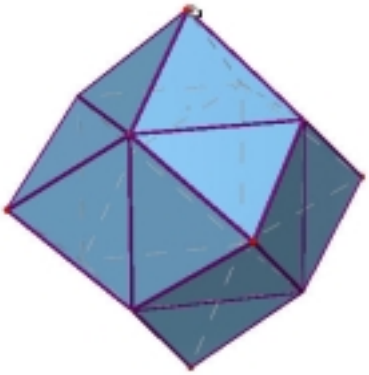


Abb. 4.48 Sternen des Würfels zum Rhombendodekaeder

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

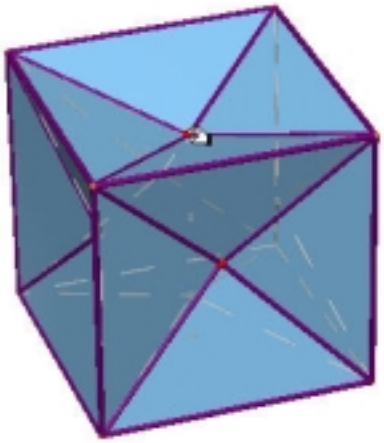


Abb. 4.49 Sternen des Würfels nach innen

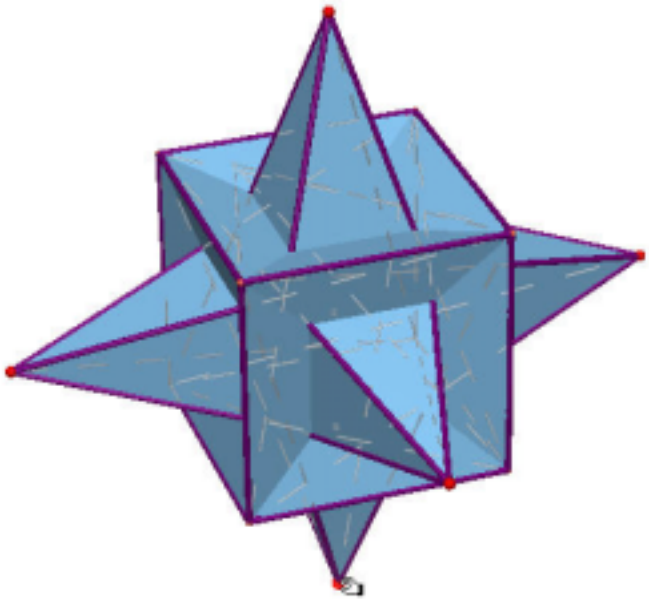


Abb. 4.50 Sternen des Würfels nach innen durchgeschlagen

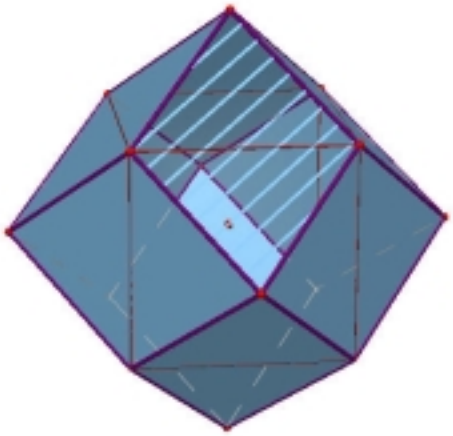


Abb. 4.51 Rhombendodekaeder-Konstruktion

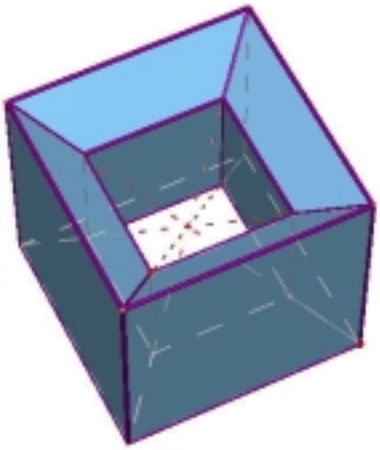


Abb. 4.52 Toruspolyeder-Konstruktion

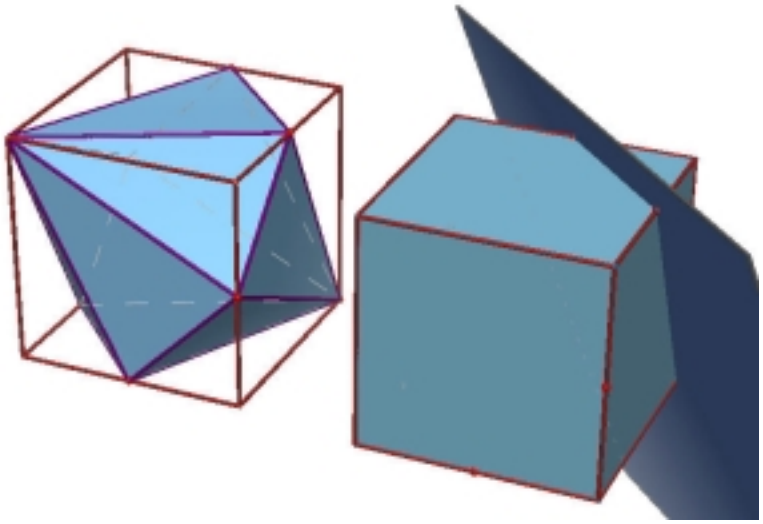


Abb. 4.53 Sechsseitige Pyramide aus Würfel herauschneiden nach Plan

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

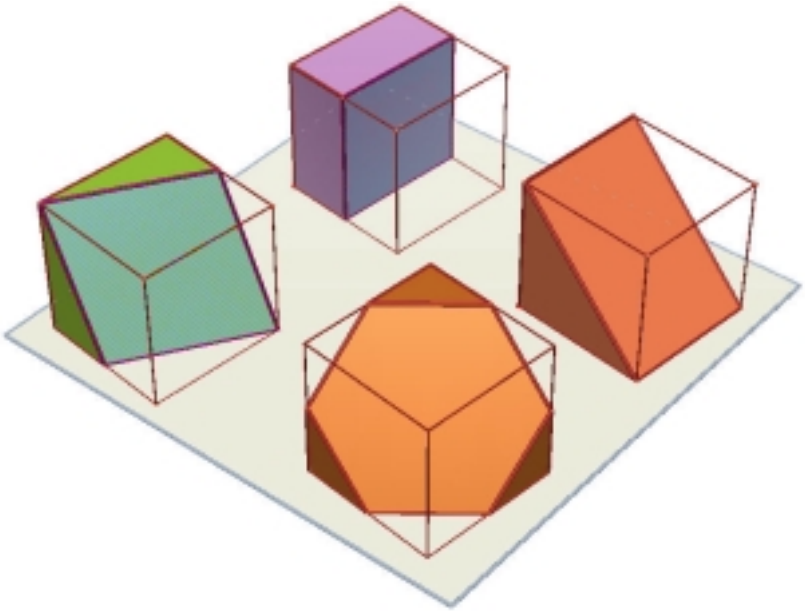


Abb. 4.54 Besondere Würfelhalbierungen

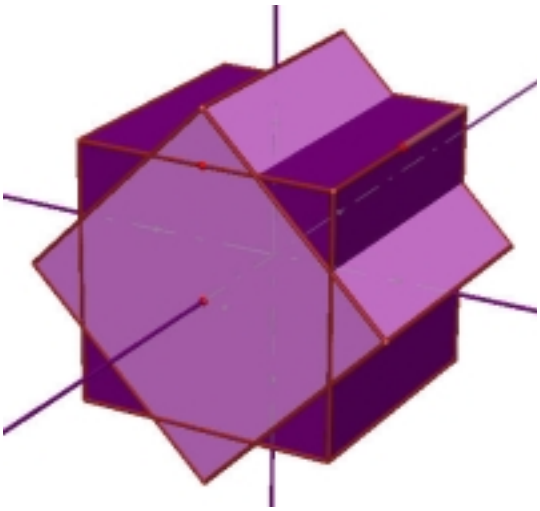


Abb. 4.55 Würfelzwillinge (Rotation um Seitenmittenachse)

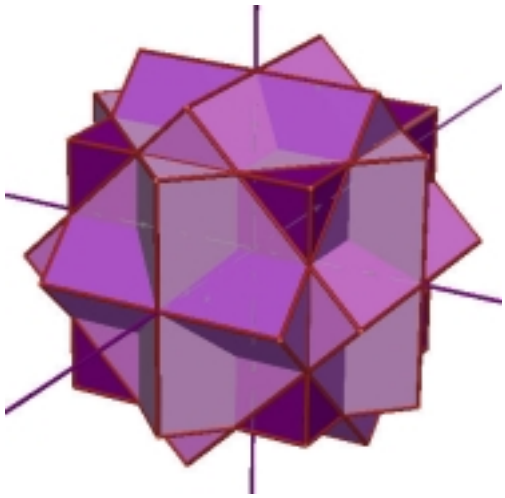


Abb. 4.56 Würfelvierling (Rotation um die Seitenmittenachsen)

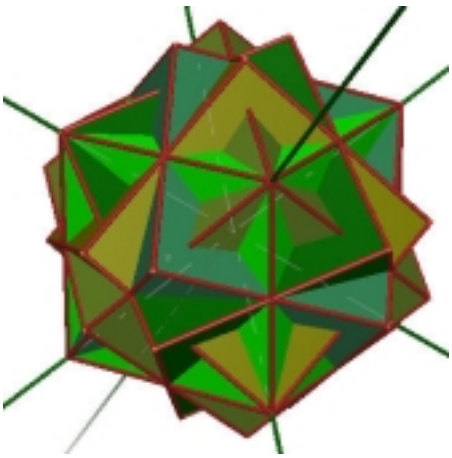


Abb. 4.57 Würfelvierling (Rotation um Eckenachse)

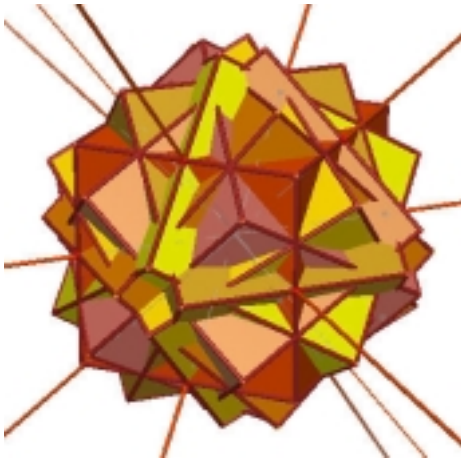


Abb. 4.58 Würfelvierling (Rotation um die Kantenmittenachsen)

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

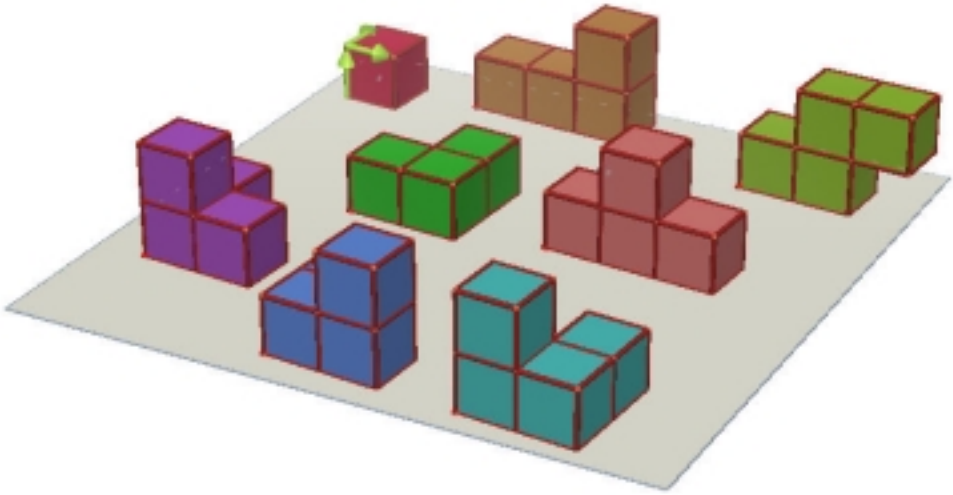


Abb. 4.59 Konstruktion von Würfelmehrlingen (Beispiel: Soma-Würfel-Figuren)

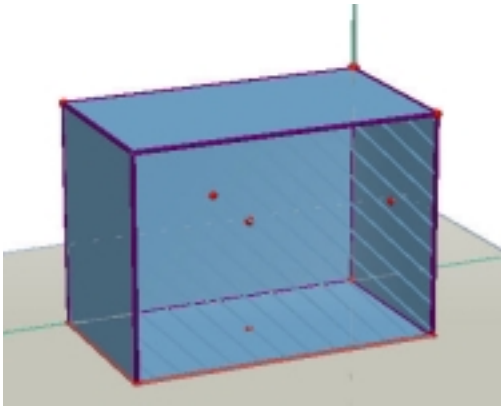


Abb. 4.60 Quaderkonstruktion optimal

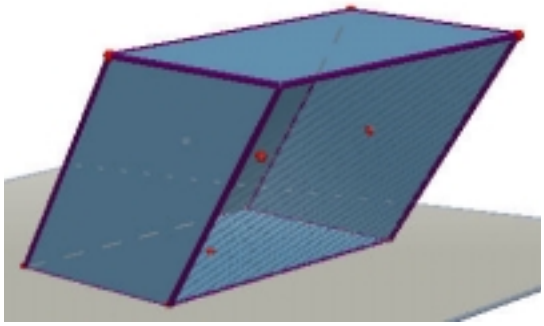


Abb. 4.61 Konstruktion eines Parallelflachs Parallelepipeds

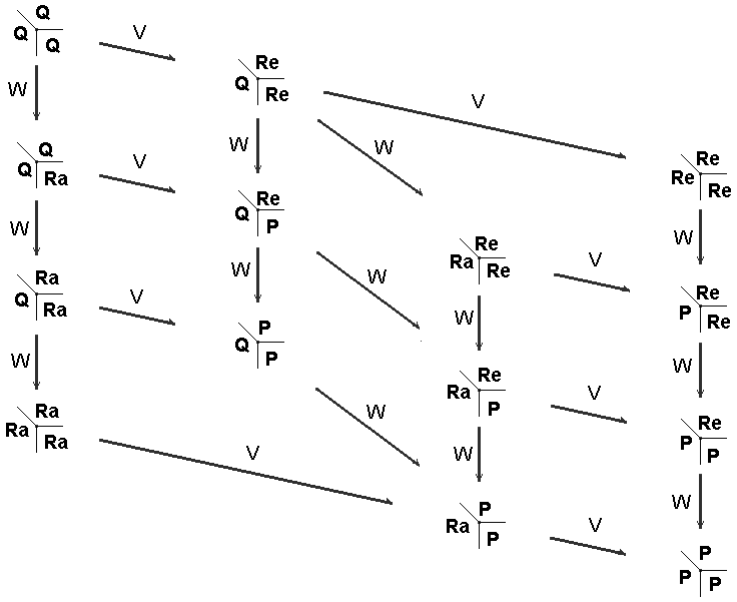


Diagramm Parallelflach-Gruppierung

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

(Erläuterung: Durch Verziehen werden am Würfel, Quader und Parallelflach die Operation V: „gleichmäßige Verlängerung bzw. Verkürzung von vier parallelen Kanten“ und die Operation W: „Veränderung rechter Flächenwinkel zu spitzen bzw. stumpfen Flächenwinkeln“ unter Beibehaltung der Kongruenz und Parallelität der betreffenden Körperkanten ausgeführt.)

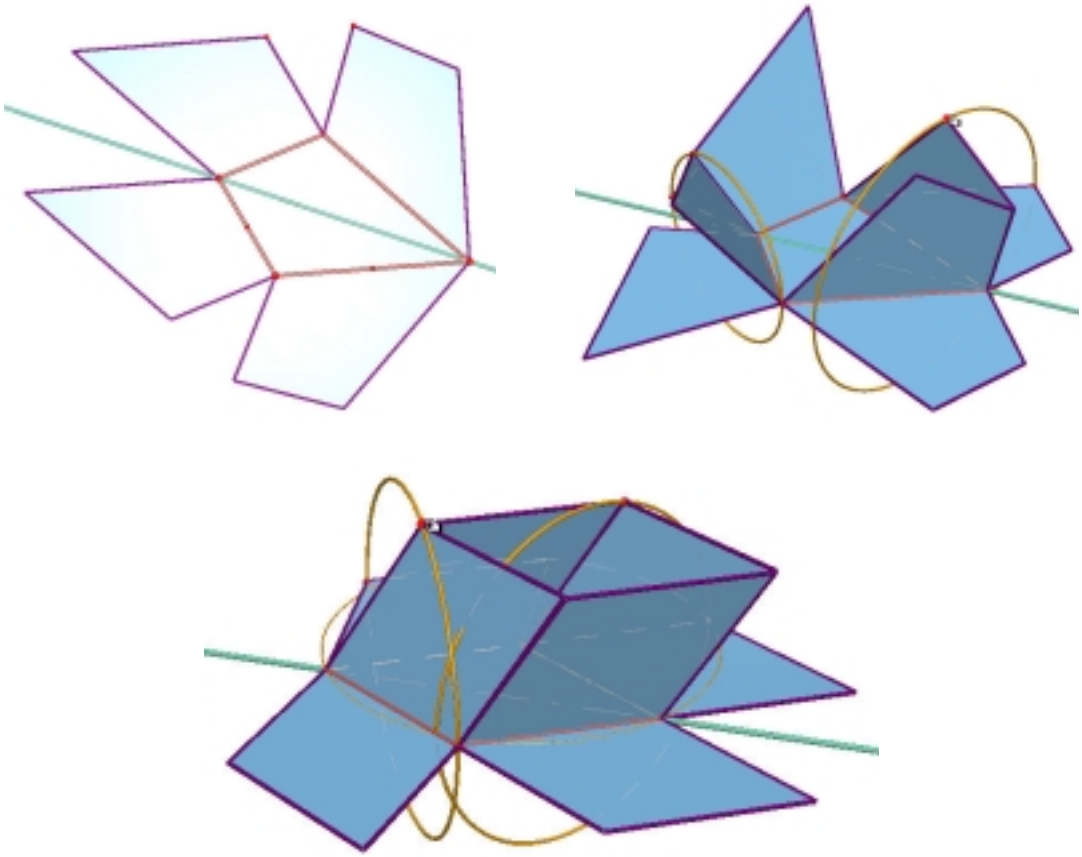


Abb. 4.62-64 Experimementelle Prüfung der Aussage: Ein seitengleiches Hexaeder ist ein RautenHexaeder

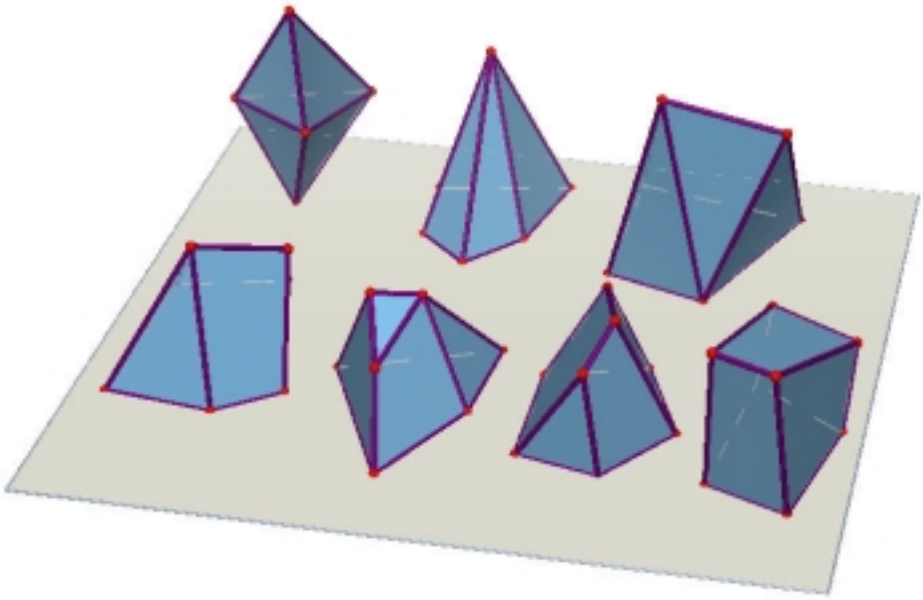
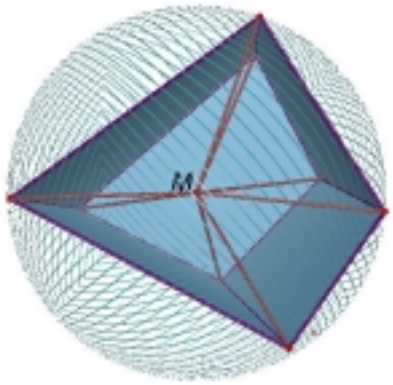


Abb. 4.65 Repräsentanten der 7 Hexaedertypen

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten



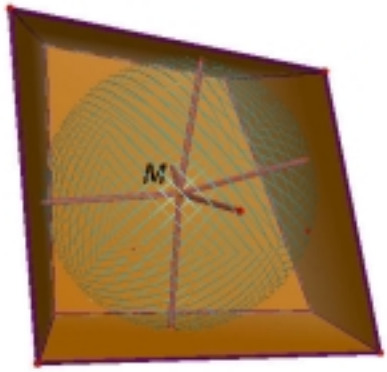


Abb. 4.66/67 Viereckhexaeder mit Umkugel/Inkugel

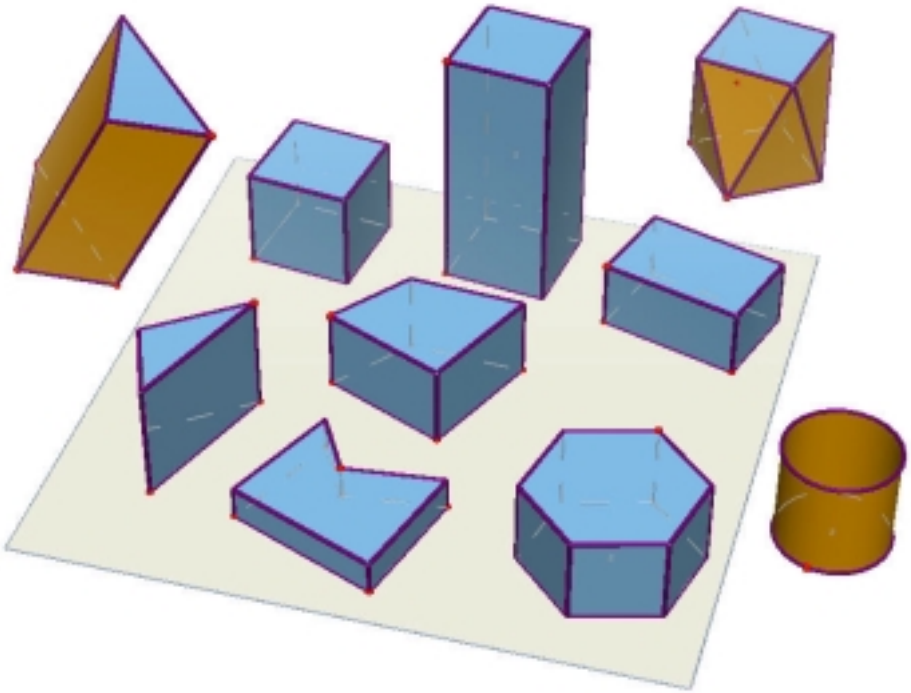


Abb. 4.68 Beispiele für gerade Prismen mit Gegenbeispielen

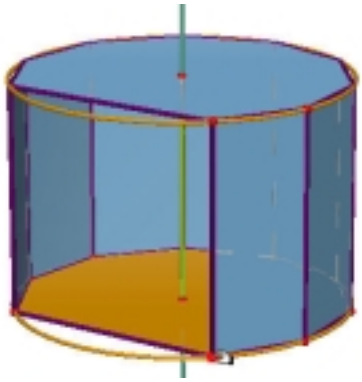


Abb. 4.69 Regelmäßige Prismen mittels dynamischer Passung

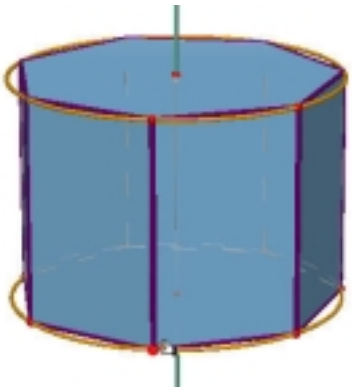
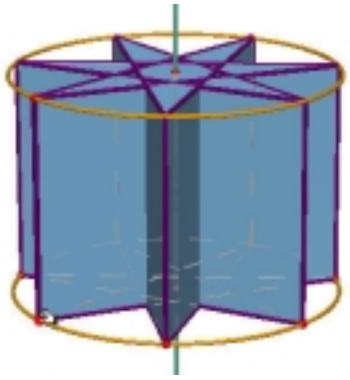


Abb. 4.70 Ein Passungsergebnis (7-seitiges Prisma)

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten



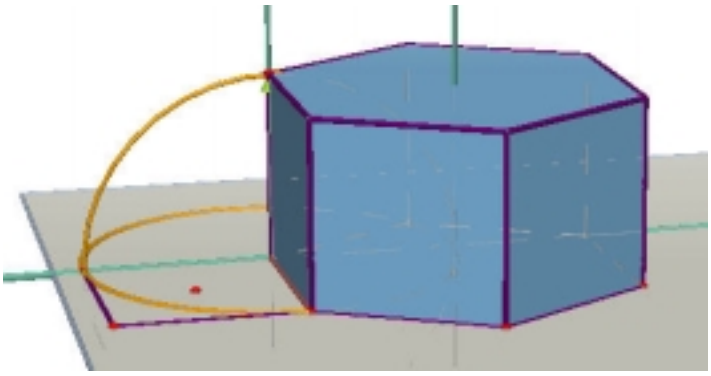
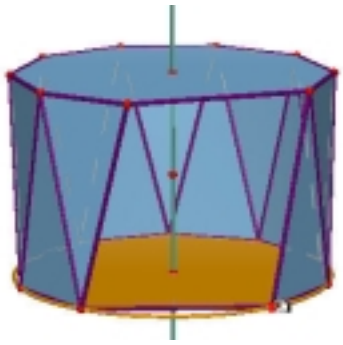
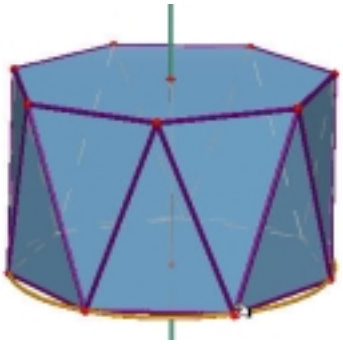


Abb. 4.71 Ein Passungsergebnis (7-seitiges Sternprisma)

Abb. 4.72 Konstruktion eines regelmäßigen Prismas





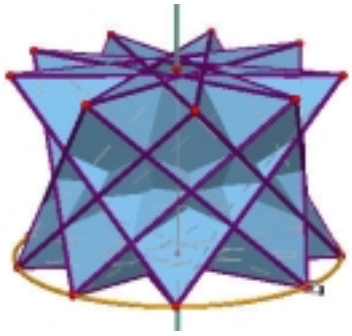
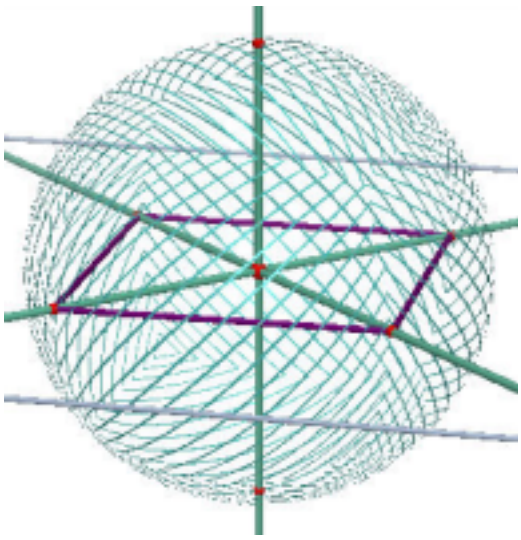


Abb. 4.73-75 Regelmäßige Antiprismen mittels dynamischer Passung (Beispiele: 7-seitiges Antiprisma, 9-seitiges „Stern-Antiprisma“)

4.3 Konstruktionen an und mit dem Oktaeder und in seinem Umfeld



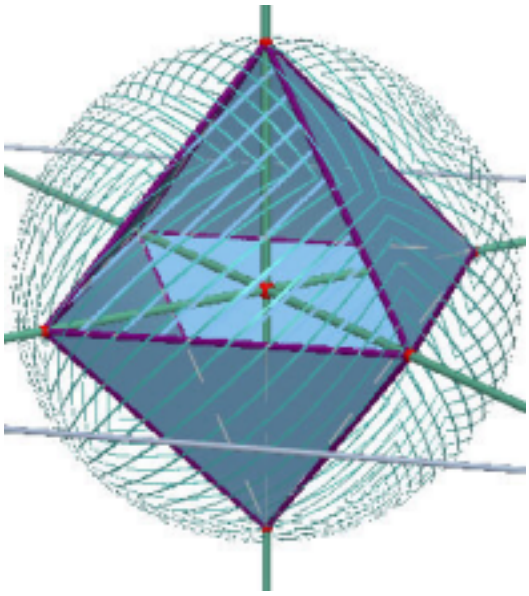


Abb. 4.76/77 Konstruktion des Oktaeders nach Euklid

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

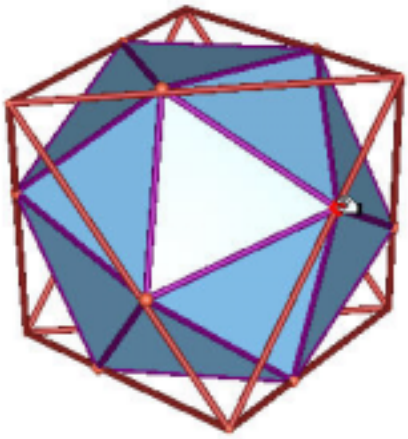


Abb. 4.78 Oktaeder mit einbeschriebenem Ikoseder per Passung

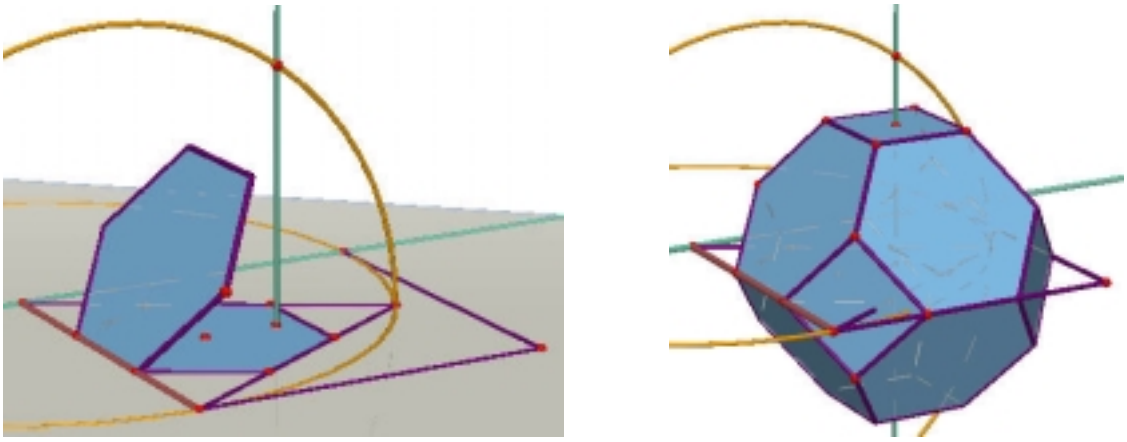


Abb. 4.79 Konstruktion des gestumpften Oktaeder

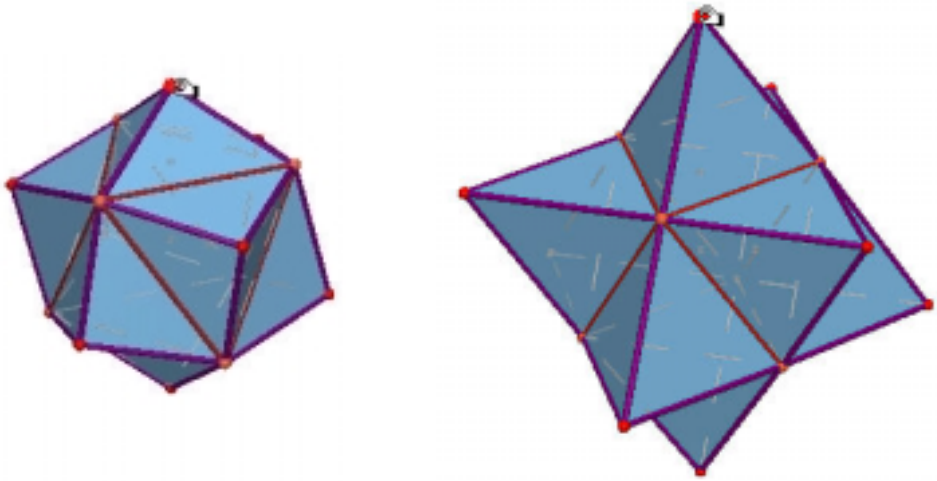


Abb. 4.80/81 Dynamisches Sternen des Oktaeders nach außen/zur Stella Octangula

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

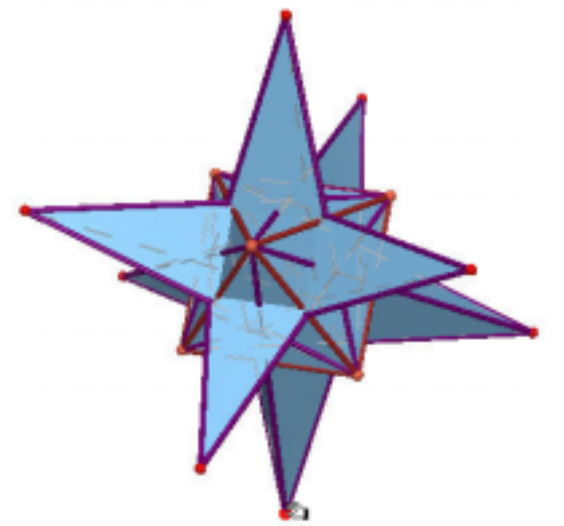


Abb. 4.82 Sternen des Oktaeders nach außen durchgeschlagen

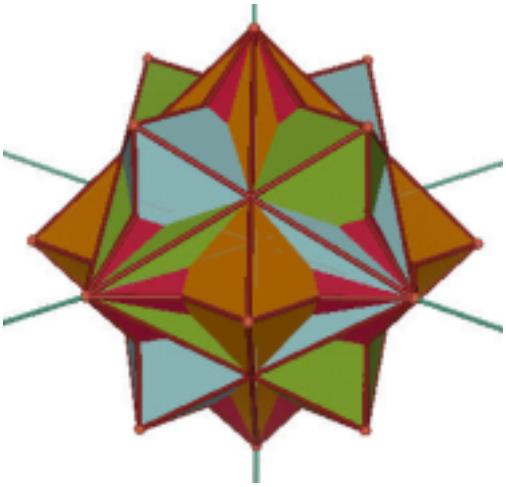


Abb. 4.83 Oktaedervierling (Rotation um die Eckenachsen)

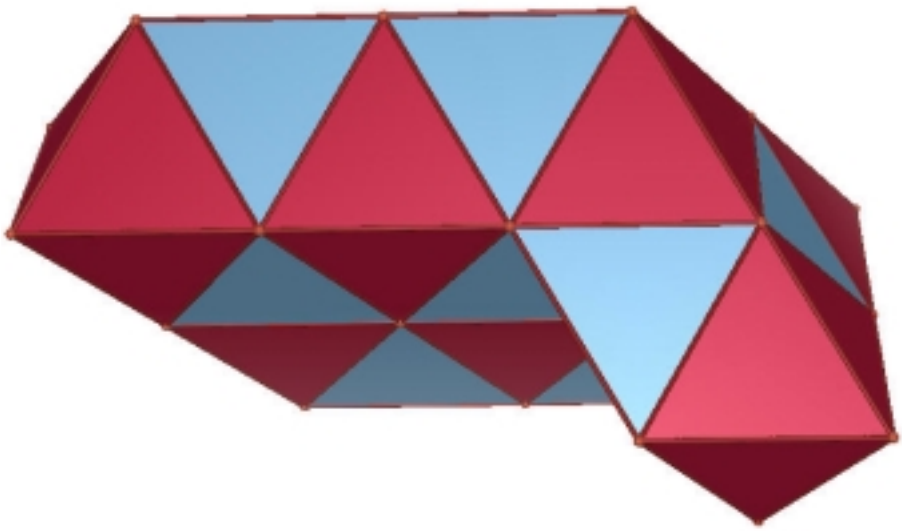


Abb. 4.84 Raumfüllung mit Oktaedern und Tetraedern

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

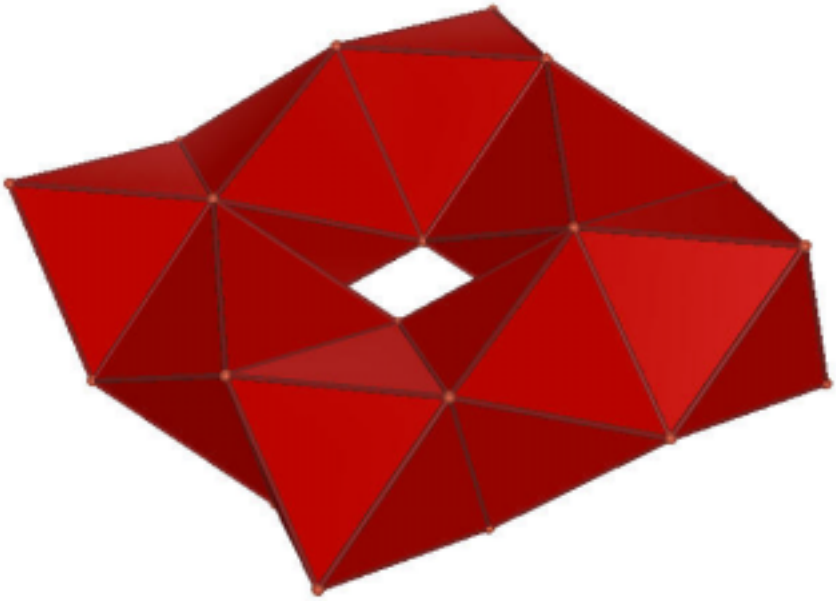


Abb. 4.85 Toruspolyeder aus Oktaedern

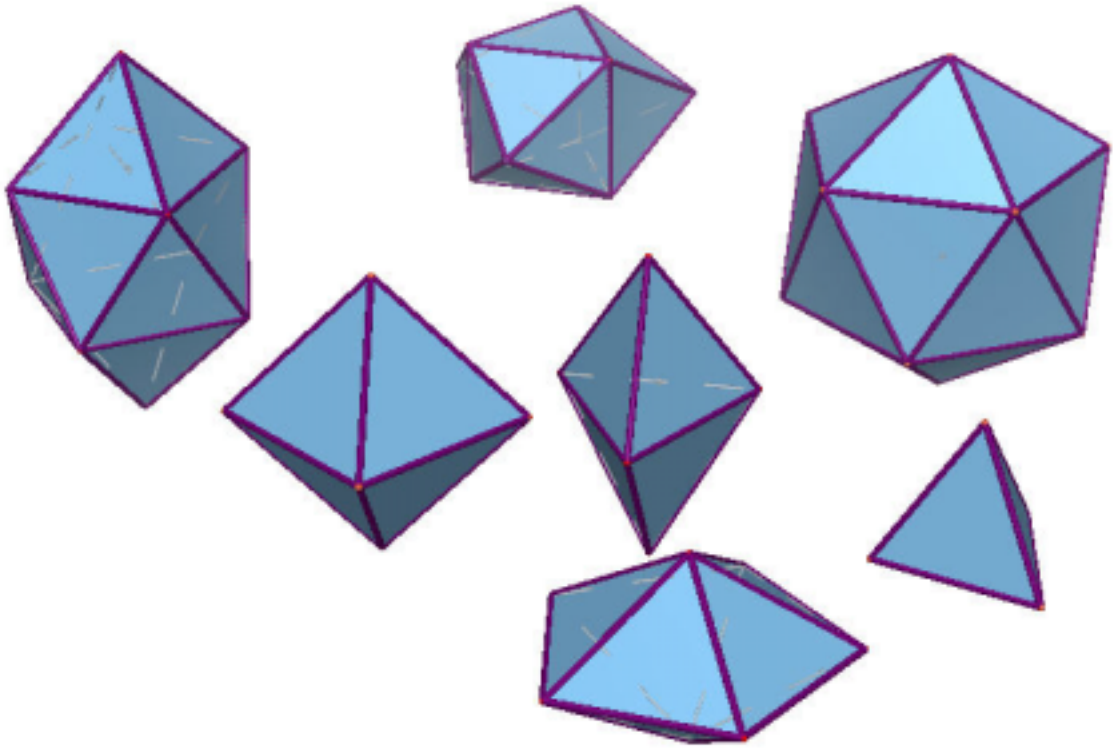


Abb. 4.86 Die sieben regelhaft konstruierbaren Deltoeder (konvexe Polyeder aus gleichseitigen Dreiecken)

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

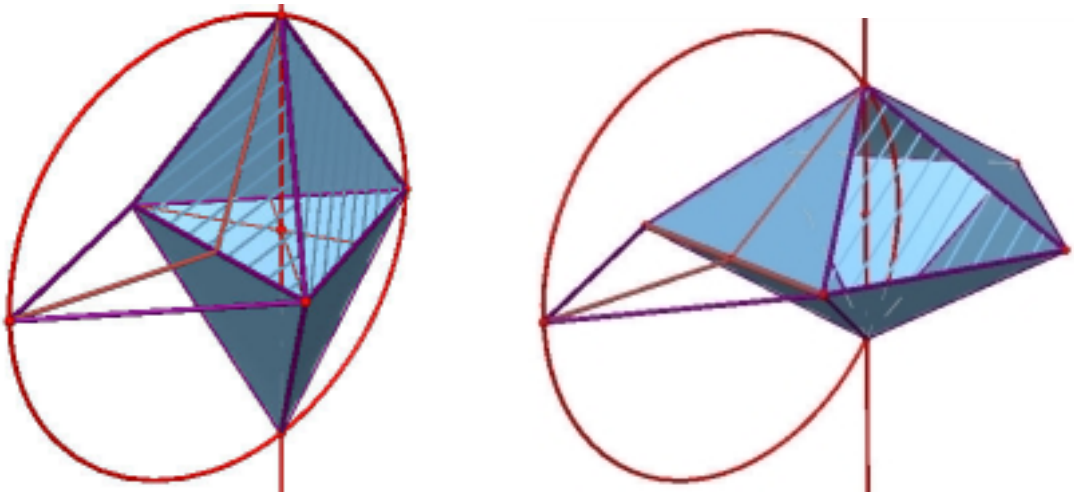


Abb. 4.87/88 Konstruktion des 6-seitigen/10-seitigen Deltoeders (der 3-seitigen/5-seiti-gen Doppelpyramide)

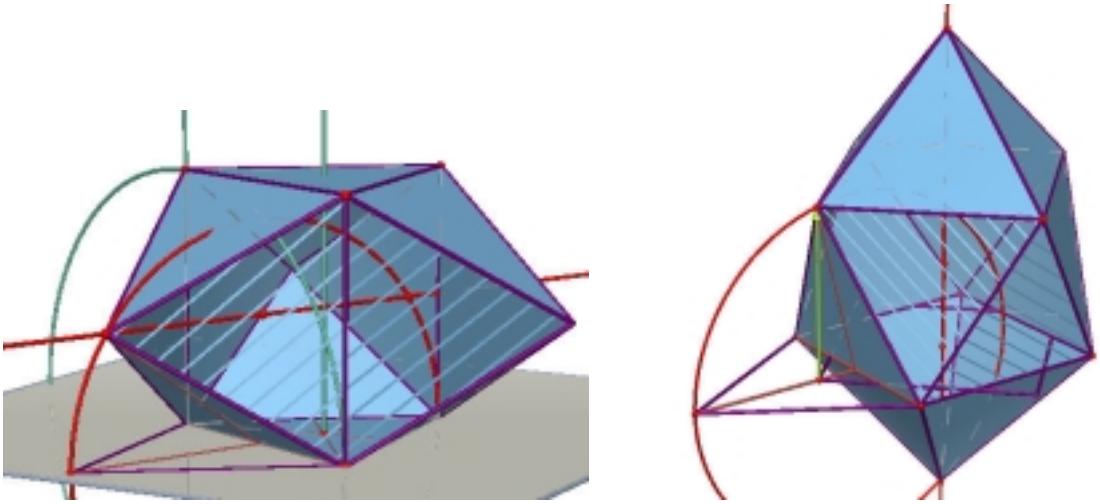


Abb. 4.89/90 Konstruktion des 14-seitigen/16-seitigen Deltoeders

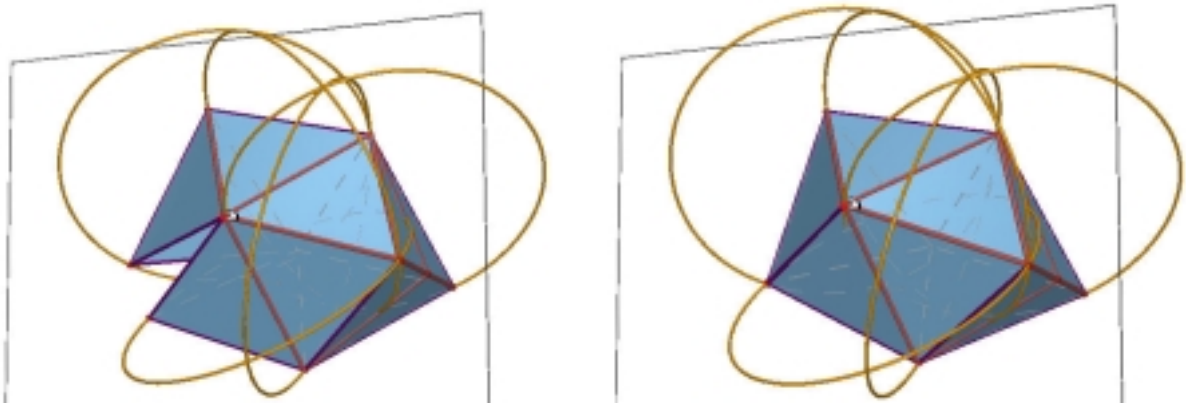


Abb. 4.91 Konstruktion des 12-seitigen Deltaeders durch Passung

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

4.4 Konstruktionen an und mit dem Dodekaeder und in seinem Umfeld

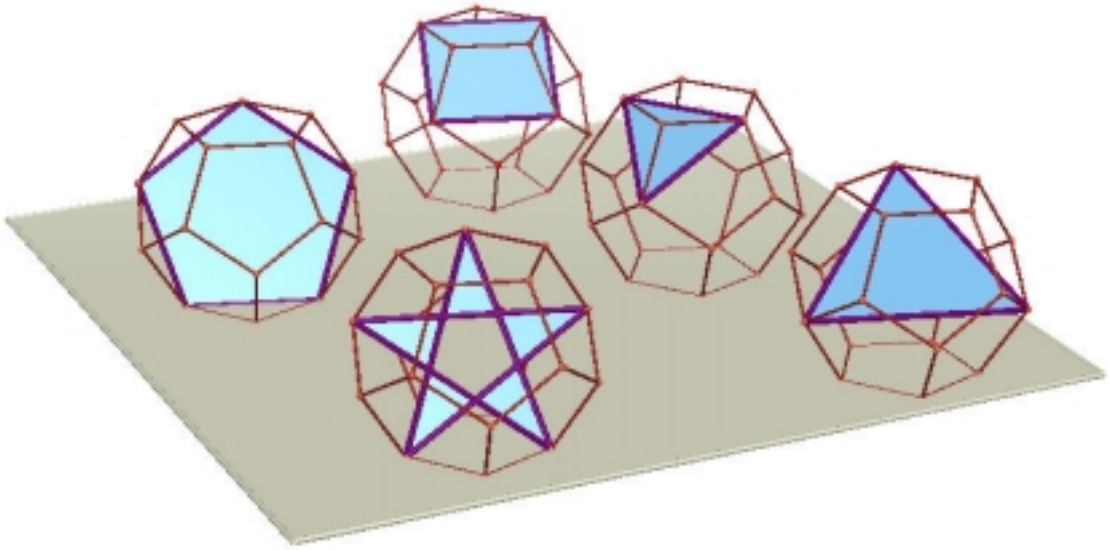


Abb. 4.92 Dodekaeder mit einbeschriebenen regelmäßigen Polygonen

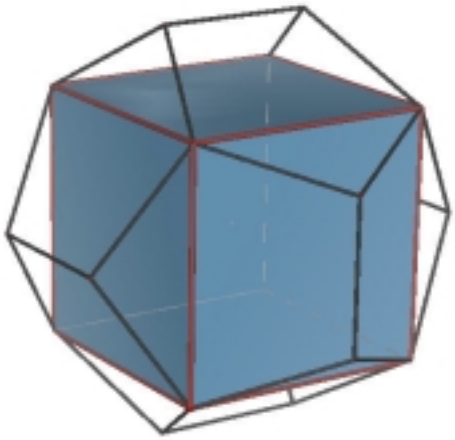


Abb. 4.93 Dodekaeder mit einbeschriebenem Würfel

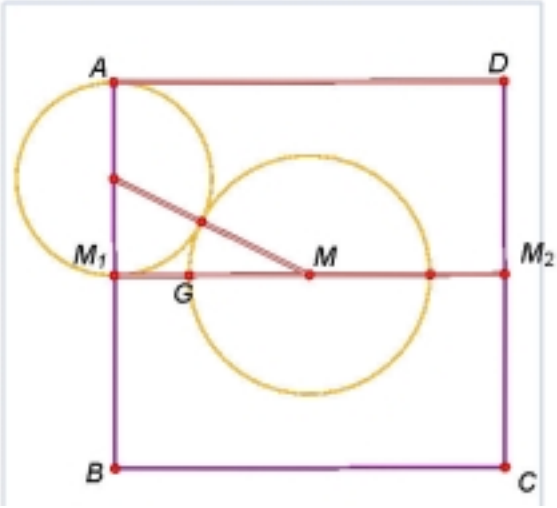


Abb. 4.94 Konstruktion des Dodekaeders nach Euklid (Fußpunkt Raumecke)

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

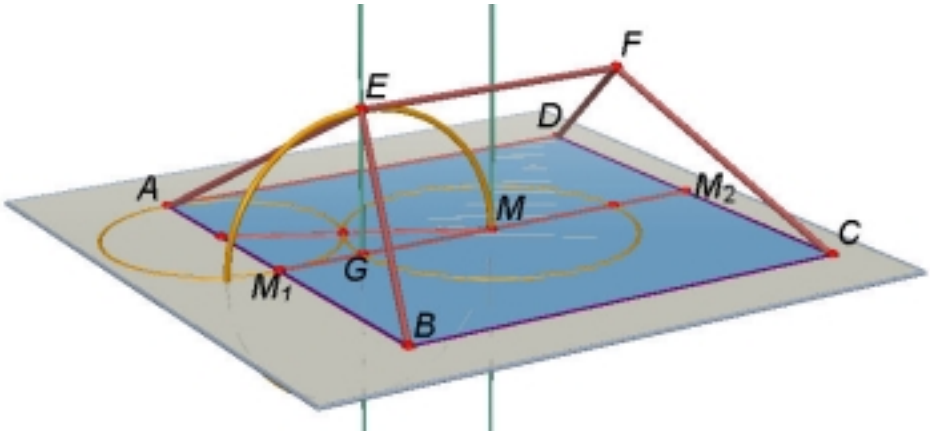


Abb. 4.95 Konstruktion des Dodekaeders nach Euklid („Dach“)

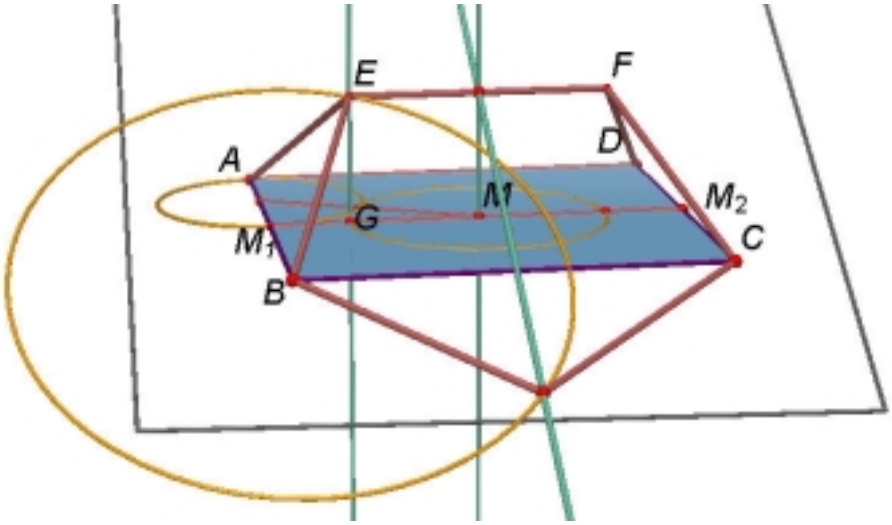


Abb. 4.96 Konstruktion des Dodekaeders nach Euklid (Seitenfläche)

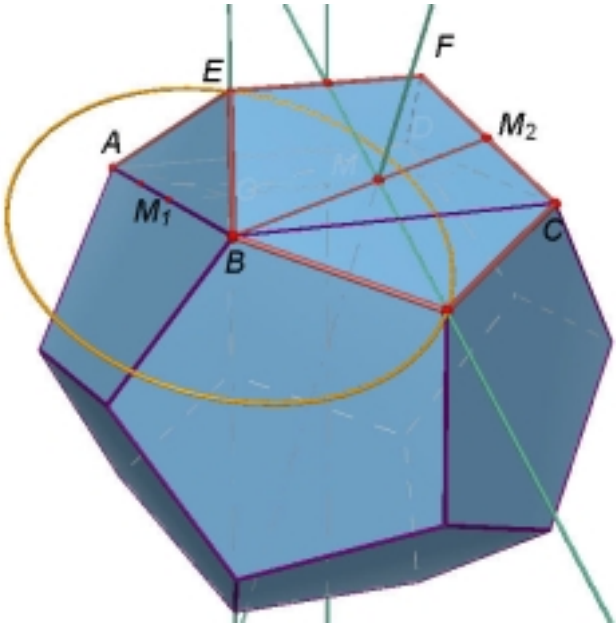
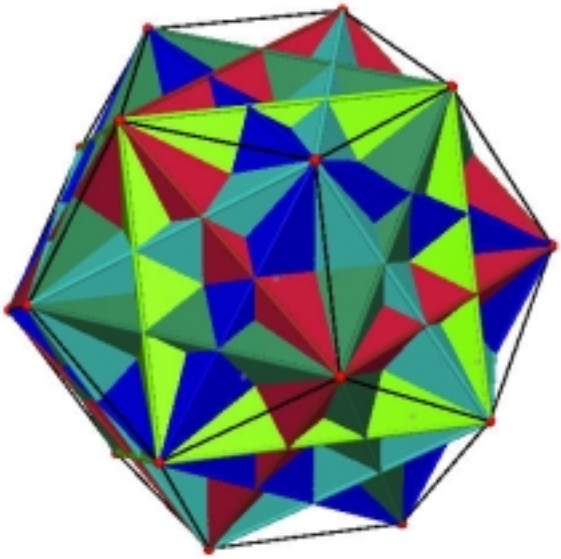


Abb. 4.97 Konstruktion des Dodekaeders nach Euklid (Ergebnis)

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten



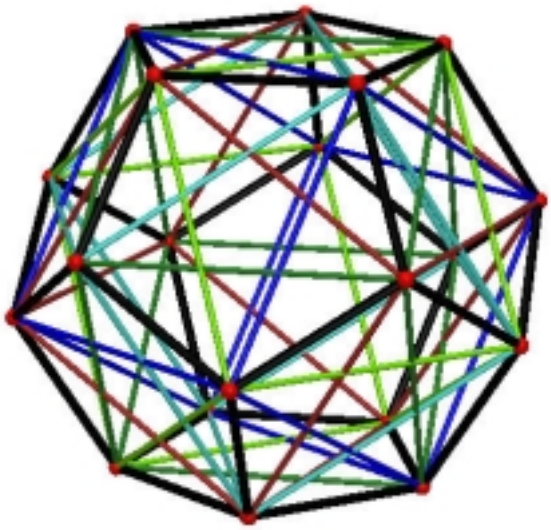


Abb. 4.98/99 Würfelfünfling aus einbeschriebenen Würfeln (flächig/nur Kanten)

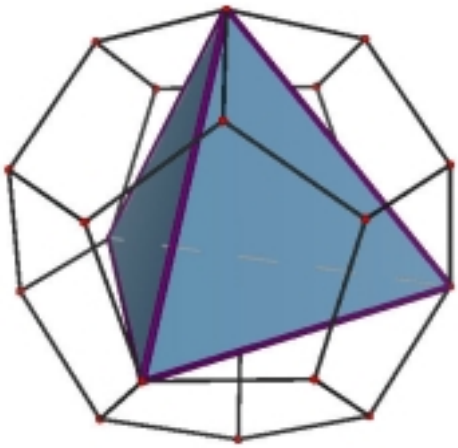
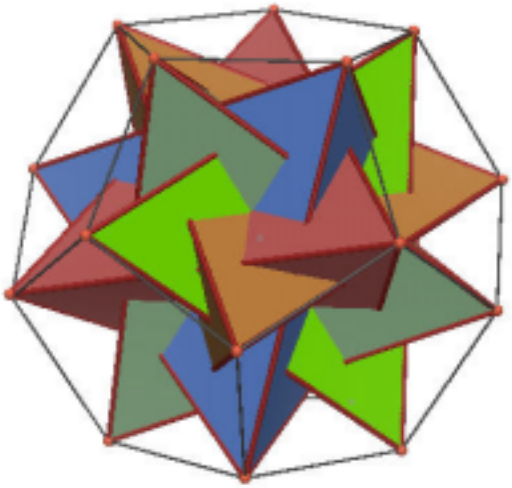


Abb. 4.101 Dodekaeder mit einbeschriebenem Tetraeder



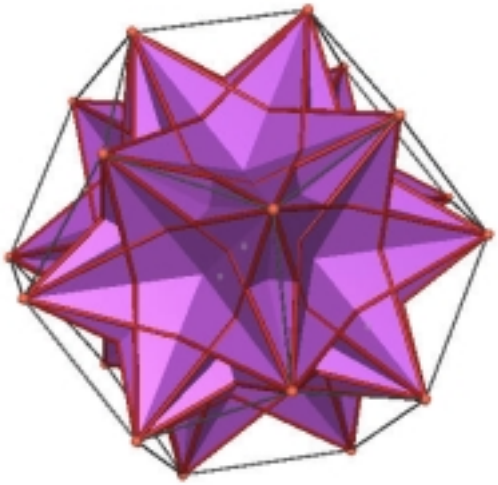


Abb. 4.101/102 Tetraederfünfling/Tetraederzehnling aus einbeschriebenen Tetraedern

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

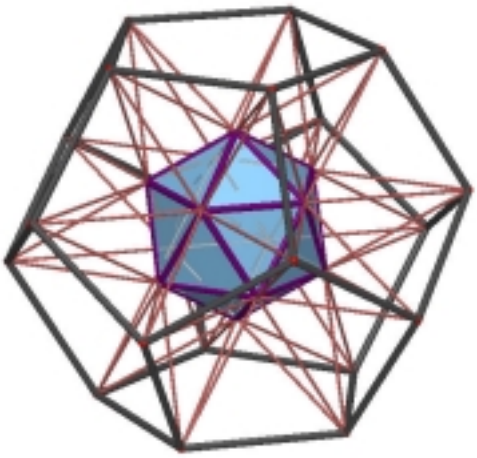


Abb. 4.103 Ikosaeder im Dodekaeder als Diagonalenschnittpunkt -Konfiguration

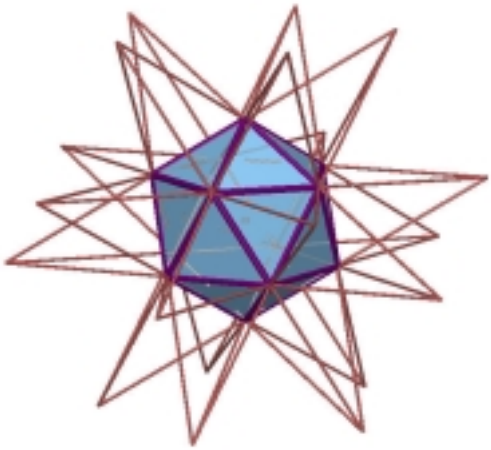


Abb. 104 Großes Sterndodekaeder im Dodekaeder als Diagonalen-Konfiguration

Abb. 4.105 Kleines Sterndodekaeder im Dodekaeder als Diagonalenkonfiguration

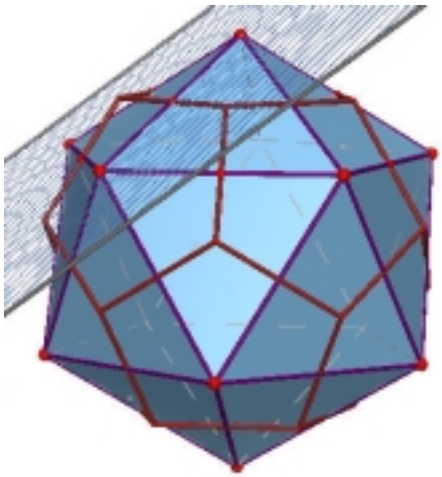
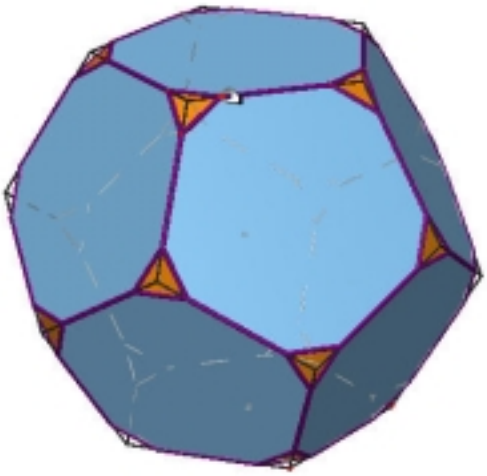


Abb. 4.106 Dodekaeder mit Ikosaeder als reziprokem Polyeder



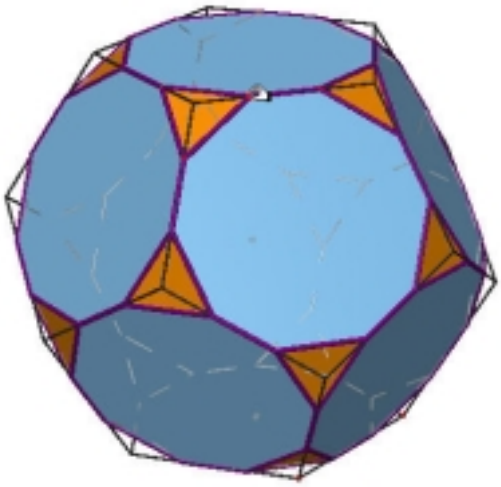


Abb. 4.107/108 Metamorphose des Dodekaeders durch Eckenstumpfen (2. Zustand: Gestumpftes Dodekaeder)

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

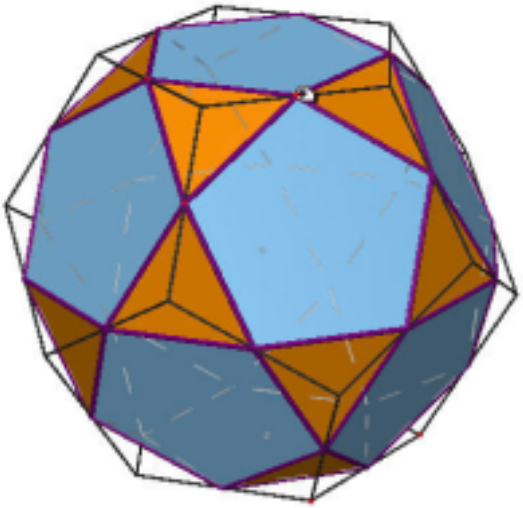
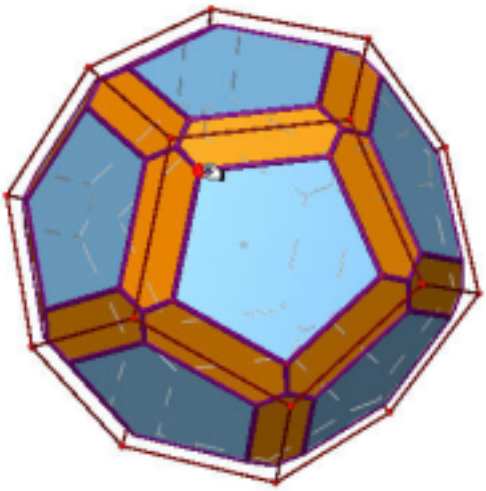


Abb. 4.109 Metamorphose des Dodekaeders durch Eckenstumpfen (3. Zustand: Ikosidodekaeder)



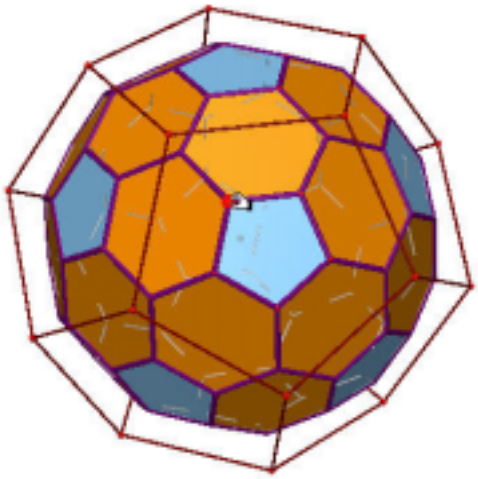


Abb. 4.110/111 Metamorphose des Dodekaeders durch Kantenstumpfen

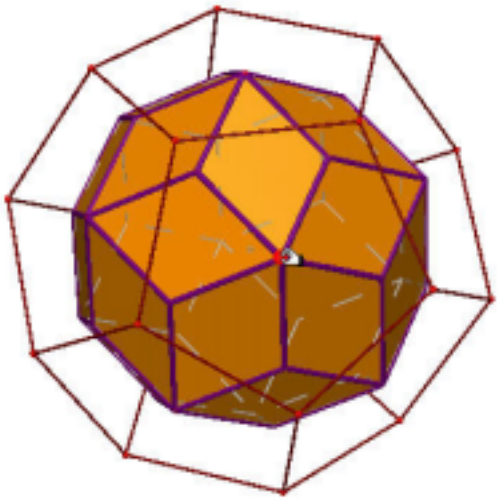


Abb. 4.112 Metamorphose des Dodekaeders durch Kantenstumpfen (Endzustand: Rhombentriacontaeder, dual zum Ikosidodekaeder)

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

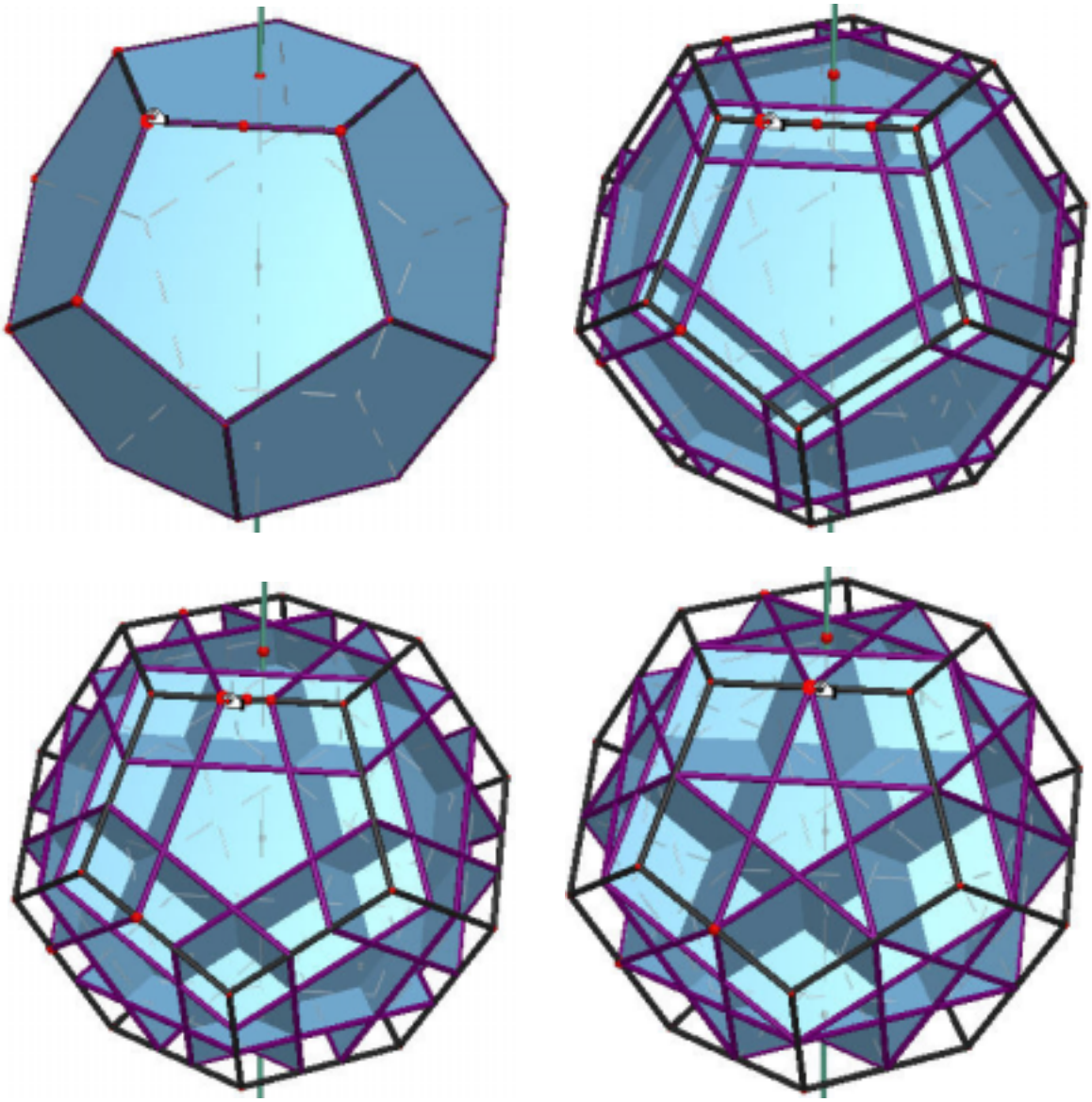


Abb. 4.113 Metamorphose des Dodekaeders zum Dodekadodekaeder (gestumpftes Großes Ikosaeder)

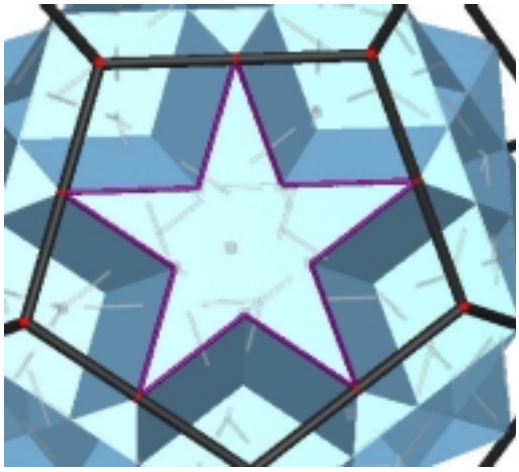


Abb. 4.114 Abdeckeln einer der Sternfünfeckflächen

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

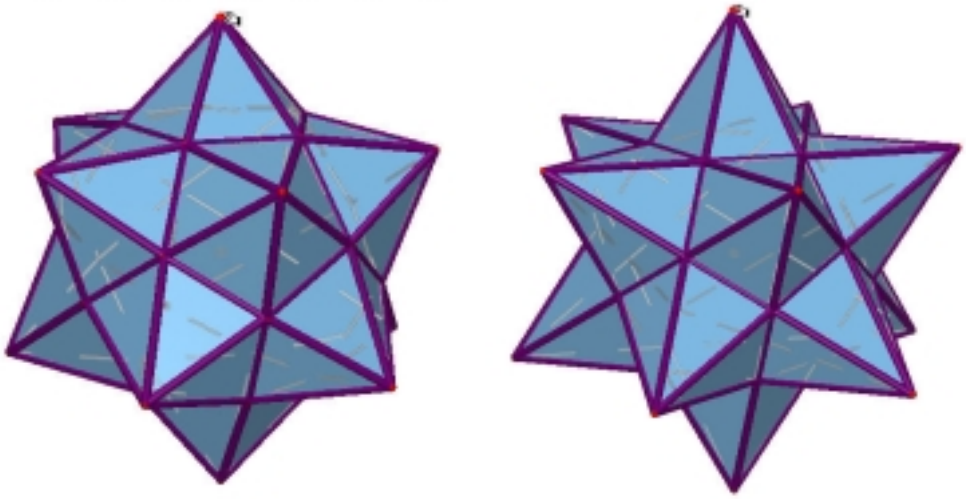


Abb. 4.115/116 Dynamisches Sternen nach außen zum Kleinen Sterndodekaeder

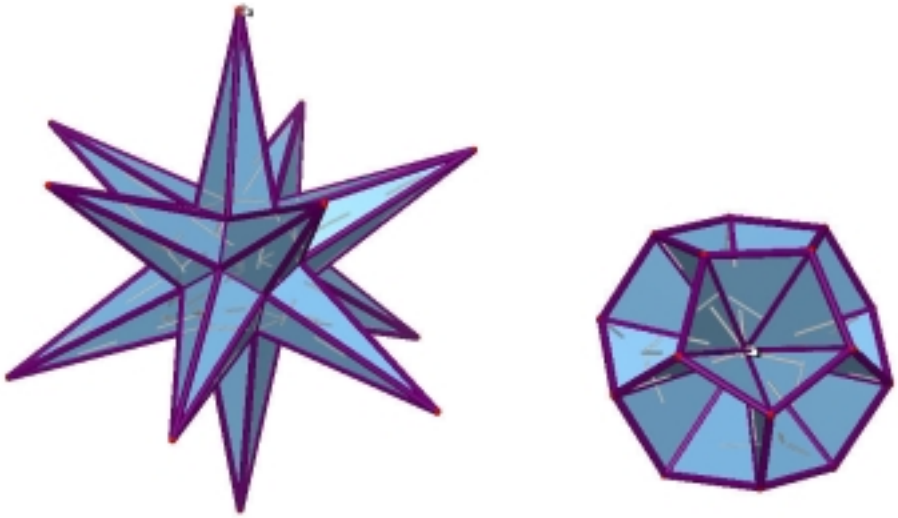


Abb. 4.117/118 Dynamisches Sternen nach außen/innen

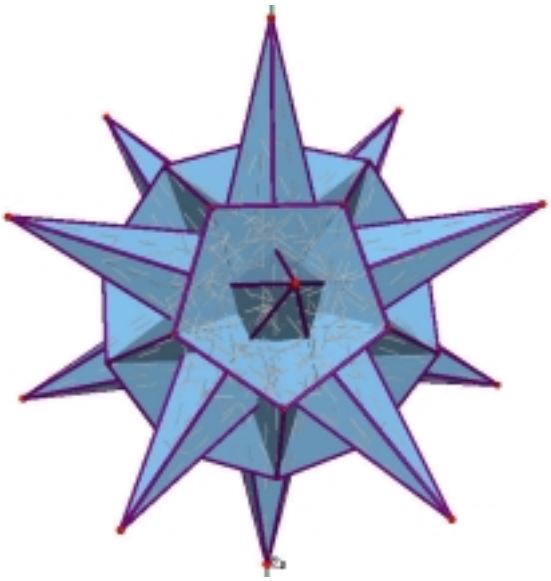


Abb. 4.119 Dynamisches Sternen nach innen durchgeschlagen

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

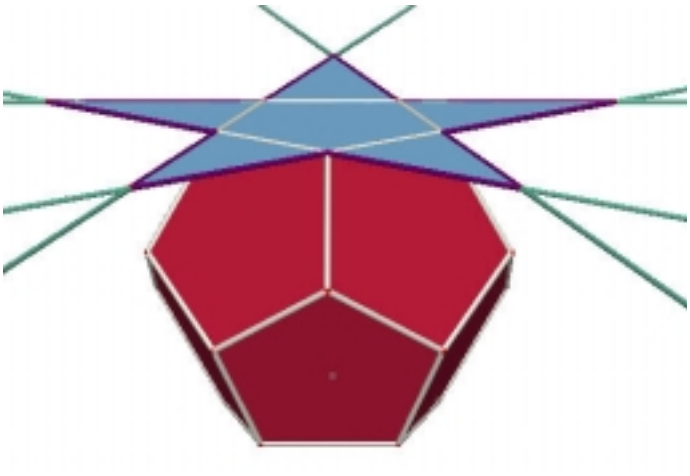


Abb. 4.120 Konstruktion des Kleinen Sterndodekaeders (1. Schritt)

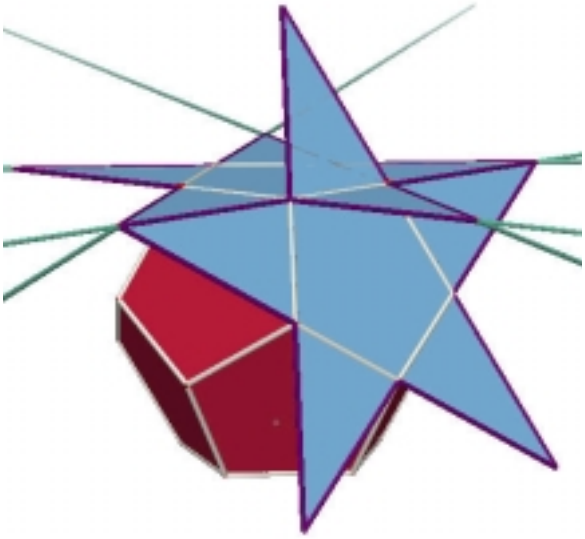


Abb. 4.121 Konstruktion des Kleinen Sterndodekaeders (2. Schritt)

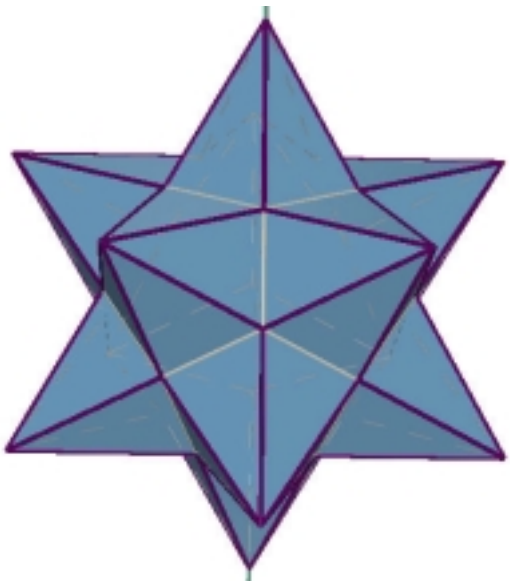


Abb. 4.122 Konstruktion des Kleinen Sterndodekaeders (Ergebnis)

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

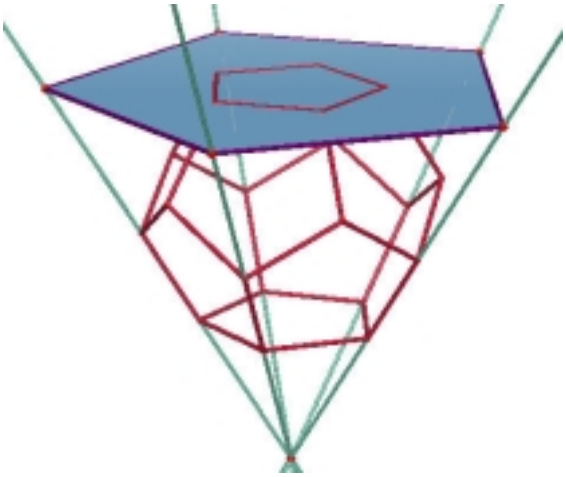


Abb. 4.123 Konstruktion des Großen Dodekaeders (1. Schritt)

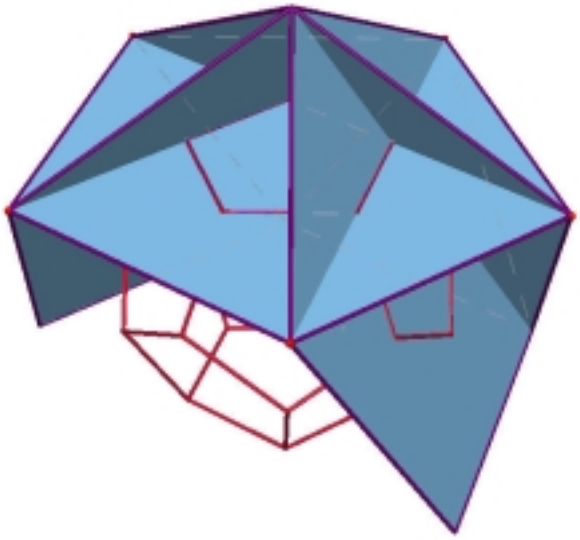


Abb. 4.124 Konstruktion des Großen Dodekaeders (weiterer Schritt)

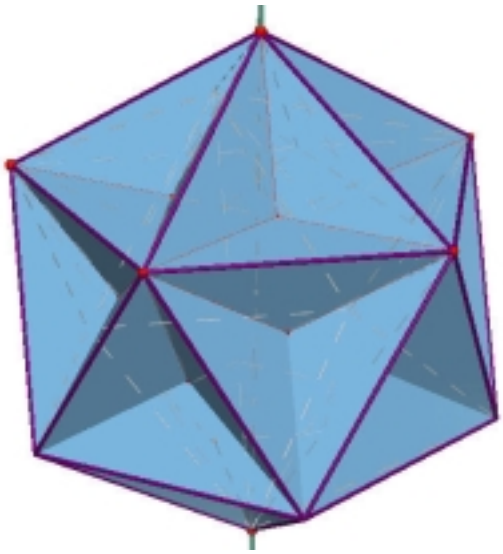


Abb. 4.125 Konstruktion des Großen Dodekaeders (Ergebnis)

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

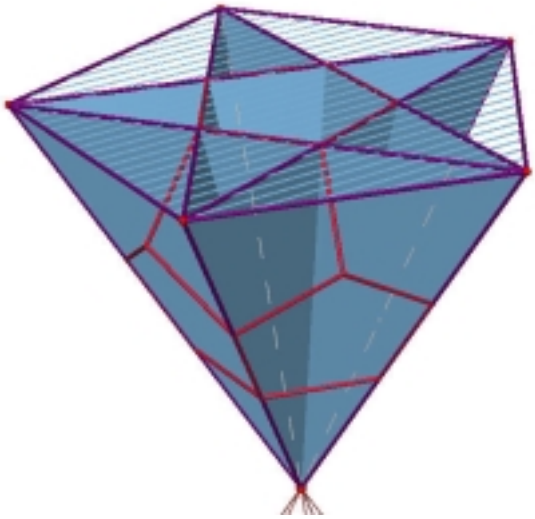


Abb. 4.126 Konstruktion des Großen Ikosaeders (1. Schritt)

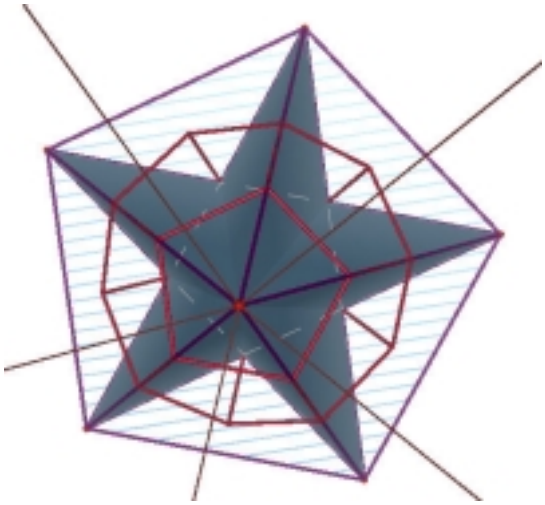


Abb. 4.127 Konstruktion des Großen Ikosaeders (weiterer Schritt)

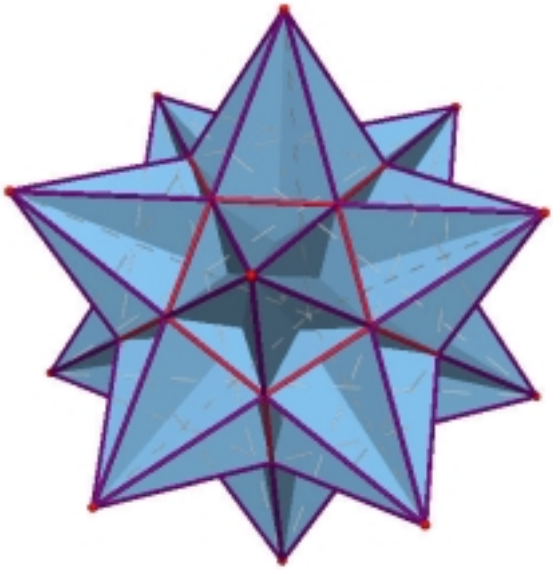


Abb. 4.128 Konstruktion des Großen Ikosaeders (Ergebnis)

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

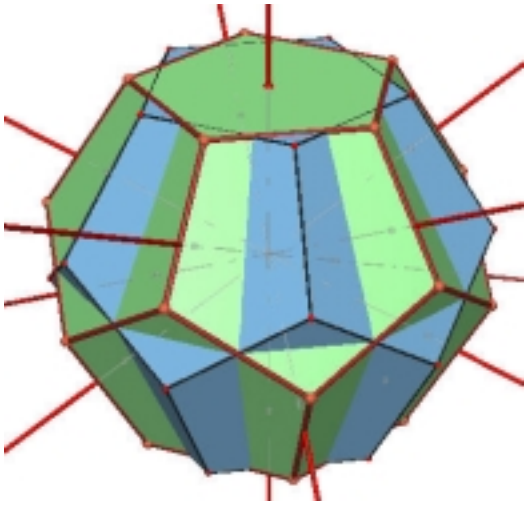


Abb. 4.129 Dodekaederzwilling (Rotation um Flächenmittenachse)

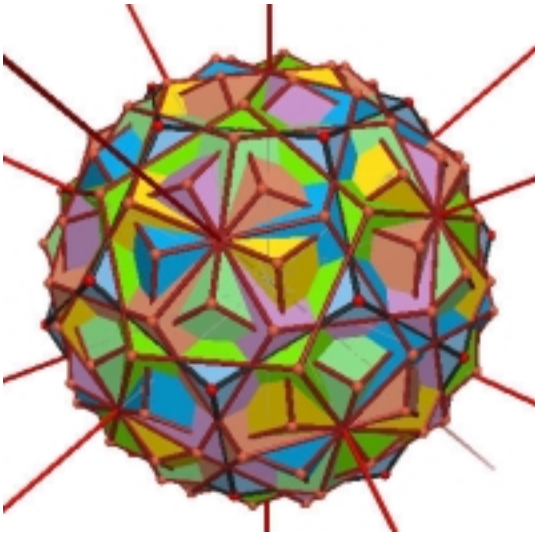


Abb. 4.130 Dodekaedersechsling (Rotation um die Flächenmittenachsen)

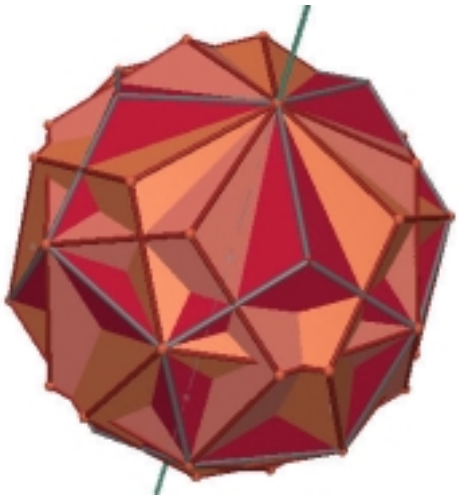
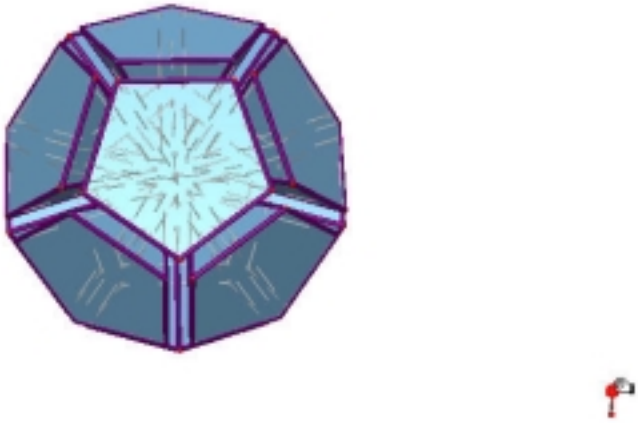


Abb. 4.131 Dodekaederdrilling (Rotation um Eckenachse)



© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

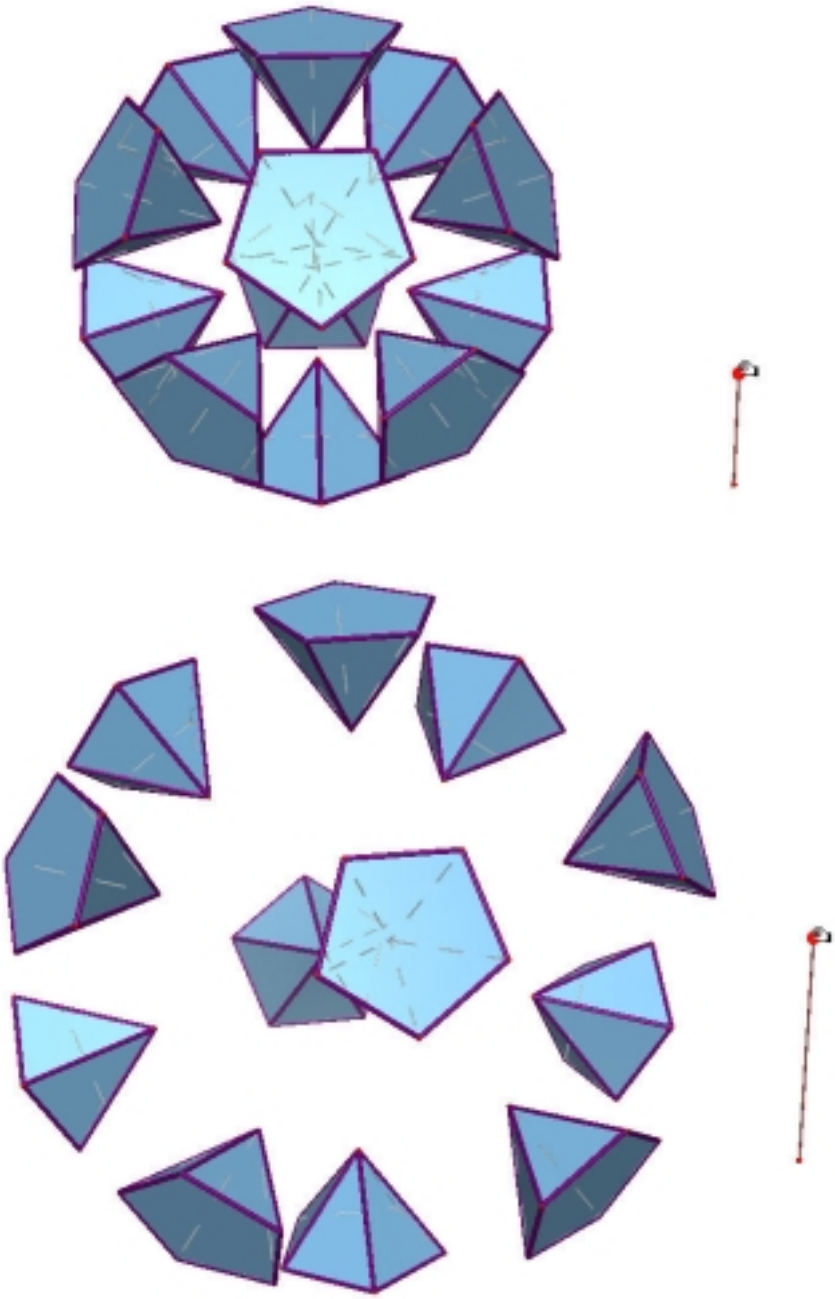


Abb. 4.132-134 Dodekaederexplosion (3 Phasen)

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

4.1 Konstruktionen an und mit dem Ikosaeder und in seinem Umfeld

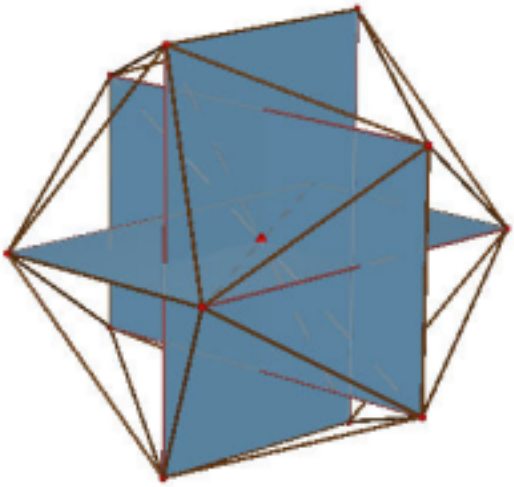


Abb. 4.135 Ikoseder mit 3 einbeschriebenen goldenen Rechtecken (paarweise zueinander senkrecht)

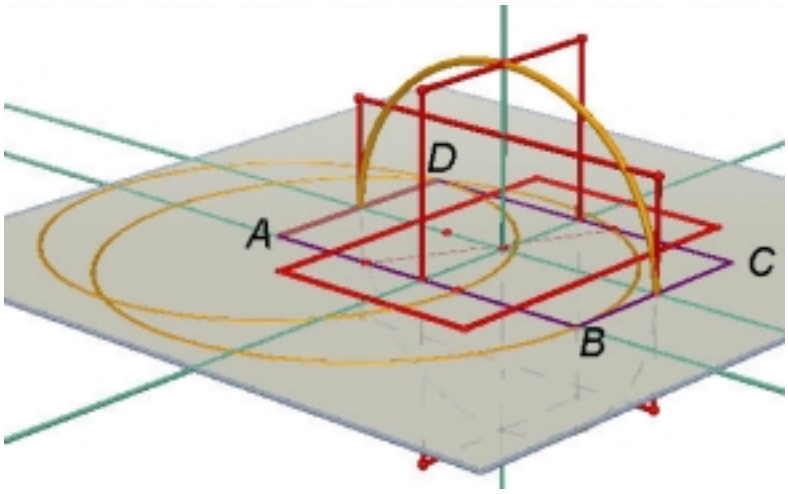


Abb. 4.136 Ikosederkonstruktion (Konstruktion der goldenen Rechtecke)

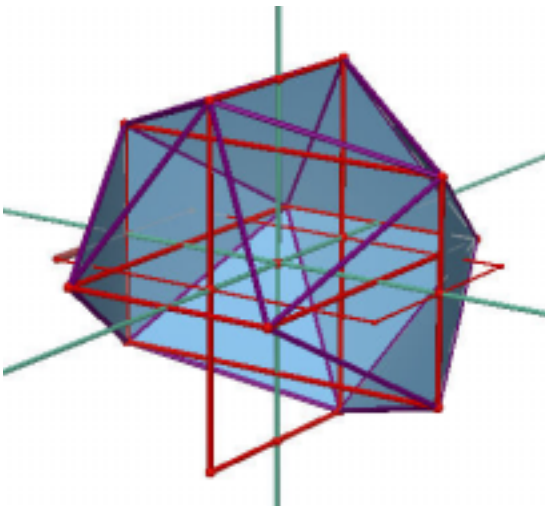


Abb. 4.137 Ikosederkonstruktion (weiterer Schritt)

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

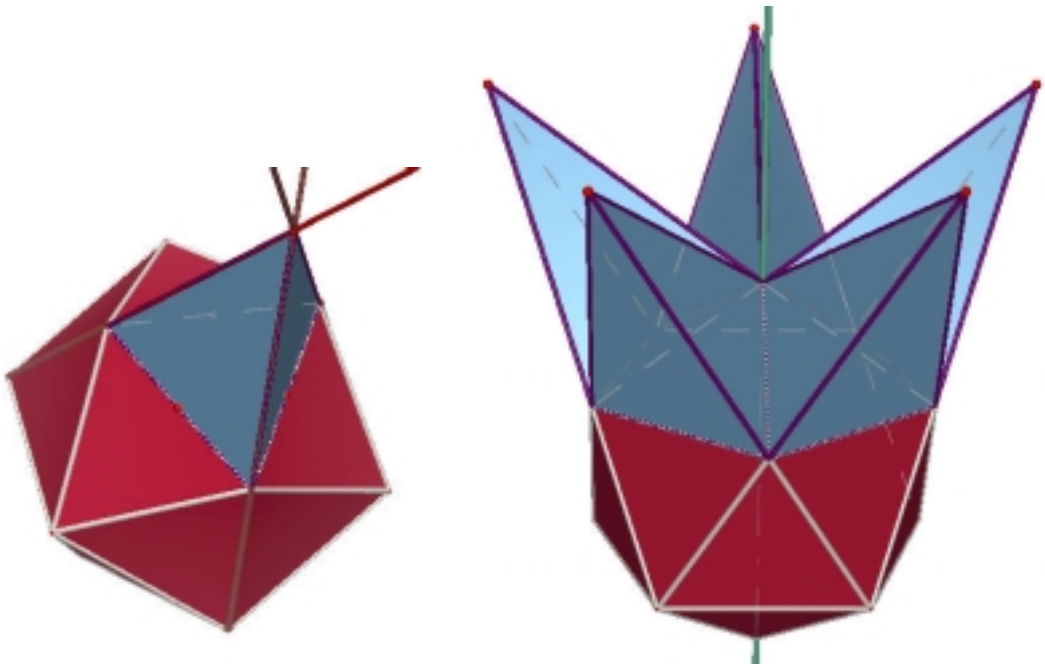


Abb. 4.138/139 Konstruktion des Großen Sterndodekaeders (1. und weiterer Schritt)

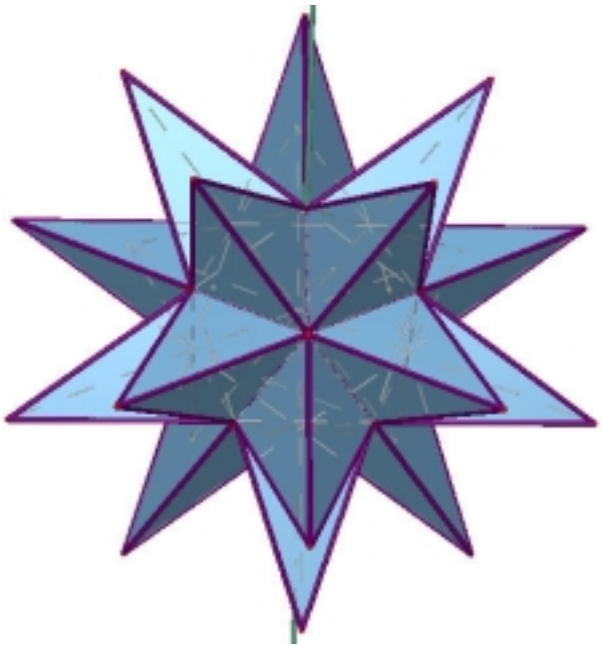


Abb. 4.140 Konstruktion des Großen Sterndodekaeders (Ergebnis)

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

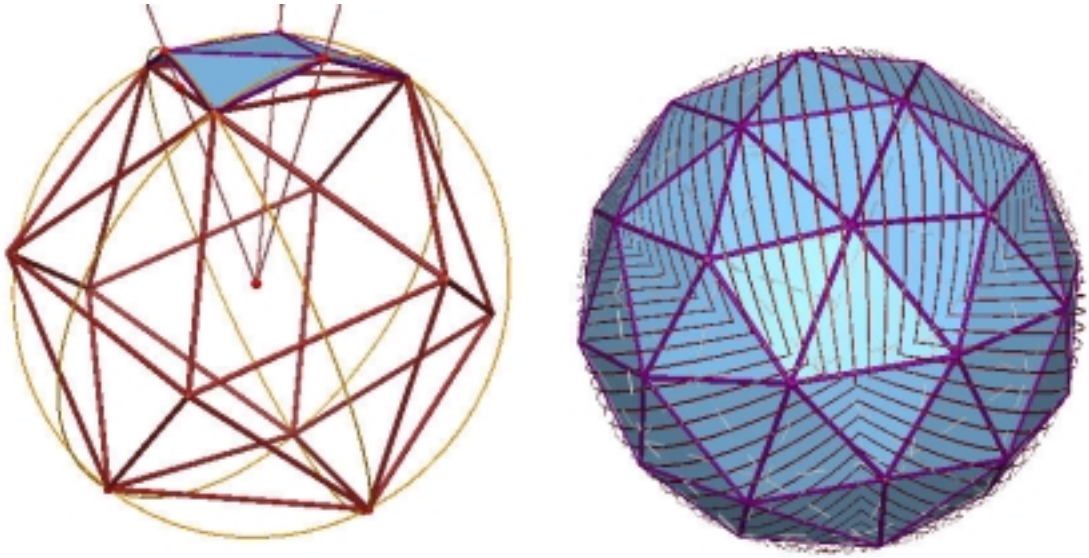


Abb. 4.150/151 Konstruktion einer geodätischen Kugel aus einem Ikosaeder mit 2^2-Teilung des sphärischen Dreiecks (1. Schritt/Ergebnis mit Umkugel)

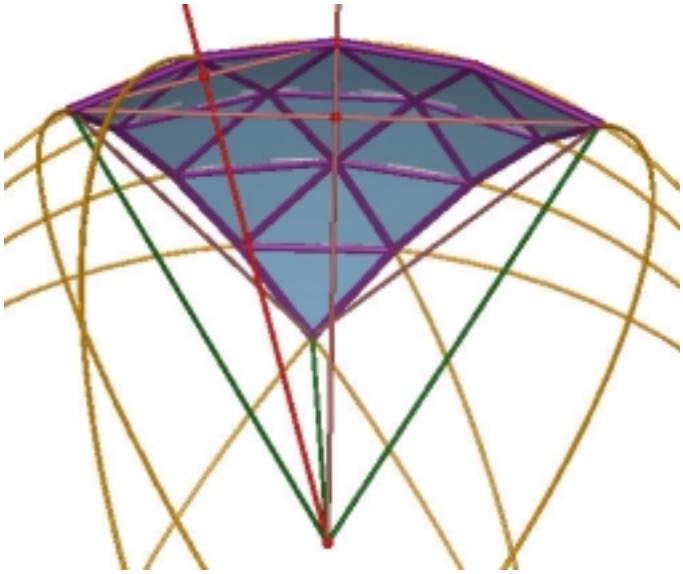
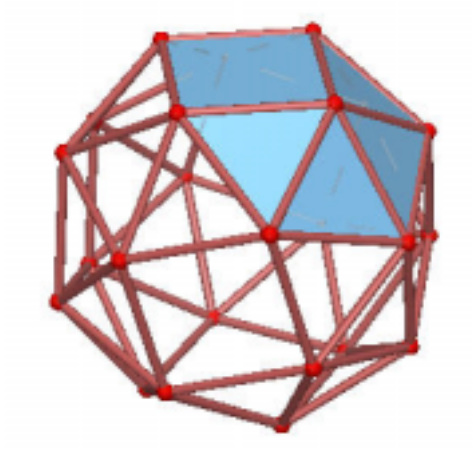


Abb. 4.152 Konstruktion einer geodätischen Kugel aus einem Ikosaeder mit 4^2-Teilung des sphärischen Dreiecks (1. Schritt)

5. Archimedische Körper

Die Konstruktion der nachfolgend abgebildeten konvexen halbregulären Körper (archimedische Körper) auf verschiedene Weise ist eine weitere Aufgabe, soweit diese nicht schon im Vorausgegangenen z. Teil aus den platonischen Körpern konstruiert worden sind.
Ihre Darstellung als Kantenmodelle enthält die in einer Ecke zusammenstoßenden Polygone in Flächendarstellung (die den so genannter Eckenstern bilden).

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten



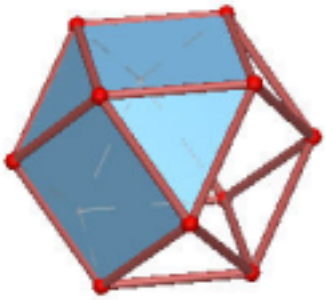
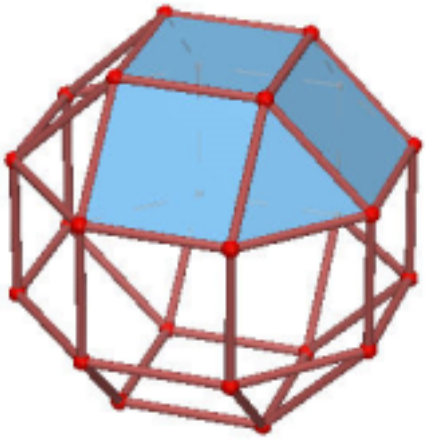


Abb. 5.1 Abgeschrägter Würfel (Cubus simus)
(und der dazu ebenensymmetrische Körper)

Abb. 5.2 Kuboktaeder



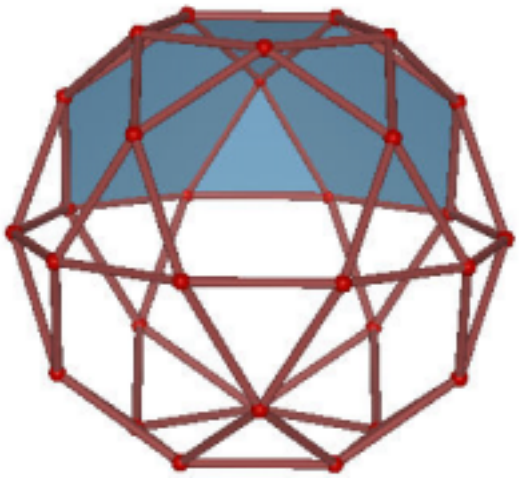
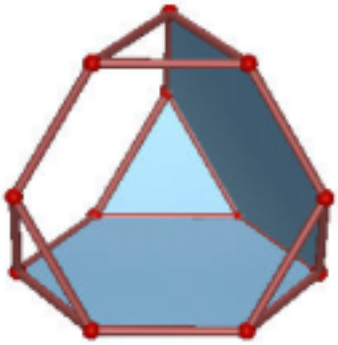


Abb. 5.3 (Kleines) Rhombenkuboktaeder

Abb. 5.4 Ikosidodekaeder



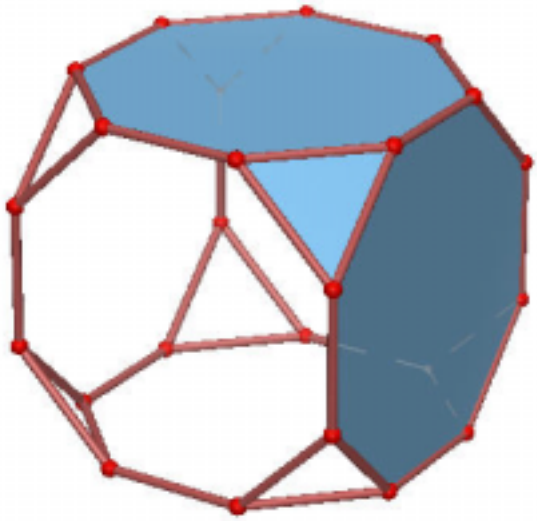


Abb. 5.5 Gestumpftes Tetraeder

Abb. 5.6 Gestumpfter Würfel

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

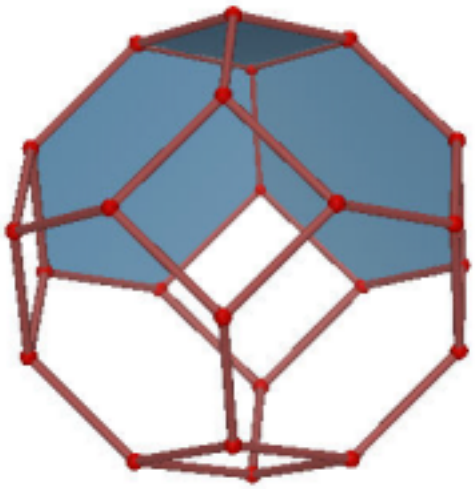


Abb. 5.7 Gestumpftes Oktaeder

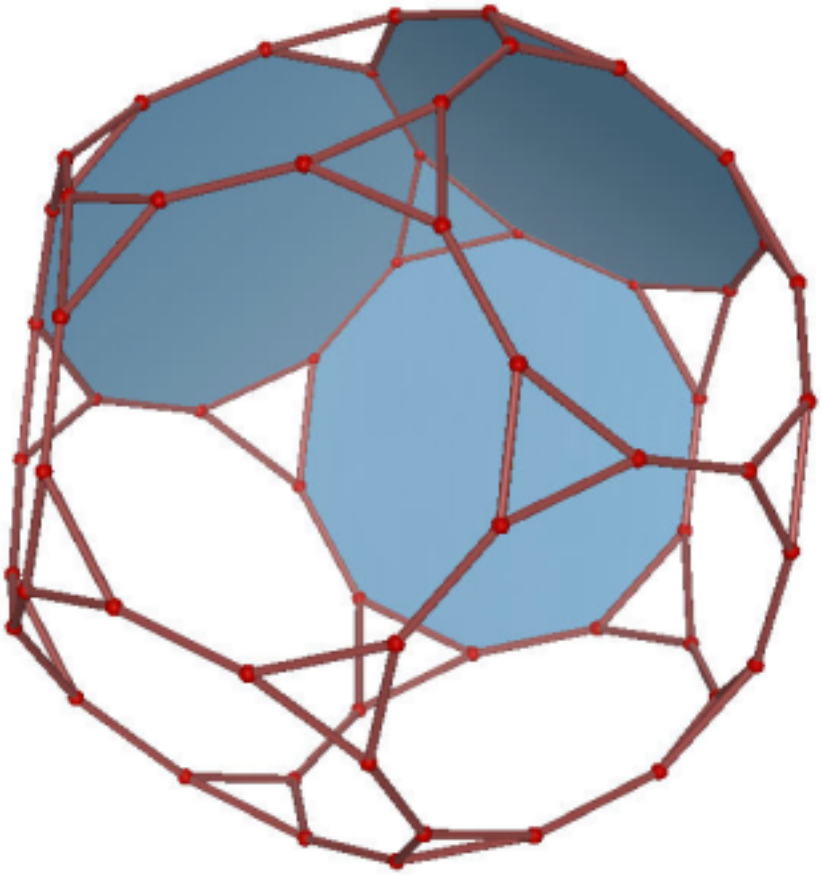


Abb. 5.8 Gestumpftes Dodekaeder

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

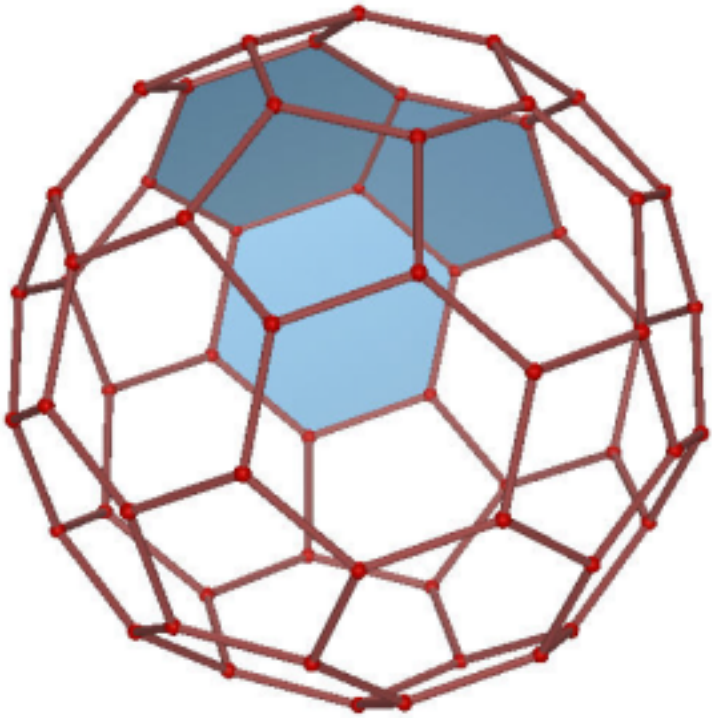


Abb. 5.9 Gestumpftes Ikosaeder („Fußballpolyeder“)

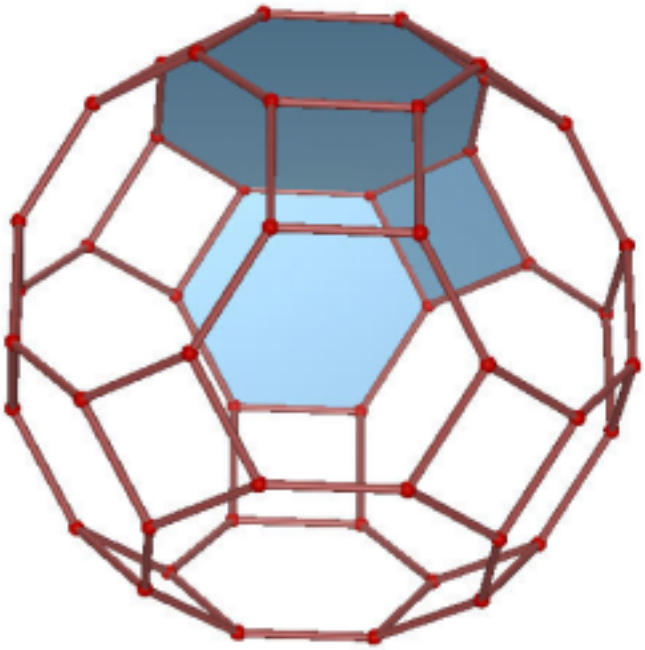


Abb. 5.10 Gestumpftes Kuboktaeder (auch Großes Rhombenkuboktaeder genannt)

6. Schlussbemerkung

Die Behandlung von Polyedern und ihrer Konstruktion im virtuellen Raum muss stets im Kontext anderer medienspezischer Konstruktionen gesehen werden und darf nicht von diesen isoliert werden.
Auf die Schnittstellenprobleme (im Diagramm jeweils durch Pfeile symbolisiert) zwischen den medienspezifischen Modellierungsmöglichkeiten, insbesondere zwi-

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

schen der computerisierten und den traditionellen Modellierungen im Kontext des Geometrieunterrichts gehen wir hier aber nicht ein. (Als einen Beitrag zur Medienerziehung im Geometrieunterricht könnten an dafür geeigneten Beispielen der verschiedenen Modellierungsmedien erfahrbar gemacht und ihre Vor- und Nachteile bewertet werden.)

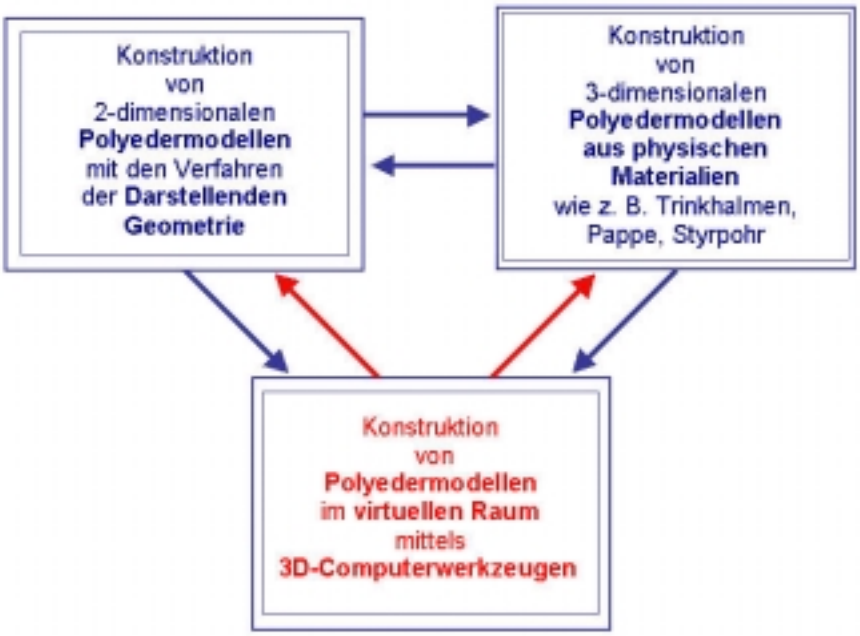


Diagramm (Medienspezifische Polyedermodellierung)

7. Literatur

Bainville, E. , Laborde, J.-M. (2004): Cabri 3D 1.0. (Software). Grenoble: Cabrilog

Böhm, J./Quaisser, E. (1991): Schönheit und Harmonie geometrischer Formen. Berlin: Akademie Verlag

Coxeter, H. S. M. (1981): Unvergängliche Geometrie. Basel: Birkhäuser

Cromwell, P. R. (1997): Polyhedra. Cambridge University Press

Hart, G. W. (1996-2000): Virtual Polyhedra – The Encyclopedia of Polyhedra. http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/vp.html

Ludwig, M. (2004): Durchdringungskörper in der Raumgeometrie. In: MU, Jg. 50, Heft 1-2

Schumann, H. (1989): Deltaeder - ein raumgeometrisches Entdeckungs- und Übungsfeld. In: Didaktik der Mathematik (DdM). 17(4) S. 263-295

Schumann, H. (1993): Computerunterstüztes Stumpfen und Sternen von Polyedern. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM). 25(6) S. 191-195

Schumann, H. (2001): Raumgeometrie – Unterricht mit Computerwerkzeugen. Berlin: Cornelsen

Thaer, C. (Hg.) (1980): Euclides: Die Elemente: Buch I – XIII. Darmstadt: WBG

Webb, R. (2001-2004): Stella – Polyhedron Navigator. http://www.software3d.com/Stella.html

© 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten