

# KÖRPERGEOMETRIE

## – ein progressives Tool für den Raumgeometrie-Unterricht

### 1 Einleitung

Geometrische Körper können heute neben den herkömmlichen Möglichkeiten ("Papier-Bleistift"- und print-mediale Darstellung, materiale Darstellung) auch als 3-dimensionale Objekte auf dem Bildschirm dargestellt werden. Diese Darstellungsweise ist Basis für 3D-CAD-Systeme; implizit kommt sie in jedem 3D-Computerspiel vor.

Welche wesentlichen Forderungen sind nun an ein aktuelles grafisches Computerwerkzeug zu stellen, das im von der Behandlung geometrische Körper geprägten Raumgeometrie-Unterricht der Sekundarstufe I eingesetzt werden kann?

- Als Visualisierungswerkzeug soll es u.a. gestatten, die Standardkörper der Schulgeometrie und außerdem die aus diesen Körpern gewonnenen Körper so zu betrachten, als hätte man die Körper als Kanten-, Flächen- oder Vollkörpermodelle in der "Hand". (Das wird durch das sog. Virtual Sphere Device geleistet, bei dem jedem Körper eine virtuelle Kugel umschrieben wird, die mit der Maus beliebig bewegt werden kann.)
- Es soll den Übergang zur taktilen Wahrnehmung der auf dem Bildschirm nur visuell wahrnehmbaren Körper ermöglichen. (Das geschieht durch den Ausdruck von Körpernetzen und deren anschließende Auffaltung.)
- Es soll als Messwerkzeug auf vielfältige Weise gestatten, die Metrik eines Körpers zu studieren und die Ausgabe der wahren Form von Objekten, die sich auf und im Körper befinden, zulassen.
- Als Konstruktionswerkzeug soll es gestatten, auf flexible Weise neue Körper durch Zerlegen, Zusammensetzen, Rotieren und Deformieren zu erzeugen. Außerdem soll das Einzeichnen von Figuren in und auf die Körper möglich sein, um diese zu Trägern weiterer geometrischer Information zu machen.

Das Windowsprogramm KÖRPERGEOMETRIE (Bauer et al. 1999), das im Wesentlichen die genannten Forderungen erfüllt, kann deshalb dienen

- der Demonstration körpergeometrischer Sachverhalte
- der Unterstützung der Formenkunde, der konstruktiven Darstellung, der Berechnung und der Erzeugung geometrischer Körper
- der Entwicklung und des Trainings der Raumvorstellungsfähigkeit (hier: Fähigkeit, sich räumliche Objekte und Beziehungen zwischen räumlichen Objekten vorzustellen)
- der experimentellen Erkenntnisfindung (Entdeckung geometrischer Aussagen, Erzeugung neuer Körper etc.)
- der Verstärkung kreativen Arbeitens durch raumgeometrisches Explorieren (z.B. bei der Bearbeitung offener Aufgabenstellungen).

## 2 Eine Tour mit KÖRPERGEOMETRIE

Im Gegensatz zum Handbuch, in dem vor allem die Optionen von KÖRPERGEOMETRIE detailliert erklärt werden, soll hier die didaktisch orientierte Behandlung ausgewählter Körper im Vordergrund stehen. Für unsere Tour in exemplarischer Manier haben wir die quadratische Pyramide ausgewählt, um von dieser zum Kegel und zum Zylinder zu gelangen. (Der Inhalt der Tour kann auch zum Gegenstand eines computerunterstützten Projektunterrichts in Klasse 9/10 gemacht werden.)

Anmerkung: Natürlich eignet sich die print-mediale Dokumentation der Tour nur unzureichend, um das dynamische Arbeiten mit Computergrafik wiederzugeben.

### 2.1 Pyramiden veranschaulichen

Wir wählen in der Werkzeug- bzw. Symbolleiste „**Grundkörper**“ unter den Basiskörpern Würfel, Quader, Parallelepiped (Parallelflach), dreiseitiges Prisma, Zylinder, dreiseitige Pyramide, quadratische Pyramide, Kegel, Kugel, quadratischer Pyramidenstumpf, Kegelsegment, Halbzylinder, Halbkugel die quadratische Pyramide (Abb.1) aus.



Abb. 1

Die je nach Voreinstellung einfarbige oder mehrfarbige Pyramide kann mit der Maus gedreht werden, um sie von allen Seiten anzuschauen (Abb. 2.1-2.3).

{ EMBED Word.Picture.8 }

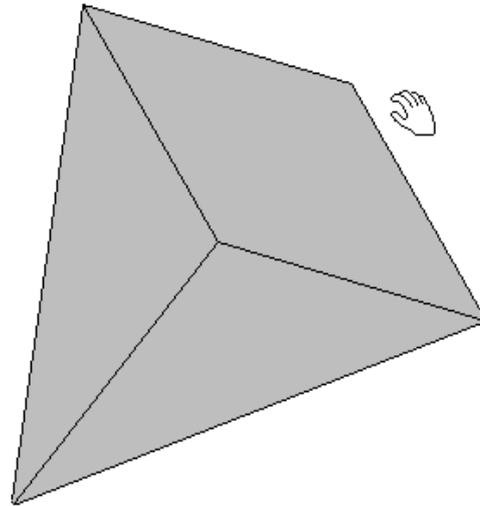


Abb. 2.1

Abb. 2.2

Abb. 2.3 { EMBED Word.Picture.8 }

Nach dem Einzeichnen der Höhe (Symbolleiste „**Erzeugung von Körperpunkten und Strecken**“) in das Flächenmodell legen wir die Höhe als Rotationsachse fest (Symbolleiste „**Bewegen von Körpern**“) und drehen die Pyramide um diese Achse (Abb. 3.1/2).

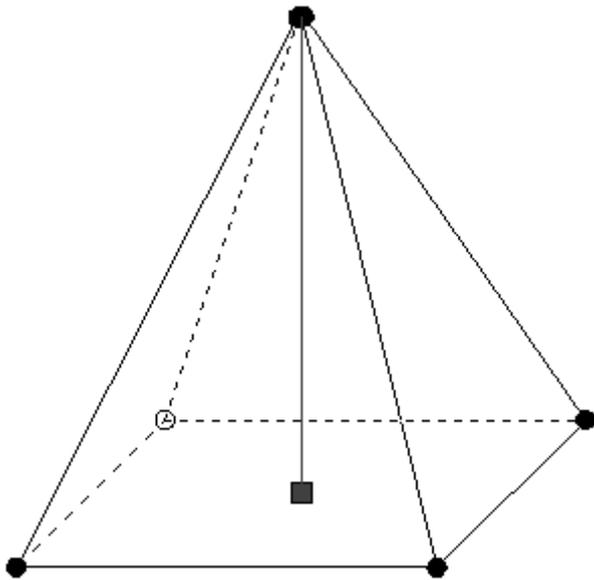


Abb 3.1

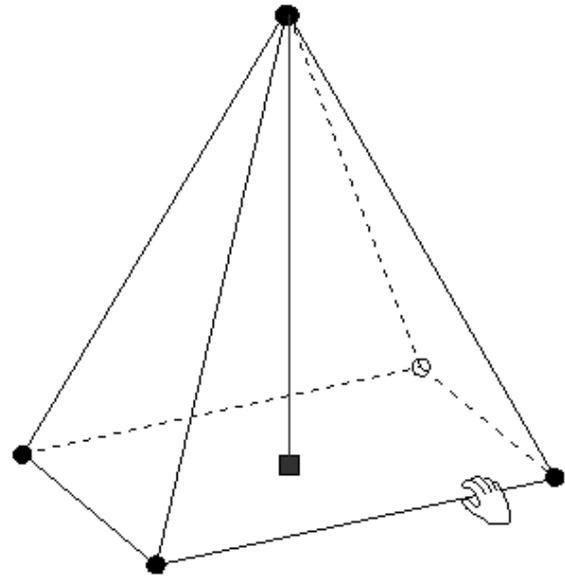


Abb. 3.2

Dabei verwenden wir, wie auch im folgenden, die übliche Schrägbild-darstellung, bei der die verdeckten Kanten strichliert sind. – Die Lage der Höhe mit den eingezeichneten Diagonalen der Grundfläche wird durch erneute Drehung um das voreingestellte Drehzentrum beobachtet (Abb. 4.1/2).

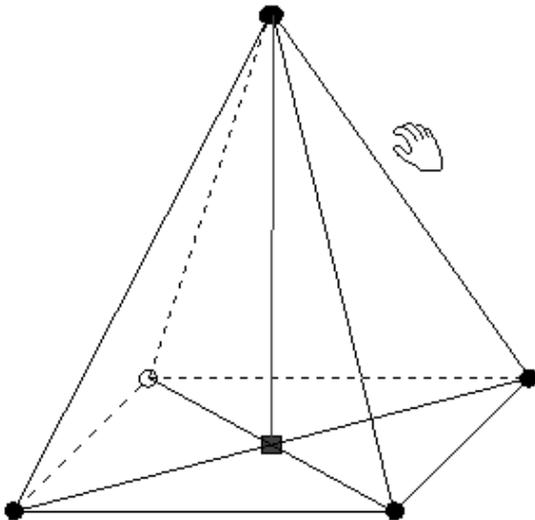


Abb. 4.1

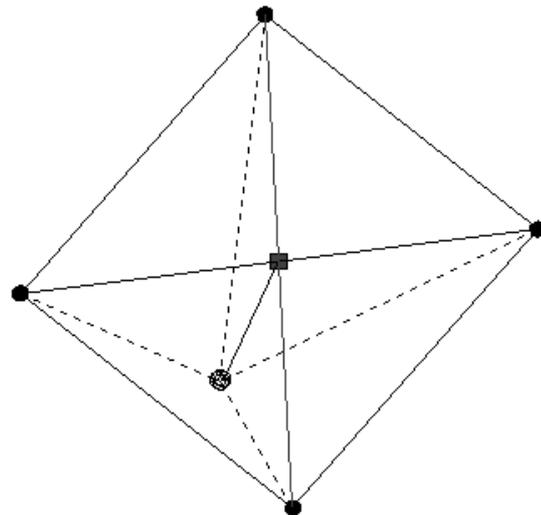


Abb. 4.2

In der Symbolleiste „Darstellen von Körpern“ wählen wir die räumliche Ecke und sehen die senkrechte Projektion der Pyramide auf die drei Ebenen (Abb. 5.1 mit Projektionslinien).

{ EINBETTEN Word.Picture.8 }

Abb. 5.1

Mittels Animation wird die räumliche Ecke in die Ebene geklappt (Abb. 5.2),

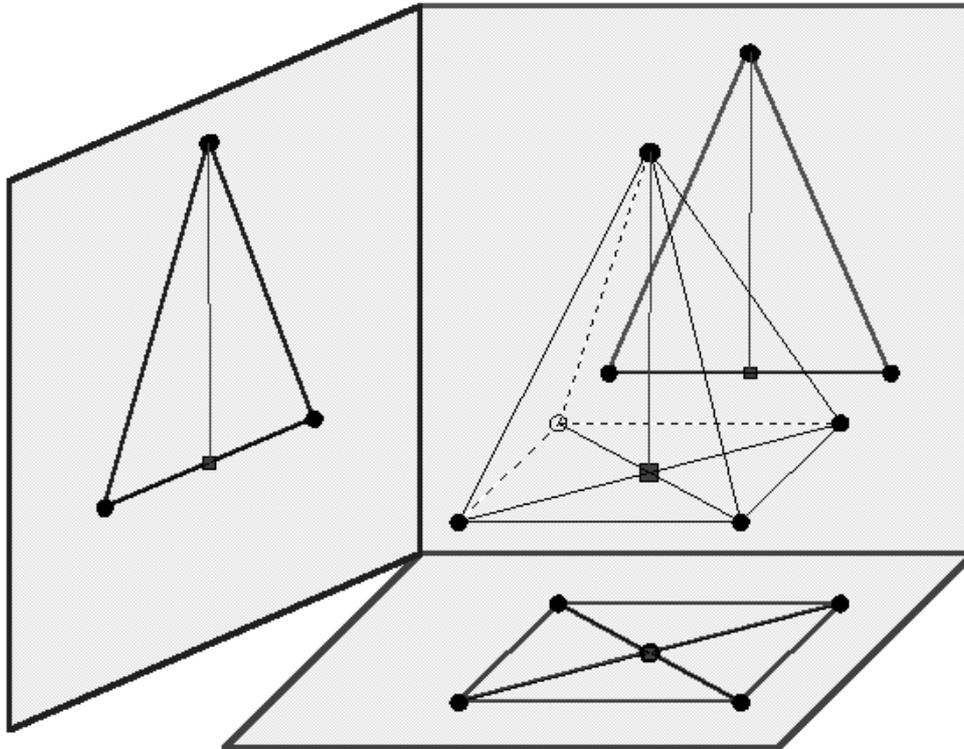


Abb. 5.2

die Pyramide neben ihr Dreitafelbild gestellt (Abb. 5.3)

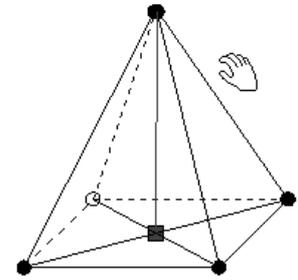
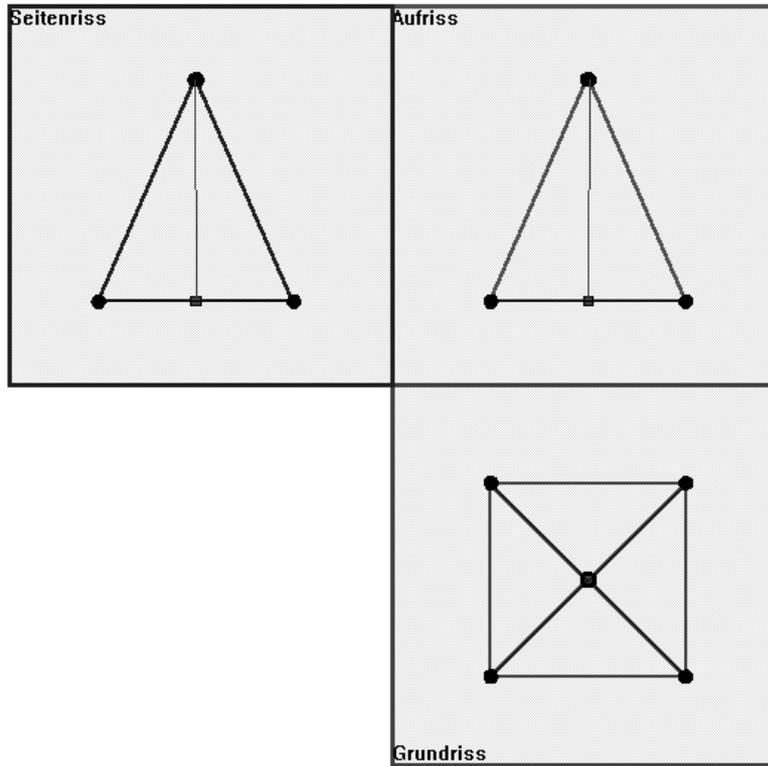


Abb. 5.3

und die Auswirkung ihrer Lageänderung im Dreitafelbild beobachtet (Abb. 5.4).

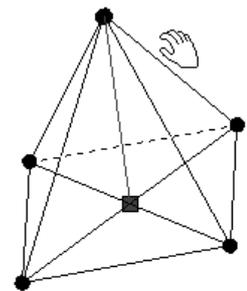
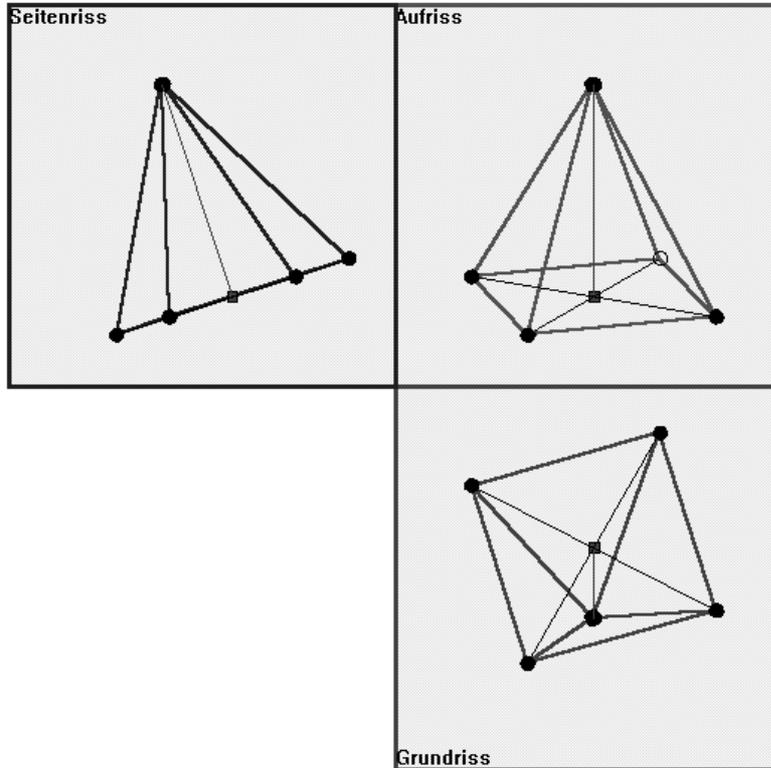


Abb. 5.4

Es lassen sich natürlich auch noch ganz andere (quadratische) Pyramiden flexibel dimensionieren (Abb. 6.1 "Körper beschreiben ..." unter Menüpunkt "Erzeugen").

The dialog box 'Bestimmung eines Körpers' is used to define a pyramid. It features several sections for selection and input:

- Grundkörper:** Radio buttons for Prisma, **Pyramide** (selected), Pyramidenstumpf, Doppelpyramide, Kugelsektor, Kugelsegment, Kugelschicht, and Kugelkeil.
- Prisma und Pyramiden:** Radio buttons for Radius and **Seite** (selected).
- Pyramidenstumpf:** Radio buttons for Höhe u. Kante, **Höhe u. 2. Radius** (selected), Kante u. 2. Radius, and Mittelpunkt der Deckfl. und 2. Radius.
- Prisma:** Radio buttons for **Höhe** (selected) and Scheitelpunkt (Mittelpunkt der Deckfläche).
- Pyramide:** Radio buttons for Höhe, **Kante** (selected), and Scheitelpunkt.
- Doppelpyramide:** Radio buttons for **Höhe** (selected), Kante, Scheitelpunkt, and Höhe und 2. Höhe.

Input fields are provided for: Ecken (4), Höhe (2.83), Kante (4.00), Öffnungswinkel (°) (0.00), Radius (2.83), Seite (4.00), and a 3D coordinate system for the Mittelpunkt and Scheitelpunkt (x, y, z).

Buttons at the bottom include: Restliche Größen berechnen, Hilfe, Abbrechen, and OK.

Abb. 6.1

Eine gleichkantige quadratische Pyramide zeigt die Abbildung 6.2.

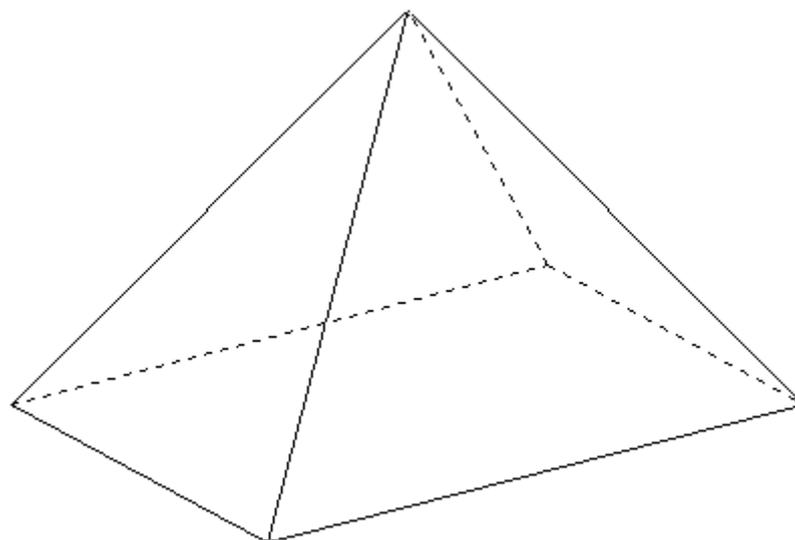
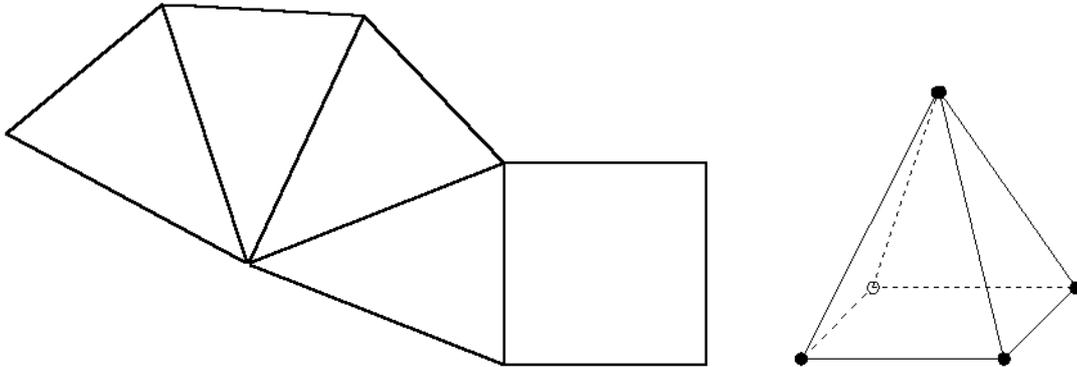


Abb. 6.2

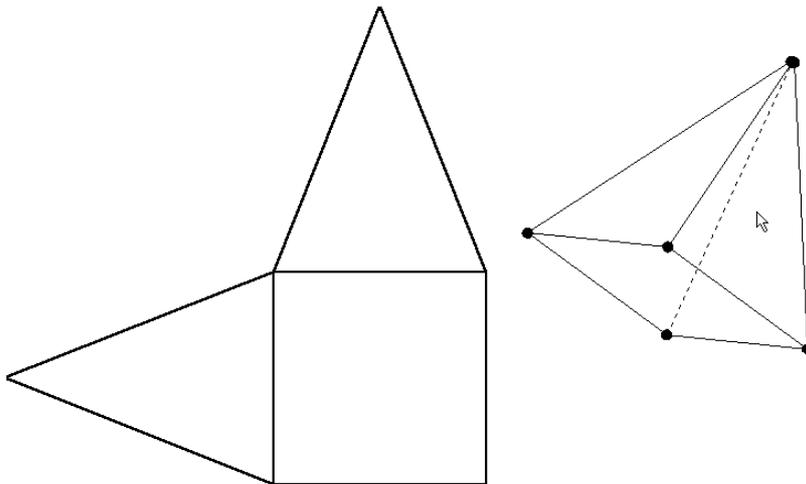
Eine entsprechende Dimensionierung ist auch möglich für Prismen, Pyramidenstümpfe, Doppelpyramiden und die Kugelteile.

In der Symbolleiste „**Messen, Erzeugen von Körpernetzen**“ können wir einen Körper automatisch (Abb. 7.1)



**Abb. 7.1**

oder interaktiv und damit individuell abfalten lassen (Abb. 7.2).

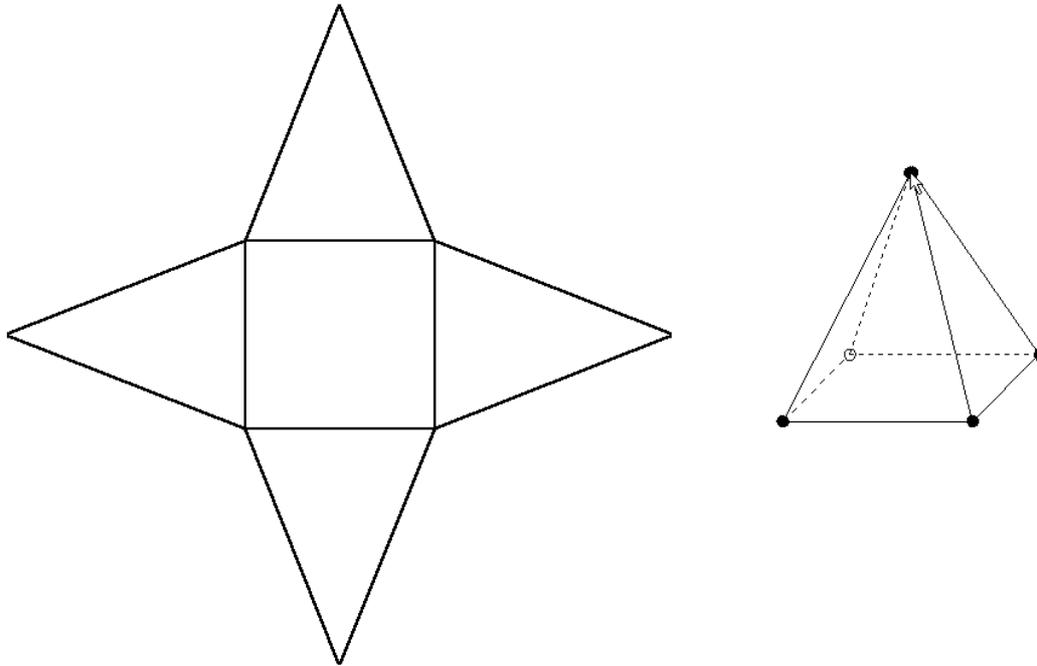


**Abb. 7.2**

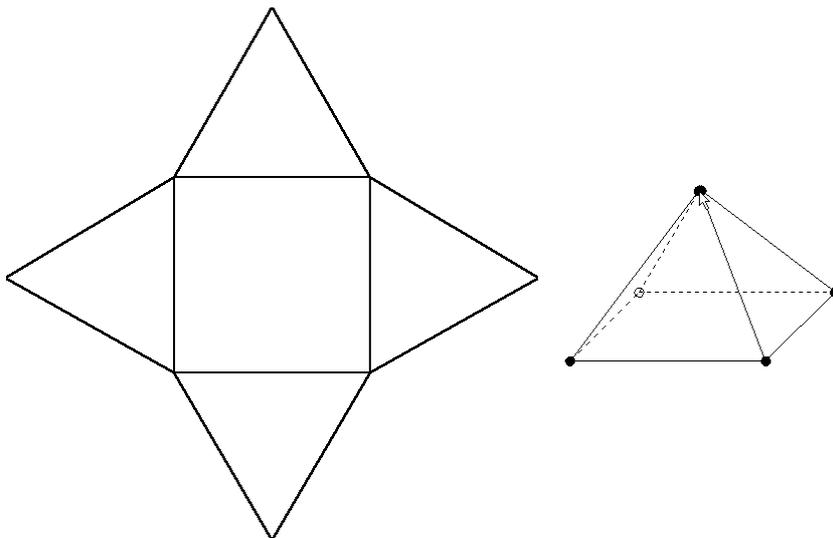
Beim individuellen Abfalten kann man bestimmen, welche Körperfläche an welche Fläche des Netzes angeheftet werden soll. Damit können z.B. die acht verschiedenen Netze einer quadratischen Pyramide entdeckt werden. – Mittels komfortablem Ausdruck von Netzen haben wir nun die Möglichkeit, nach dem Ausschneiden, Auf-falten und Verheften (etwa mittels Klebeband), den auf dem Bildschirm dargestellten Körper als Flächenmodell ganzheitlich erfahrbar zu machen (z.B. auch durch ein geöffnetes „Seitenflächenfenster“ in sein Inneres zu schauen).

## 2.2 Von der quadratischen zur viereckigen Pyramide

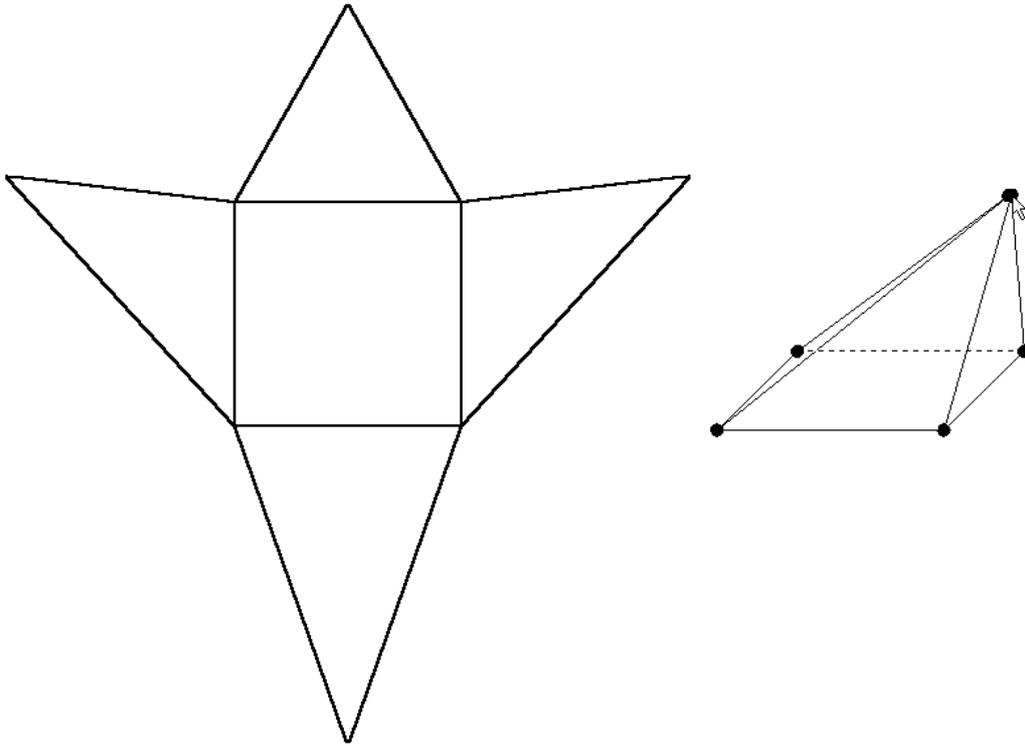
Durch Deformationen einer quadratischen Pyramide, etwa durch Verziehen der Spitze gegenüber der Grundfläche, können wir neue quadratische Pyramiden generieren. Dazu gehen wir von einer quadratischen Pyramide mit ihrem symmetrischen Netz aus (Abb. 8.1),



**Abb. 8.1**  
erzeugen eine kantengleiche Pyramide (Abb. 8.2)

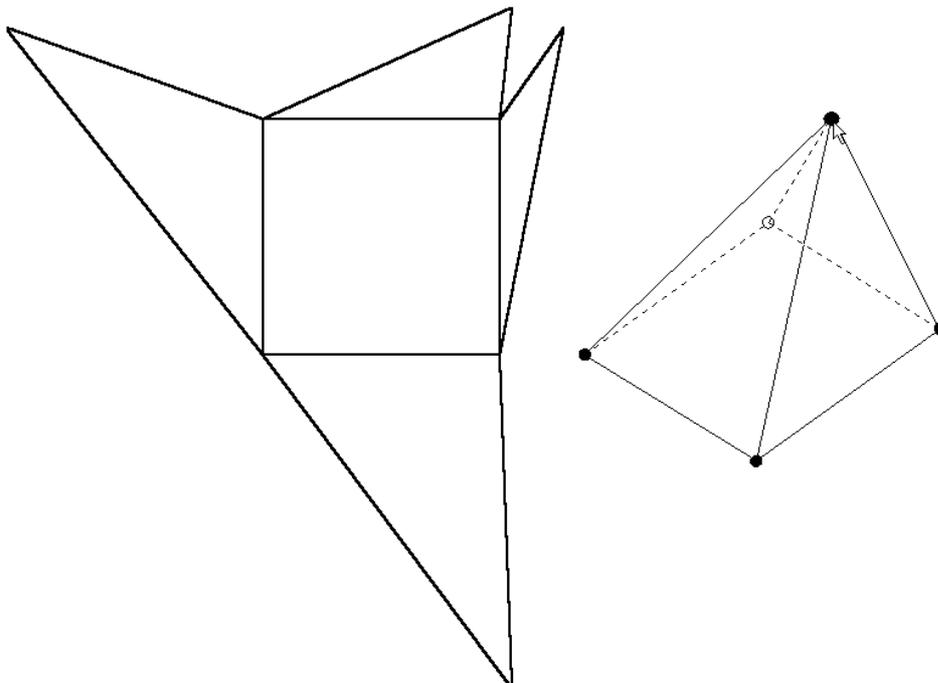


**Abb. 8.2**  
oder eine Pyramide, bei der Höhenfußpunkt nicht mehr mit dem Mittelpunkt der Grundfläche übereinstimmt (Abb. 8.3, mit einem nur noch einfach achsensymmetrischen Netz)



**Abb. 8.3**

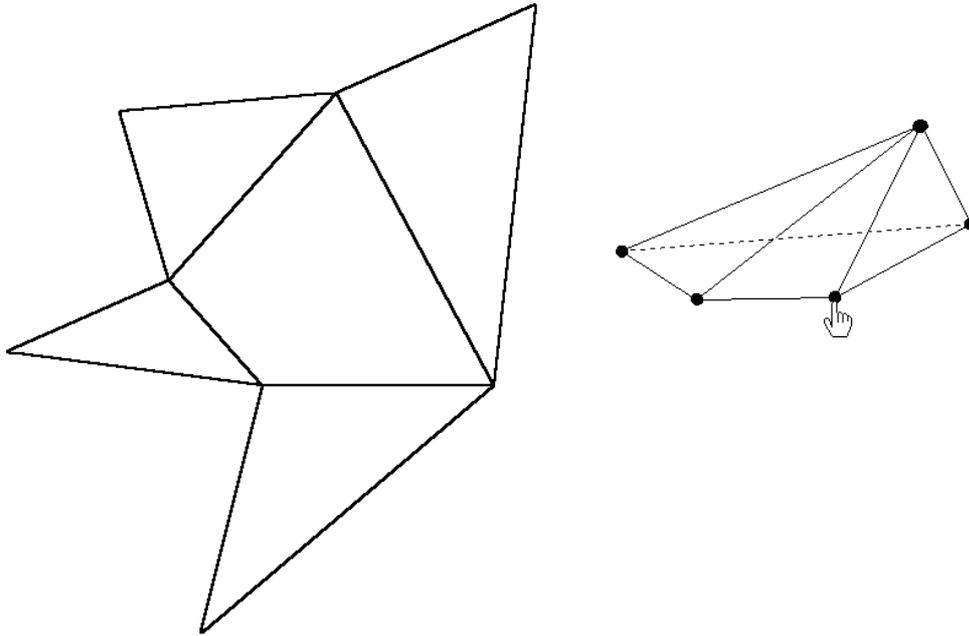
oder eine Pyramide, bei der Höhenfußpunkt außerhalb der Grundfläche liegt (Abb. 8.4 mit einem asymmetrischen Netz).



**Abb. 8.4**

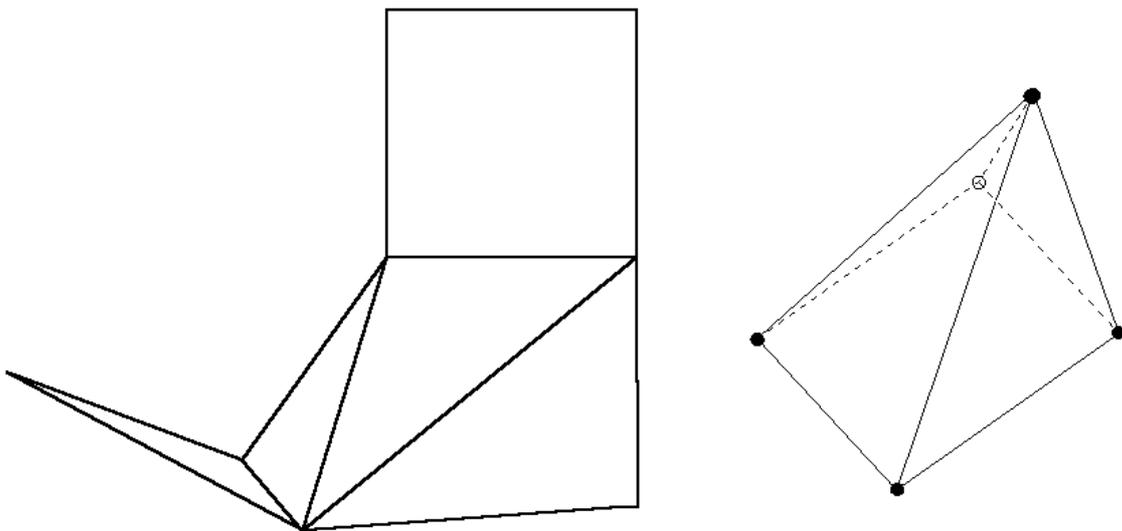
Jetzt verziehen wir auch die quadratische Grundfläche zu irgendeinem konvexen Viereck und lassen uns ein zugehöriges Netz ausgeben (Abb. 8.5). Den Netzausdruck kann man zur Konstruktion des Fußpunktes der Pyramide verwenden: Die Lote

von den Spitzen der Seitendreiecke auf die entsprechenden Grundkanten bzw. deren Verlängerungen schneiden einander in einem Punkt.



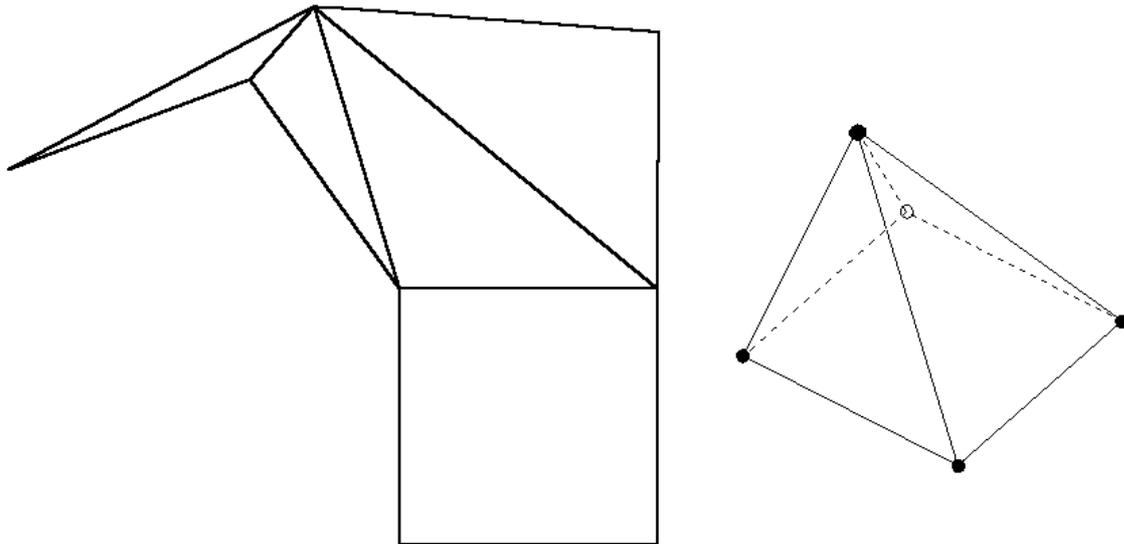
**Abb. 8.5**

Mit den Optionen der Symbolleiste „Körper bewegen“ lassen sich Körper auch an Punkten und Ebenen spiegeln. Spiegelt man eine nicht achsensymmetrische quadratische Pyramide (Abb. 9.1)



**Abb. 9.1**

etwa an einer vertikalen Ebene, so hat ihr Spiegelbild ein ebenfalls gespiegeltes Netz (Abb. 9.2).

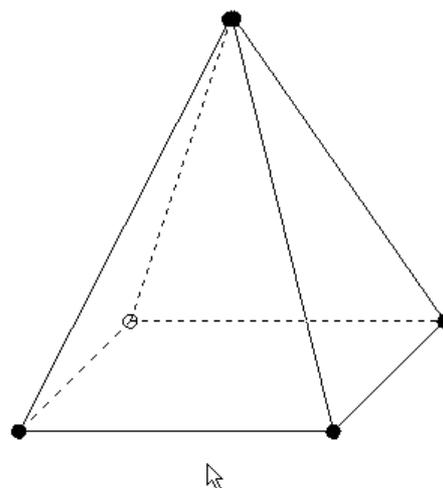


**Abb. 9.2**

Anmerkung: Mit den Optionen „Spiegeln an einer Ebene“, „Drehen um eine Achse“ usw. kann man die **Deckabbildungen eines Körpers und ihre Verknüpfungen** studieren; dazu sind die Körperpunkte verschieden färbbar.

### 2.3 Pyramiden ausmessen

Jeder selektierte Körper kann ausgemessen werden: Dazu bewegt man den Cursor über den Körper, dann werden angezeigt: die Inhalte der Seitenflächen, die Längen der Kanten usw.; außerdem das Volumen und die Größe der Oberfläche; für die Standardkörper natürlich noch mehr Maße (Abb. 10).



Pyramide: V = 10.5; O = 31.7; G = 9.1; h = 3.5; s = 3.0; k = 4.0

**Abb. 10**

Die aktuellen Maße eines Körpers können auch in einer Tabelle ausgegeben werden. Dafür richtet man sich in der Symbolleiste „**Messen, Erzeugen von Körpernetzen**“ eine Tabelle mit einer entsprechenden Kopfzeile ein und lässt jeweils die aktuellen Werte eintragen (Abb. 11.1).

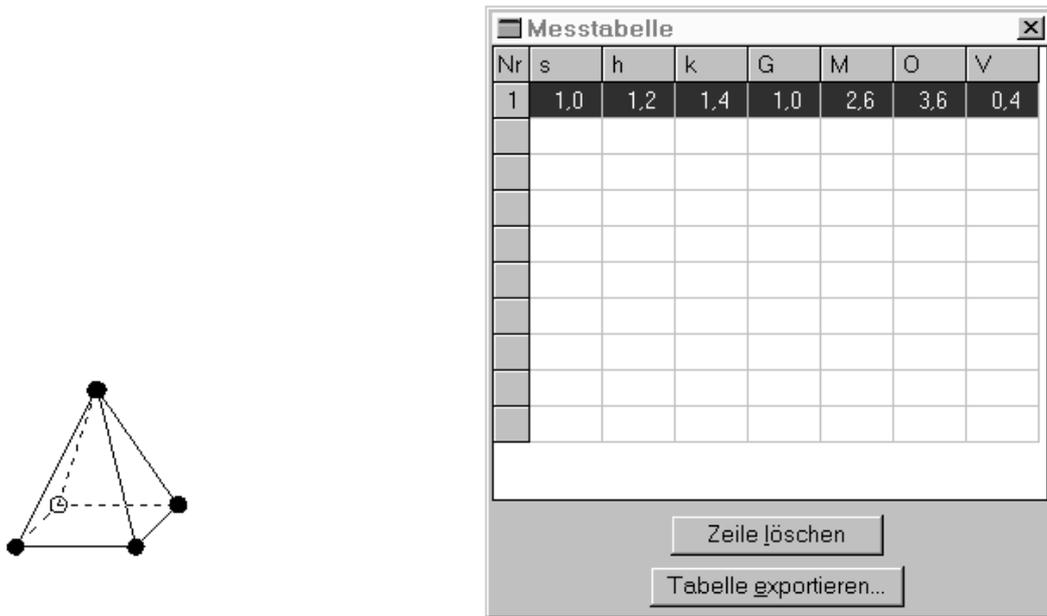


Abb. 11.1

Das machen wir uns zu Nutze, um die gesetzmäßige Varianz von Oberfläche und Volumen der quadratischen Pyramide bei formgleicher Vergrößerung (Verkleinerung) zu untersuchen.

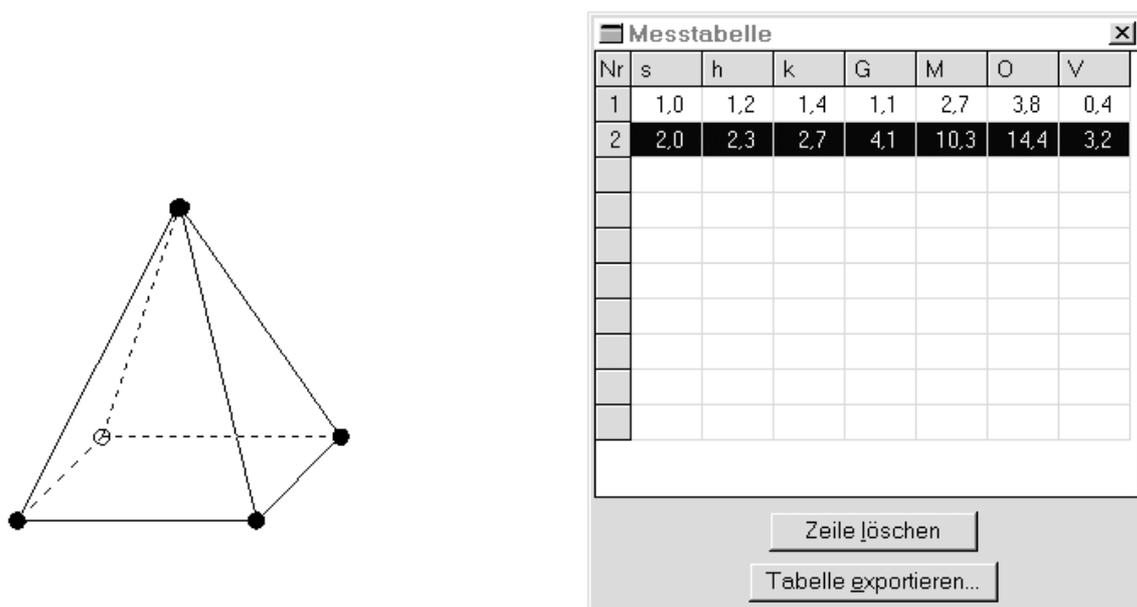
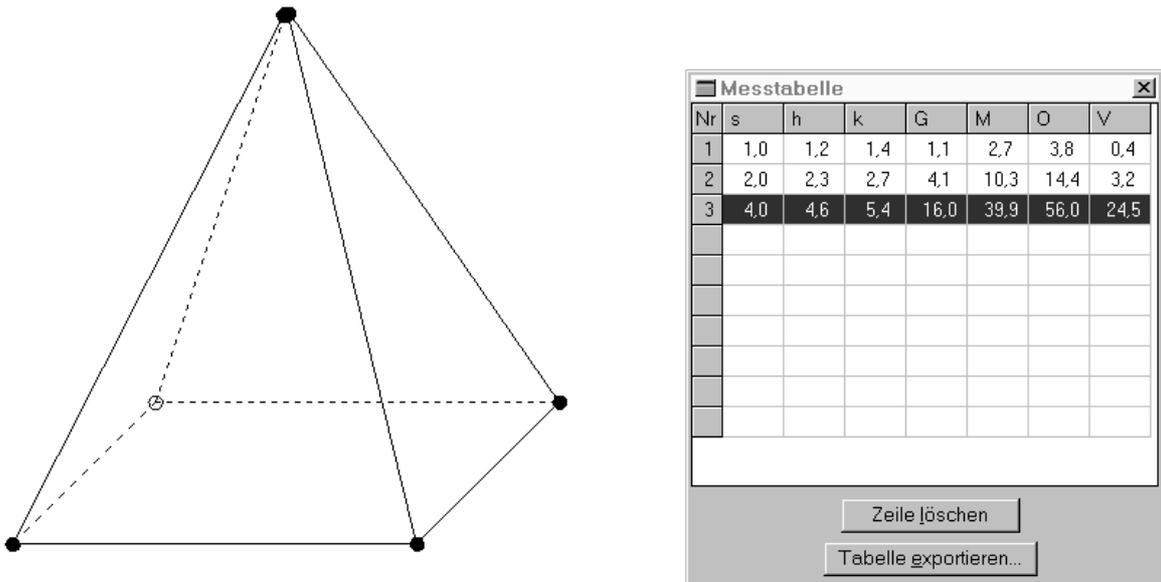


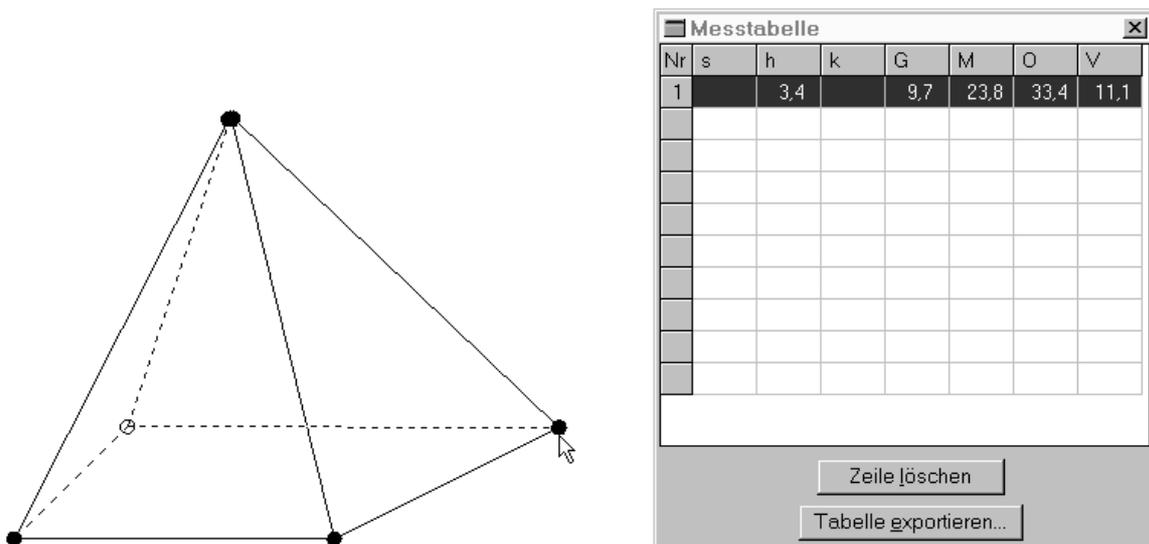
Abb. 11.2

Wir erkennen, evtl. auch unter Verwendung eines (Online-) Taschenrechners: Vergrößern wir die Pyramide bis die Grundkante  $s$  in etwa doppelt so groß wird, so verdoppeln sich in etwa auch die übrigen Kantenlängen, die Flächenmaße vervierfachen sich näherungsweise und das Volumen nimmt ungefähr auf das Achtfache zu (Abb. 11.2) usw. (Abb. 11.3).



**Abb. 11.3**

Wie ist das experimentelle Ergebnis mathematisch zu begründen? -Ähnlichkeitslehre. Verziehen wir die Grundfläche der Pyramide zu irgendeinem Viereck (z.B. zu einem Trapez), so verschwinden zwangsläufig die Werte für Grund- und Seitenkante (Abb. 11.4).



**Abb. 11.4**

Verändern wir nur die Lage der Spitze bei konstanter Höhe (räumliche Scherung), so erkennen wir die Invarianz des Volumens (Abb. 11.5). – Satz des Cavalieri.

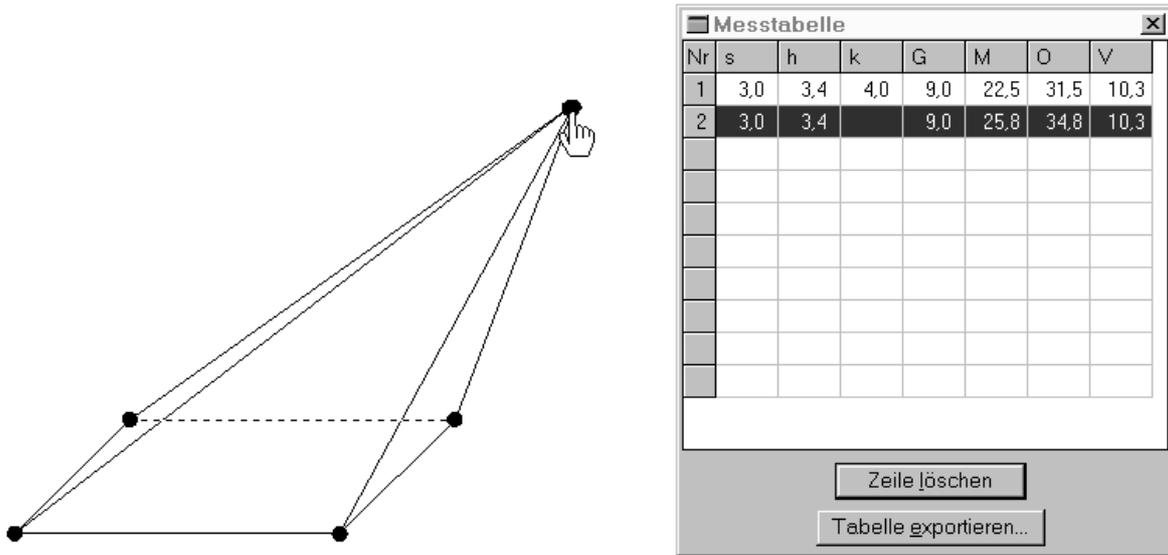


Abb. 11.5

In der Symbolleiste „**Objekte in wahrer Größe**“ kann man Objekte in oder auf dem Körper einzeichnen und ihre wahre Form und Größe sowohl grafisch als auch numerisch ausgeben; außerdem können solche Objekte parallel verschoben oder um Achsen gedreht werden, um dabei ihre wahre Form zu studieren.

So können wir uns in wahrer Größe zusammen mit den (gerundete) Maßzahlen ausgeben lassen zum Beispiel: Die Höhe der Seitenfläche (Abb. 12 mit der Länge 3,8 LE beim Standardkörper),

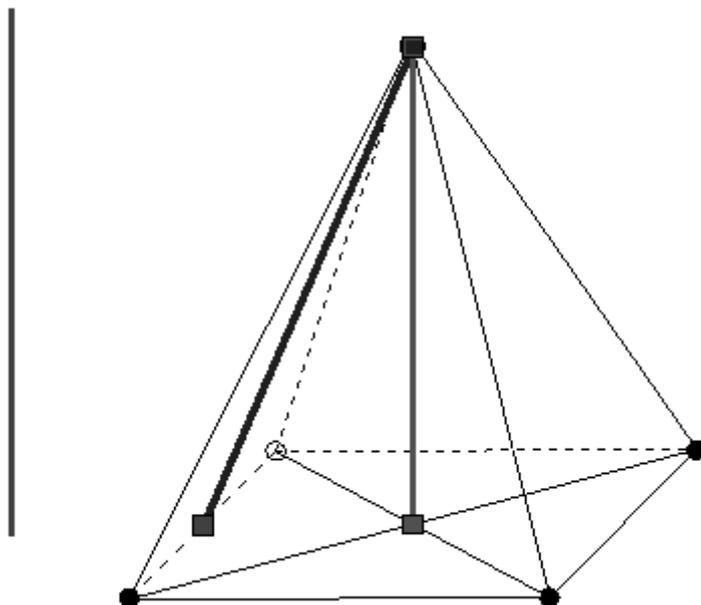
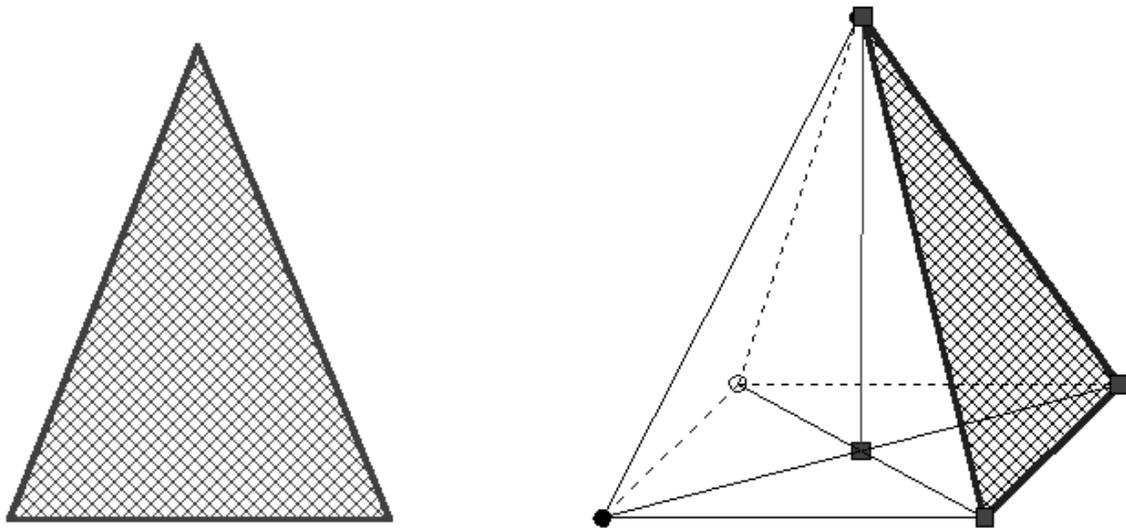


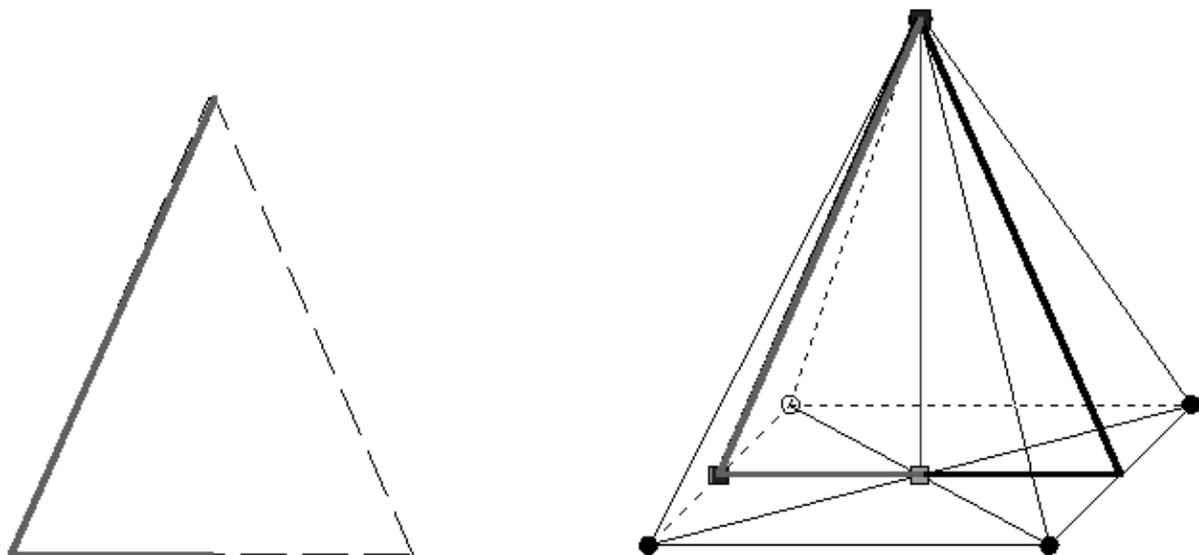
Abb. 12

eine Seitenfläche (Abb. 13; mit dem Inhalt 5,6 FE und dem Umfang 11,1 LE beim Standardkörper),



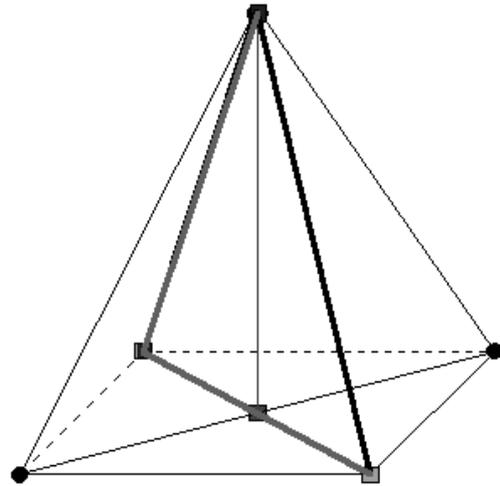
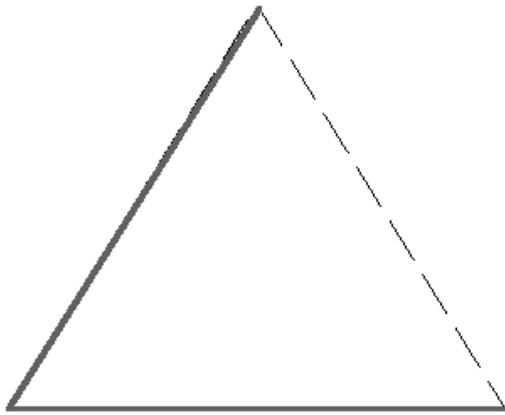
**Abb. 13**

den Winkel zwischen Seitenhöhe und Grundfläche (Abb. 14;  $66,2^\circ$  beim Standardkörper),



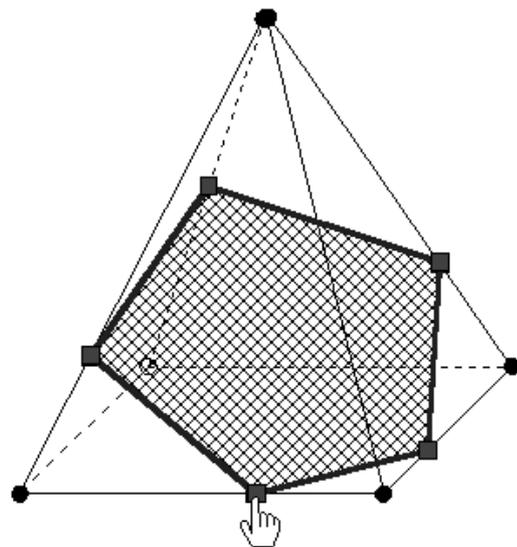
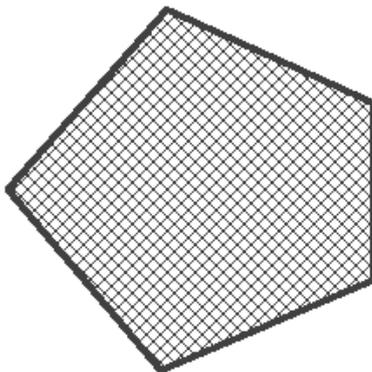
**Abb. 14**

den Winkel zwischen Seitenkante und Grundflächendiagonale (Abb. 15;  $58^\circ$  beim Standardkörper).



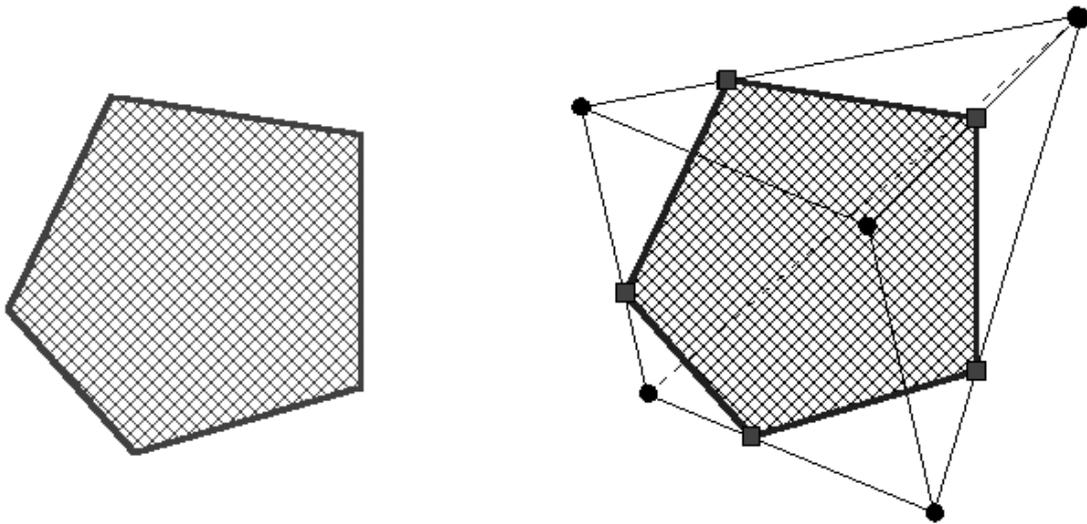
**Abb. 15**

Wir legen eine durch drei bestimmte Kantenpunkte fünfeckige (Schnitt-) Fläche in die Pyramide und lassen uns den einfach achsensymmetrischen Schnitt in wahrer Form darstellen (Abb. 16.1).



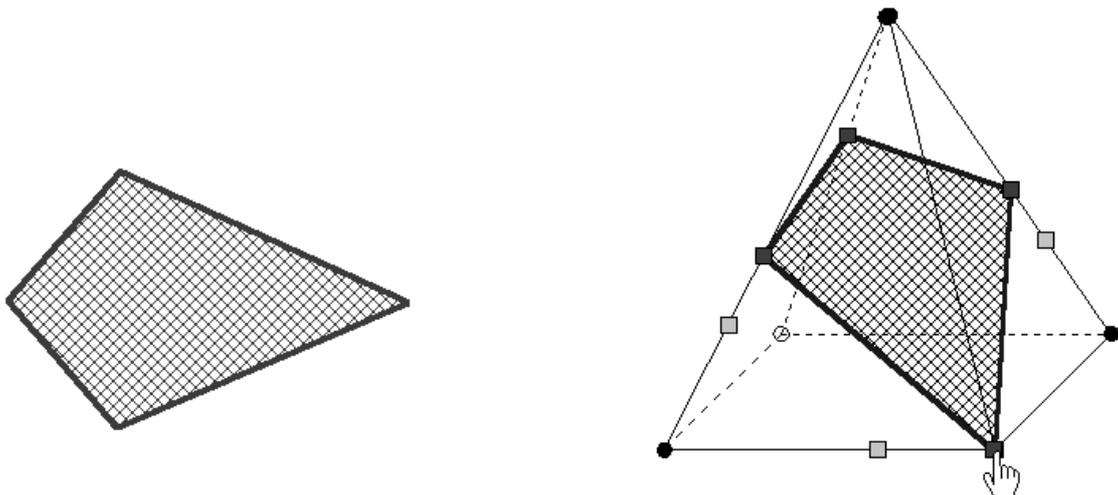
**Abb. 16.1**

Auf Wunsch rotiert der Körper so, dass in ihm diese Fläche ihre wahre Form annimmt. (Abb. 16.2; das kann man auch selbst durch Drehen der Pyramide versuchen, dabei wird die Abweichung von der Lage mit der wahren Form angezeigt).



**Abb. 16.2**

Wir variieren durch Parallelverschiebung die Form der Fläche (Abb. 16.3, ein Drachen – beispielsweise).



**Abb. 16.3**

Wie sehen die Linien der Flächenvielecke, die wir auch als Schnittlinien interpretieren können, auf dem Netz, also in wahrer Größe aus, und wie verändern sie sich? Das zeigen für die Parallelverschiebung an Beispielen die Abbildungen 17.1 und 17.2.

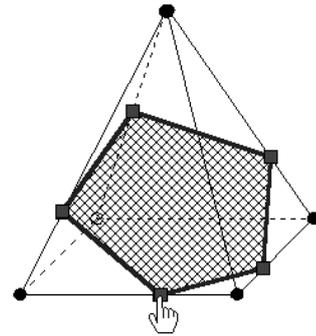
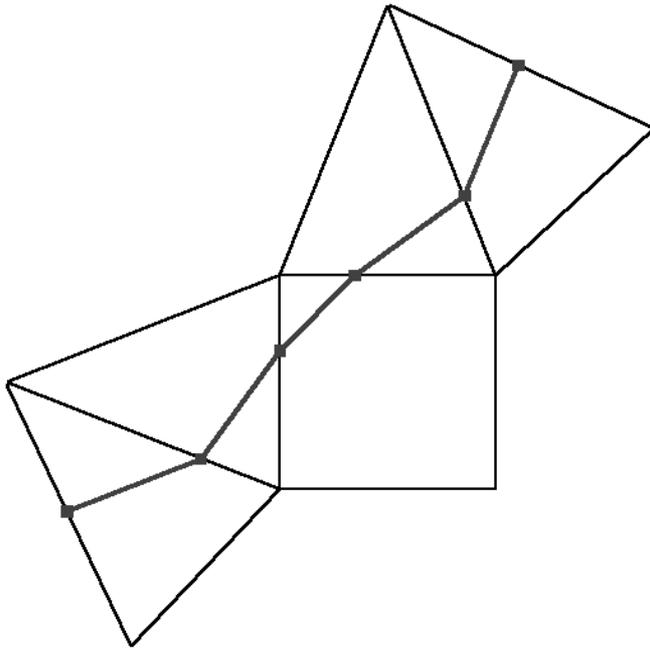


Abb. 17.1

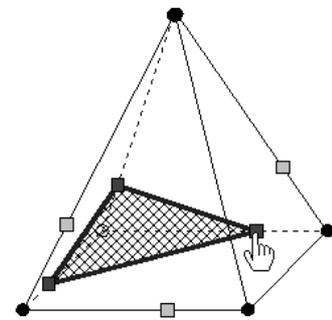
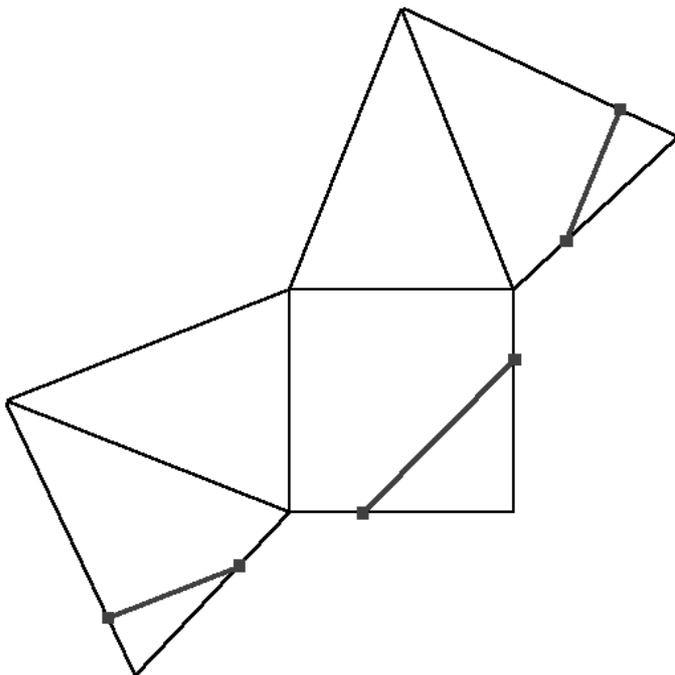
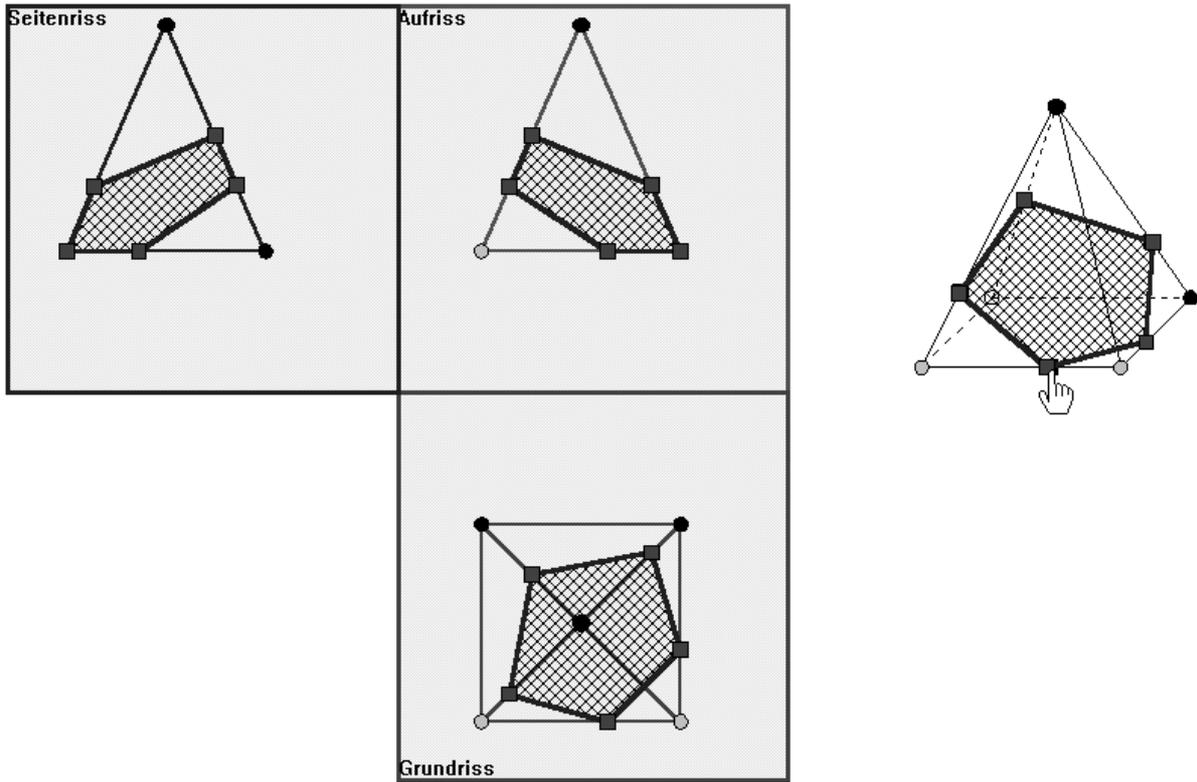


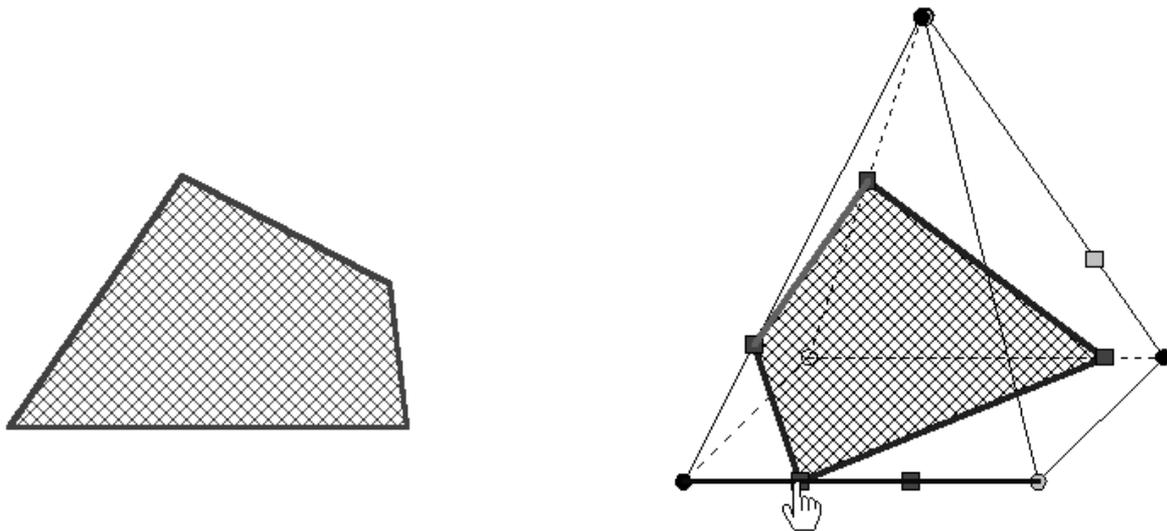
Abb. 17.2

Die Variation der Polygonform kann auch durch das Dreitafelbild visualisiert werden (Abb. 18).



**Abb. 18**

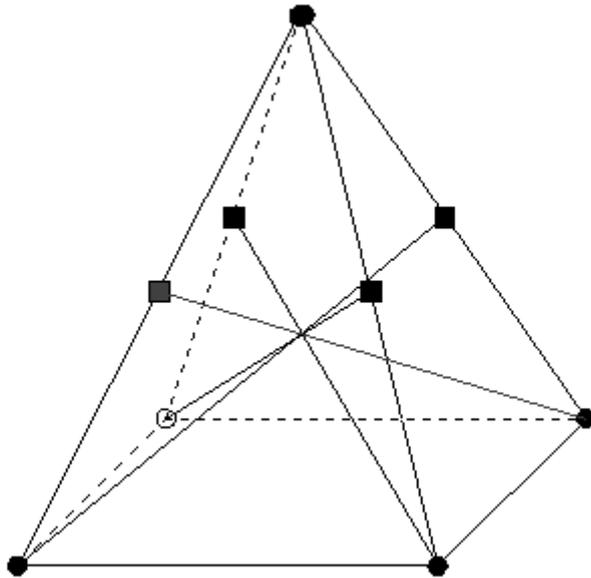
Das anfängliche Fünfeck kann auch um eine seiner Seiten gedreht werden (Abb. 19) usw.



**Abb. 19**

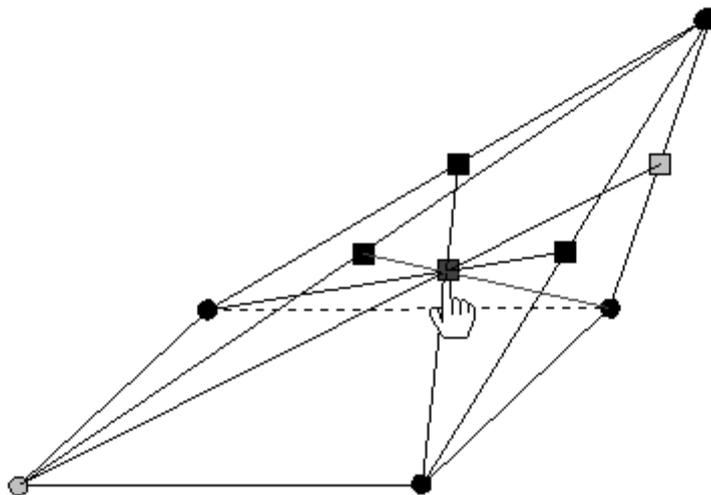
## 2.4 Besondere Linien in und auf der Pyramide

Wir beschränken uns jeweils auf drei Beispiele für Arten von Linien in der quadratischen Pyramide und beginnen mit der Untersuchung der Verbindungsstrecken der Eckpunkte der Grundfläche mit den Mitten der jeweiligen Gegenkante (Abb. 20.1).



**Abb. 20.1**

Diese Linien schneiden einander. Diese Eigenschaft bleibt auch erhalten, wenn wir die Spitze der Pyramide verziehen (Abb. 20.2);

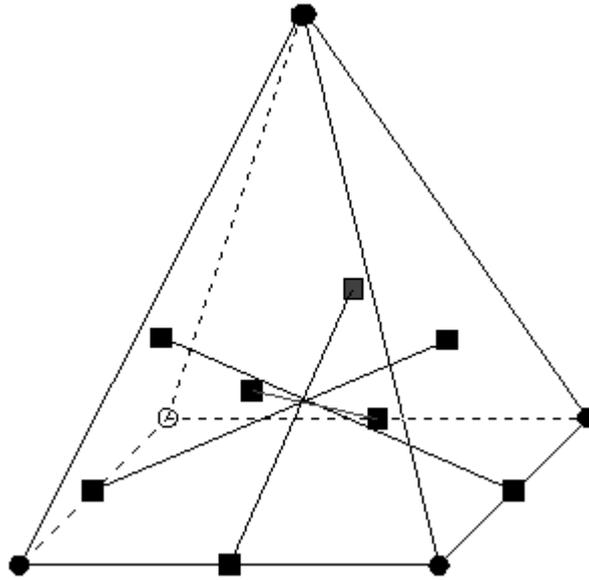


**Abb. 20.2**

außerdem können wir mit der Option „Teilpunkt“ (Symbolleiste " Erzeugen von Körperpunkten und Strecken") nachprüfen, wie groß das Teilverhältnis ist, in dem der Schnittpunkt jede der Linien teilt. Das Teilverhältnis ist ebenfalls invariant; es beträgt 2:1, gemessen vom Eckpunkt der Grundfläche aus.

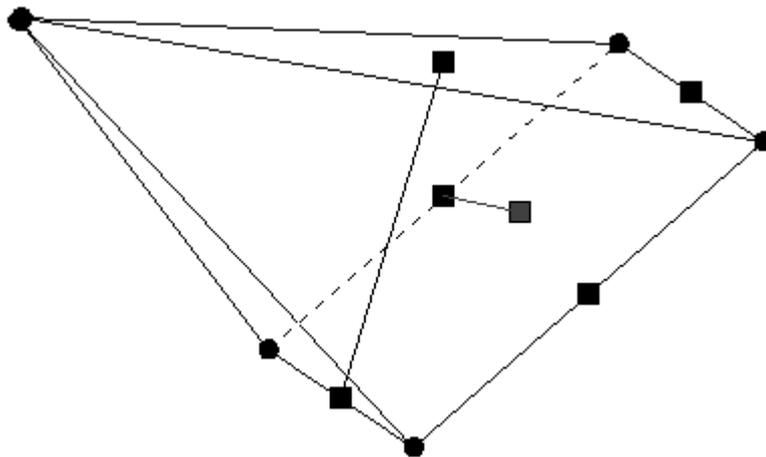
Fällen wir die Lote von den Mittelpunkten der Grundkante auf die gegenüberliegenden Seitenflächen, so schneiden sich diese Linien, so lange wie der Fußpunkt der

Pyramidenhöhe mit dem Mittelpunkt der quadratischen Grundfläche übereinstimmt (Abb. 21.1).



**Abb. 21.1**

Ist das nicht mehr der Fall, so haben die vier Linien insgesamt keinen Punkt mehr gemein (Abb. 21.2).



**Abb. 21.2**

Zeichnen wir die Schwerpunkte der Seitenflächen ein und verbinden diese zu einem Viereck, so ist das Viereck ein parallel zur Grundfläche liegendes Quadrat, selbst dann, wenn die Spitze der Pyramide verzogen wird (Abb. 22.1-22.3; elementargeometrische Begründung?).

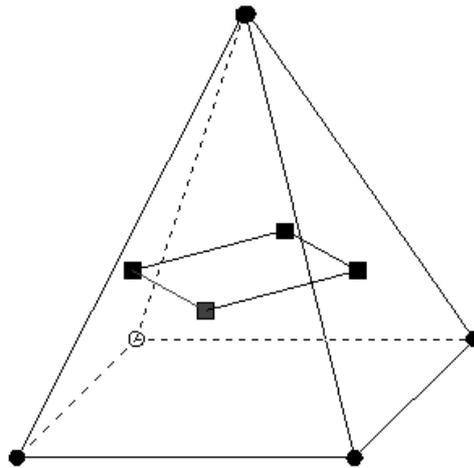


Abb. 22.1

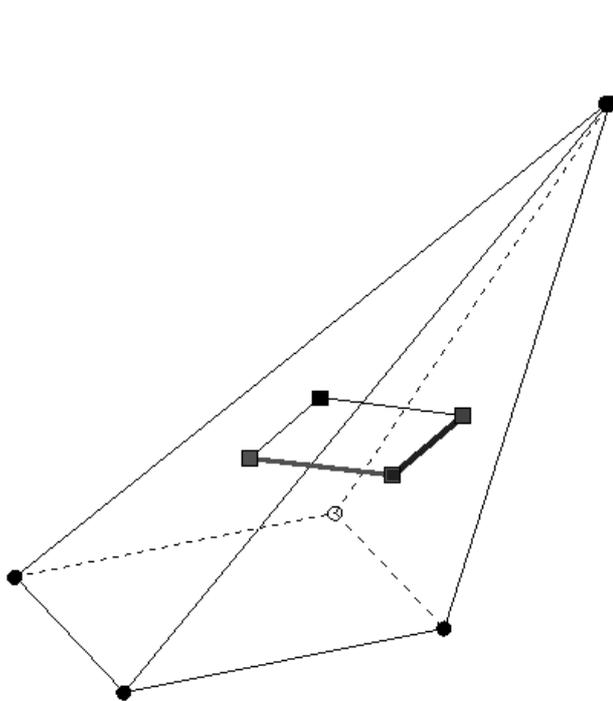


Abb. 22.2

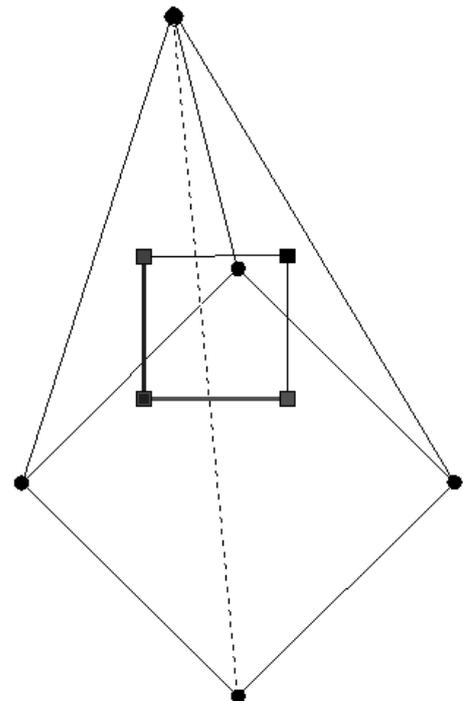
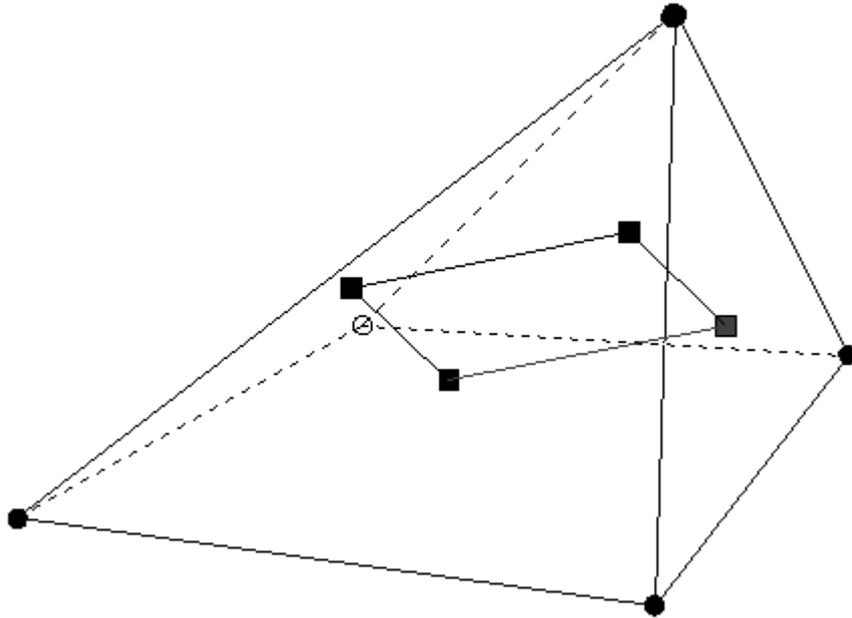


Abb. 22.3

Das können wir am einfachsten experimentell nachprüfen, indem wir z.B. den Winkel benachbarten Seiten und die Längen der Seiten messen lassen. Verziehen wir sogar die quadratische Grundfläche zu irgend einem Viereck, so wird aus dem "Schwerpunktquadrat" ein Parallelogramm, was sich wiederum experimentell nachprüfen lässt (Abb. 22.4; elementargeometrische Begründung?).



**Abb. 22.4**

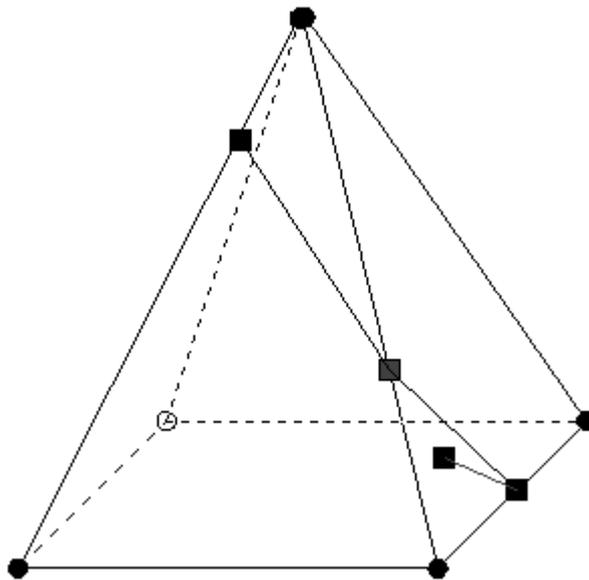
Wir schließen diesen Abschnitt mit einem Beispiel für die kürzeste Linie (sogenannte geodätische Linie) auf der Oberfläche eines Körpers.

Auf der Pyramide können zwischen zwei Punkten (z.B. liegt einer auf einer Seitenkante, der andere in der Grundfläche, Abb. 23.1)

{ EMBEDDED Word.Document.8 \s }

**Abb. 23.1**

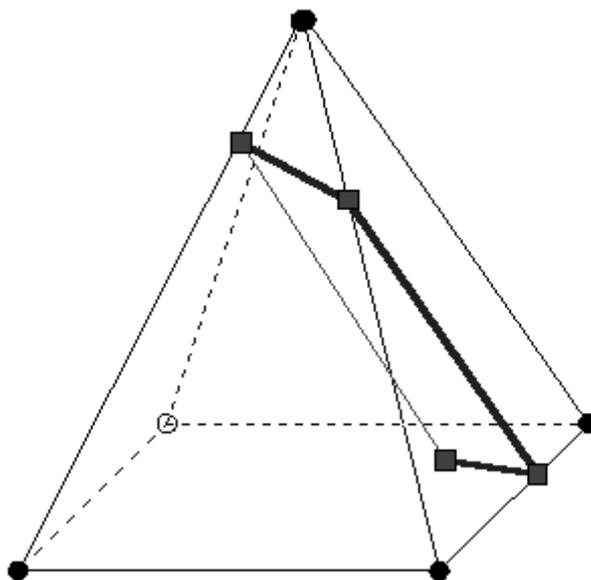
viele Streckenzug-Verbindungen auf der Pyramidenoberfläche hergestellt werden. Als Beispiel zeichnen wir einen verbindenden Streckenzug aus drei Strecken (Abb. 23.2),



**Abb. 23.2**

Welcher unter diesen Streckenzügen ist von minimaler Länge?

Körpergeometrie hat in der Symbolleiste „Objekt in wahrer Größe“ eine entsprechende Option für die Konstruktion eines kürzesten Weges, die wir aufrufen (Abb. 23.3)



**Abb. 23.3**

Wir prüfen dessen Minimalität nach, indem wir die Pyramide so abfalten, dass der räumliche Streckenzug zu einem ebenen auf einem der Pyramidennetze wird: es ist zu erkennen, dass der Streckenzug mit der Verbindungsstrecke der beiden Punkte zusammenfällt, also wirklich von minimaler Länge ist (Abb. 23.4).

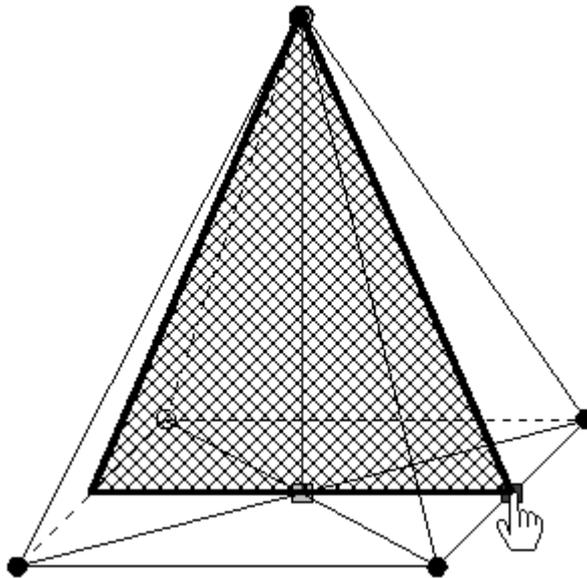
{ EMBED Word.Picture.8 }

**Abb. 23.4**

### 2.5 Pyramiden halbieren

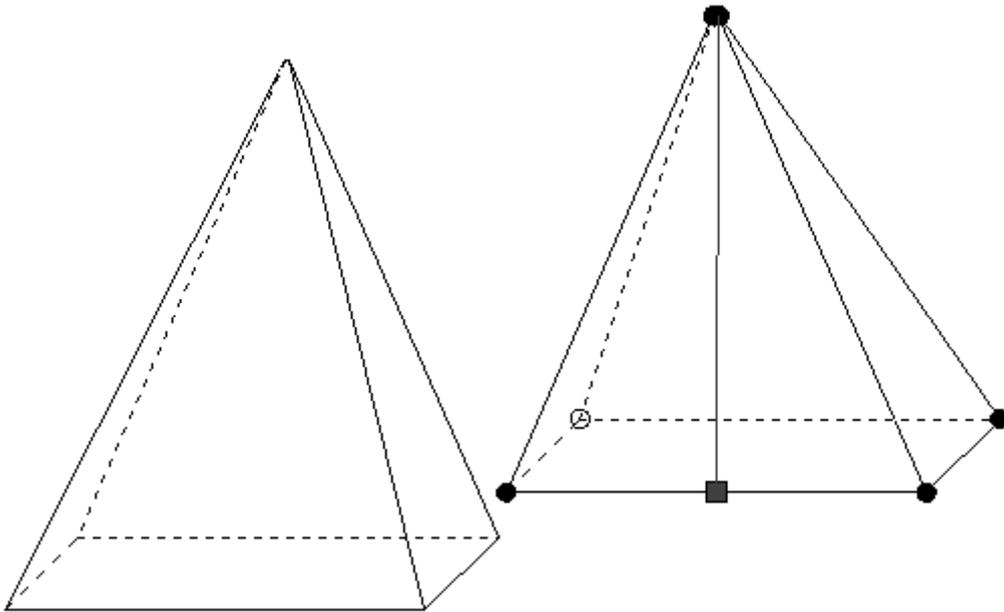
In der Symbolleiste „Verändern von Körpern“ wählen wir das Schnittwerkzeug, das einen Körper in zwei Teile längs einer Schnittebene zerlegt, die durch das Auswählen dreier Punkte festgelegt wird. Mit dieser Option und der automatischen Volumenmessung (Oberflächenmessung) lösen wir experimentell die offene Aufgabe: Finde alle typischen Volumenhalbierungen der quadratischen Pyramide? (Natürlich ist jede Volumenhalbierung eines konvexen Körpers zugleich eine Oberflächenhalbierung, was bei der Bearbeitung der Aufgabe als Nebenergebnis anfällt.)

Der Achsenschnitt durch den Mittelpunkt einer Grundkante zeigt die Abbildung 24.1;



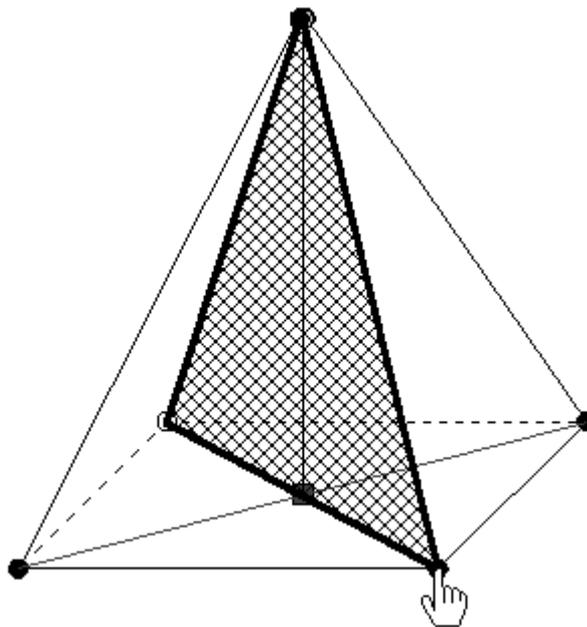
**Abb. 24.1**

Ergebnis der Ausführung in Abbildung 24.2.

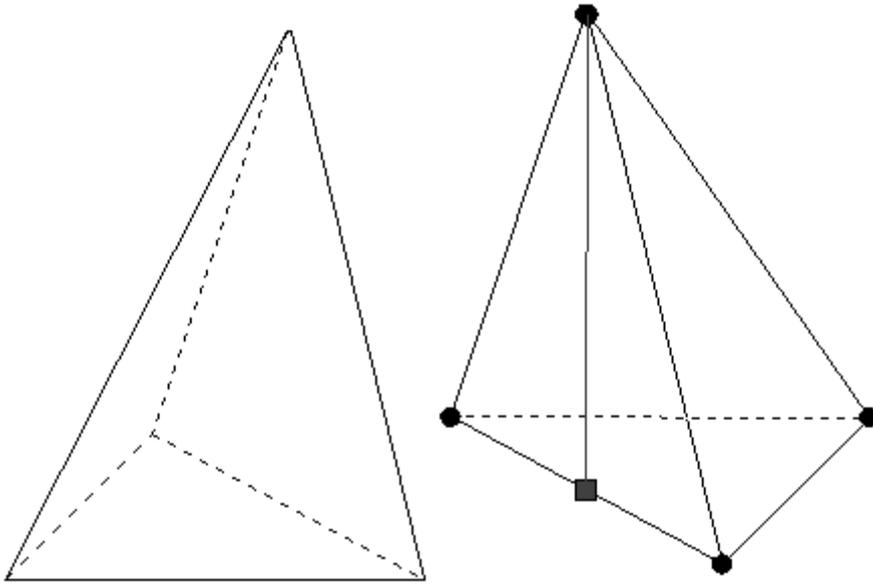


**Abb. 24.2**

Durch einen Eckpunkt der Grundfläche wird ein weiterer Achsenschnitt festgelegt (Abb. 25.1; Ergebnis: Abb. 25.2).

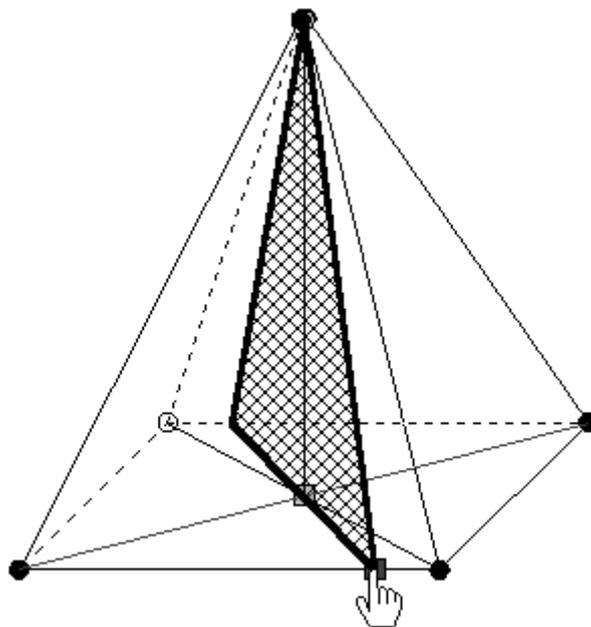


**Abb. 25.1**



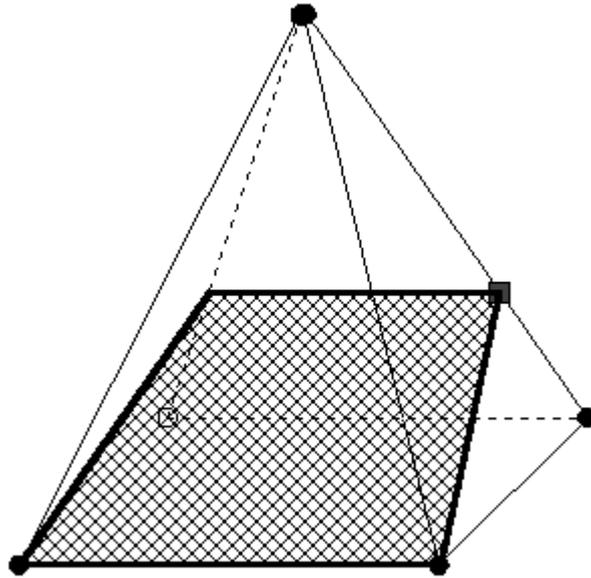
**Abb. 25.2**

Im folgenden geben wir nur noch die Schnittfläche an: Jeder andere Achsenschnitt, bestimmt durch einen beliebigen Punkt auf einer Grundkante, liefert ebenfalls eine Pyramidenhalbierung (Abb. 26).



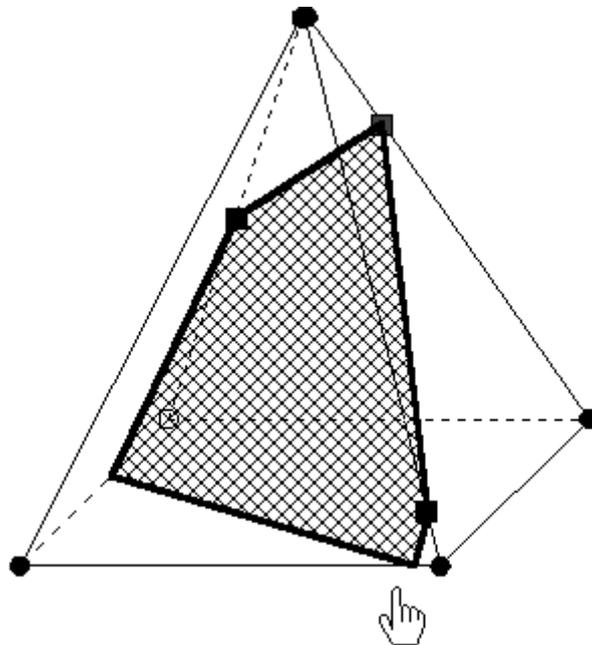
**Abb. 26**

Ein Schnitt, der die Grundkante und einen bestimmten Punkt einer gegenüberliegenden Seitenkante enthält, ist ebenfalls halbierend (Abb. 27).



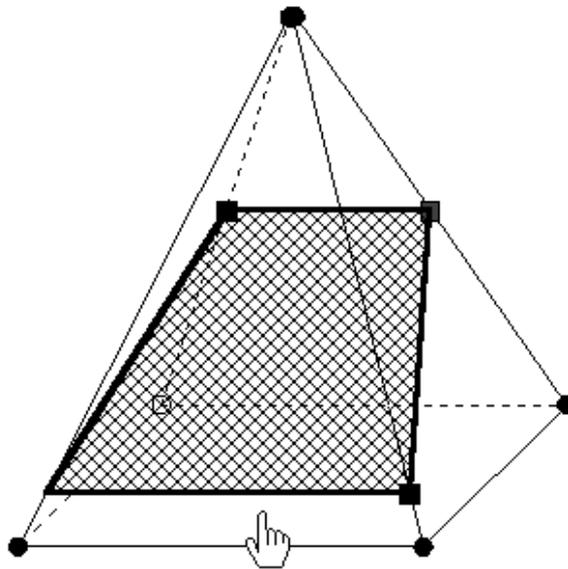
**Abb. 27**

Drei besondere Punkte auf verschiedenen Seitenkanten, Eckpunkte ausgenommen, bilden ebenfalls eine halbierende Schnittfläche. Daraus ergeben sich folgende Fälle: Keine Schnittlinie ist parallel zu einer Grundkante (Abb. 28);



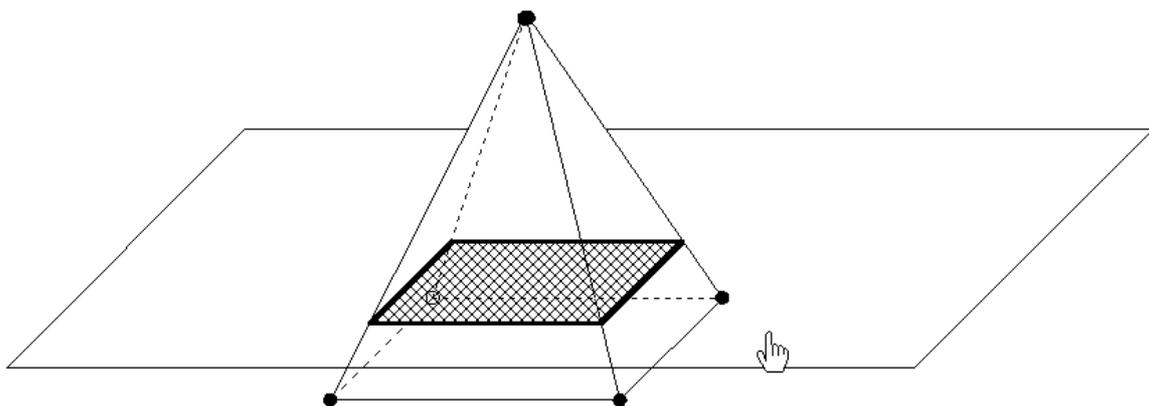
**Abb. 28**

mindestens eine Schnittlinie ist parallel zu einer Grundkante: Mit einer Schnittlinie ist auch eine zweite parallel zu einer Grundkante (Abb. 29),



**Abb. 29**

oder es sind alle Schnittlinien parallel zur Grundfläche und es liegt ein Schnitt vor, der die quadratische Pyramide in eine ebensolche und in einen quadratischen Pyramidenstumpf zerlegt (Abb. 30).



**Abb. 30**

Dabei erzeugen wir den Stumpf mit dem zweiten Schnittwerkzeug: Es wird eine Ebene wahlweise definiert, die als Schnittebene parallel durch den Körper verzogen werden kann. In Abbildung 30 wird eine horizontale Ebene gewählt. Nach der halbierenden Schnittausführung können wir uns, wie auch in den vorausgegangenen Fällen, die Netze der Körperhälften ausgeben lassen, indem wir wechselweise die Hälften auswählen (Abb. 31.1/2).

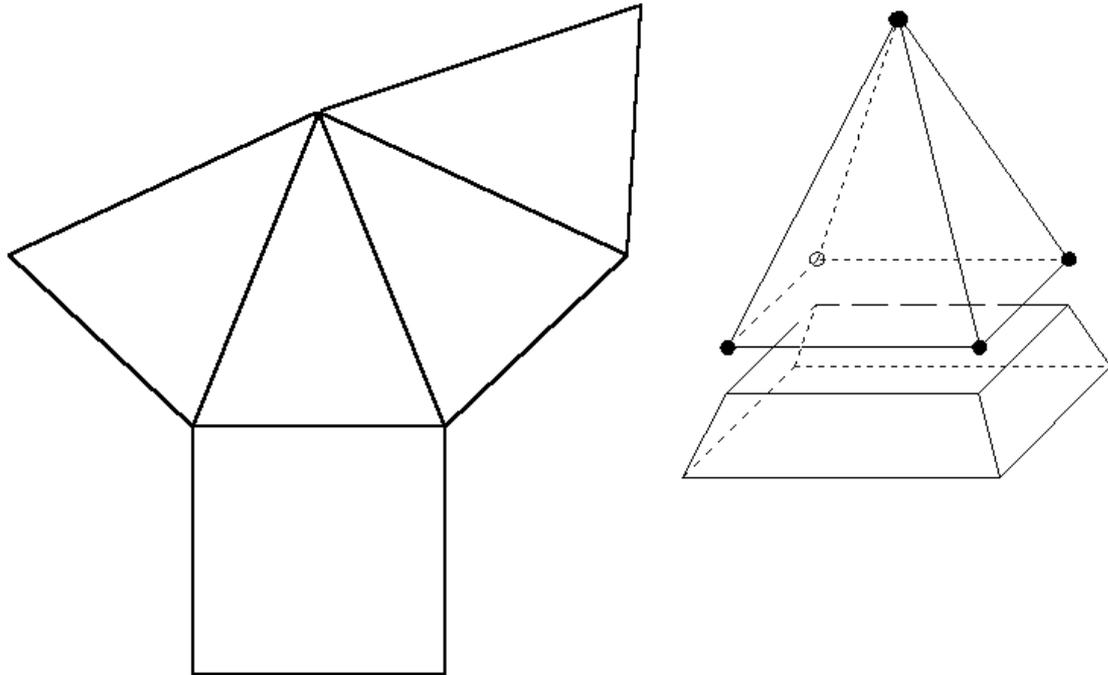


Abb. 31.1

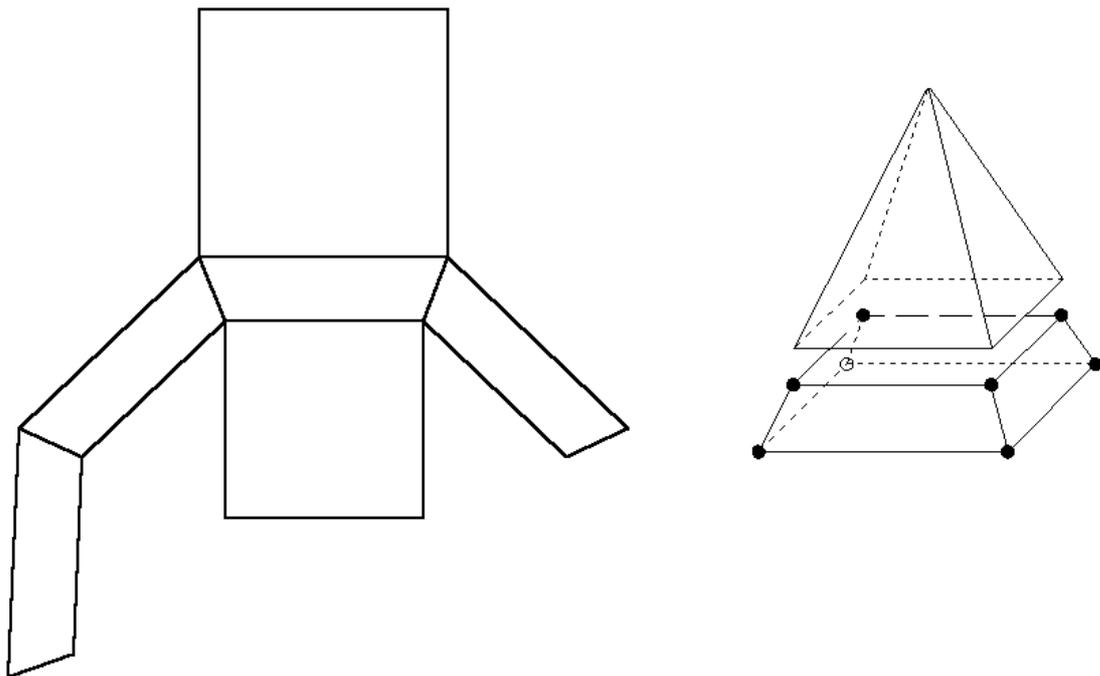
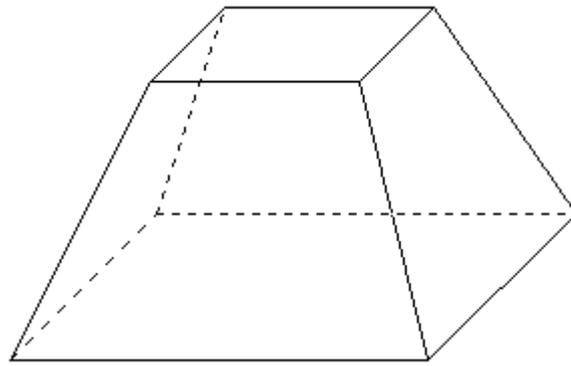


Abb. 31.2

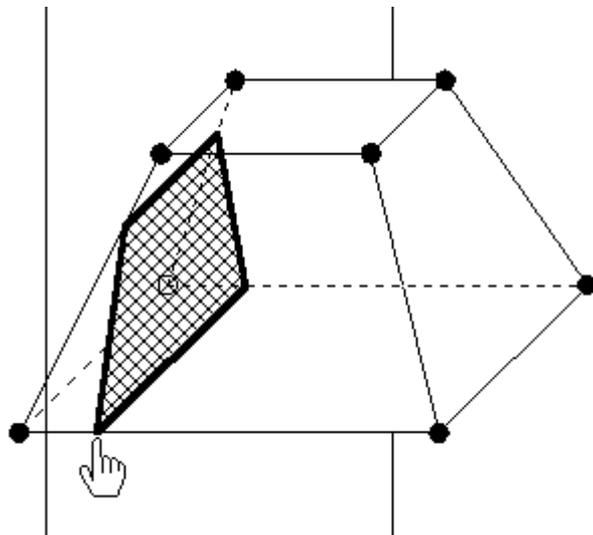
## 2.6 Die gestumpfte Pyramide

Die babylonische Herleitung der Volumenformel für den ähnlich wie in Abbildung 30 erzeugten Pyramidenstumpf (Abb. 32.1)

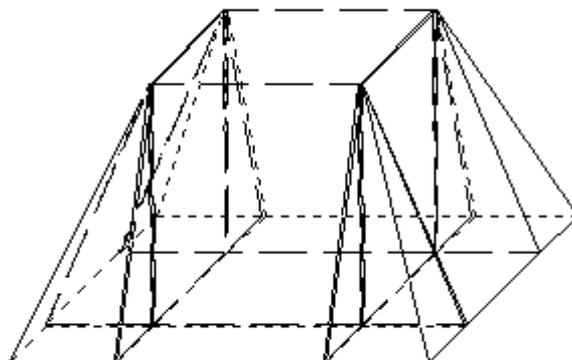


**Abb. 32.1**

setzt seine Zerlegung in Teile voraus, deren Volumenformeln schon bekannt sind. Dazu verwenden wir das zweite Schnittwerkzeug, um mit verschiebbaren vertikalen Schnittflächen die passenden Schnitte zu führen (Abb. 32.2).

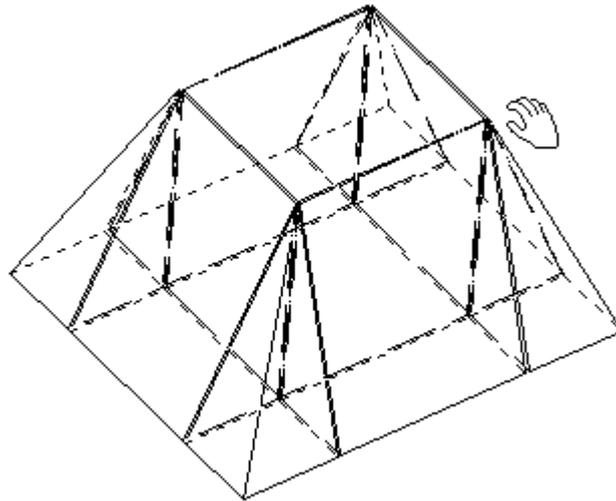


**Abb. 32.2**

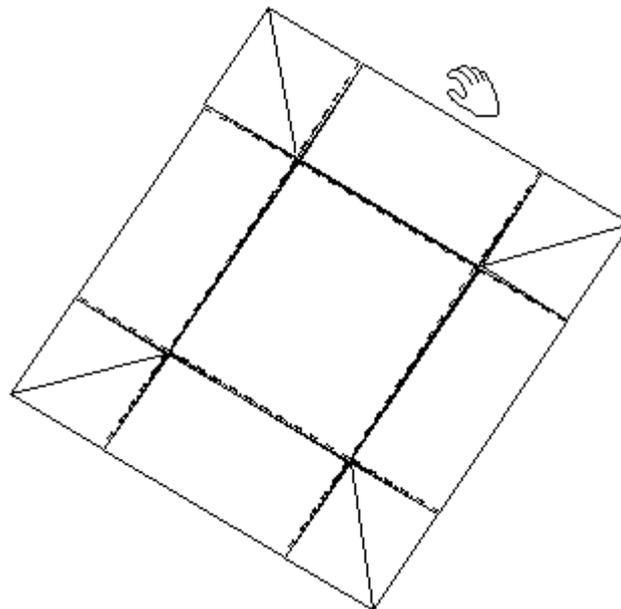


**Abb. 32.3**

Die Abbildung 32.3 zeigt uns den Pyramidenstumpf mit den entsprechenden Schnittlinien, die wir uns durch Körperdrehungen in verschiedener Lage ansehen können (Abb. 32.4/5).

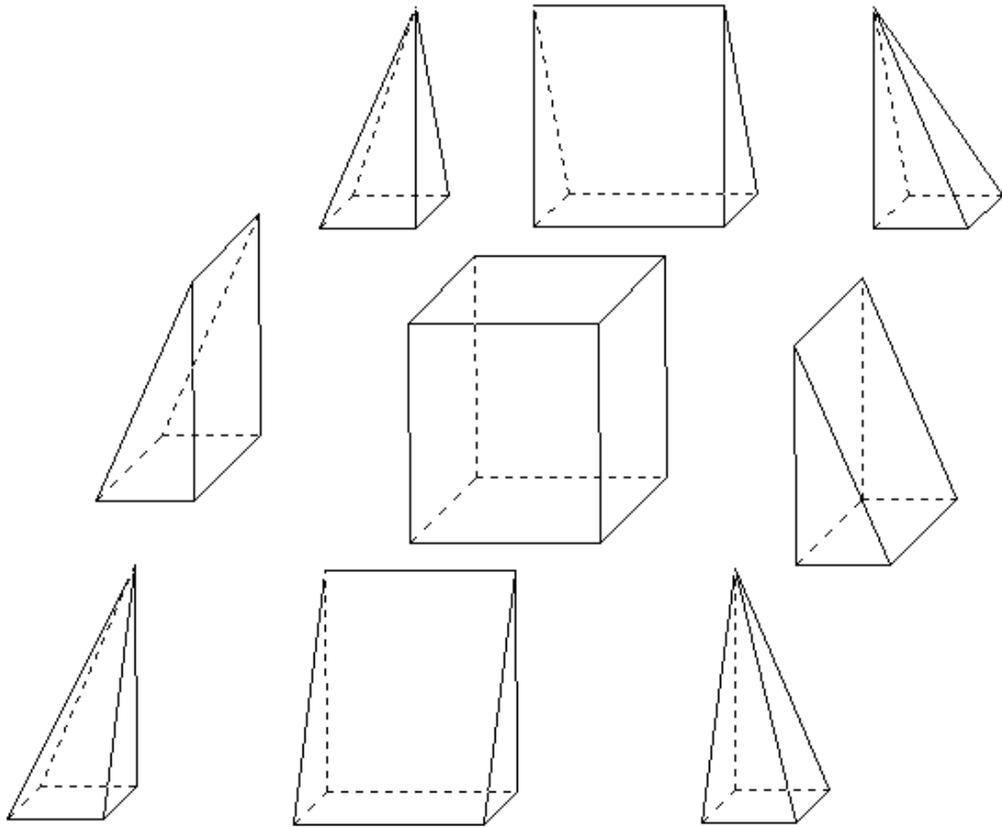


**Abb. 32.4**



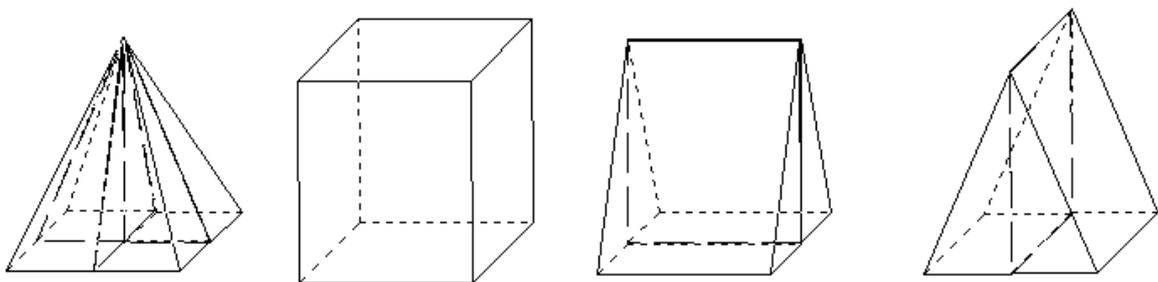
**Abb. 32.5**

Wir ziehen die Teilkörper auseinander (Abb. 32.6),



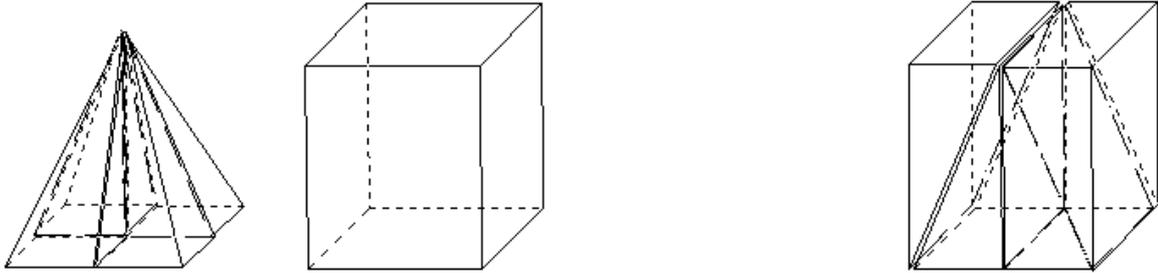
**Abb. 32.6**

fügen sie zu einer quadratischen Pyramide und zu zwei dreiseitigen Prismen zusammen; übrig bleibt außerdem eine quadratische Säule (Abb. 32.7).



**Abb. 32.7**

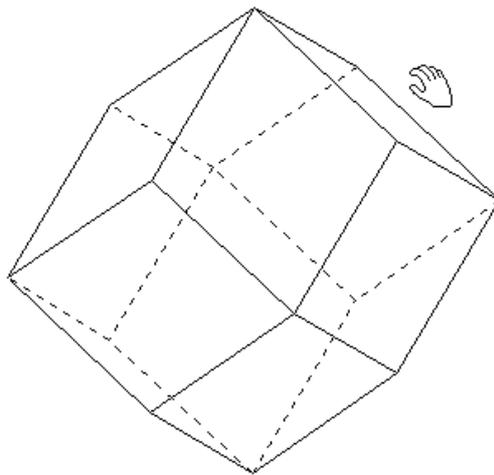
Mit etwas tüfteligen Drehungen um geeignet zu wählende Achsen lassen sich die beiden Prismen zu einem Quader umordnen (Abb. 32.8).



**Abb. 32.8**

Jetzt können wir die bekannten Volumenformeln mit den entsprechenden Bezeichnungen, die in einem Ausdruck einzutragen sind, anwenden.

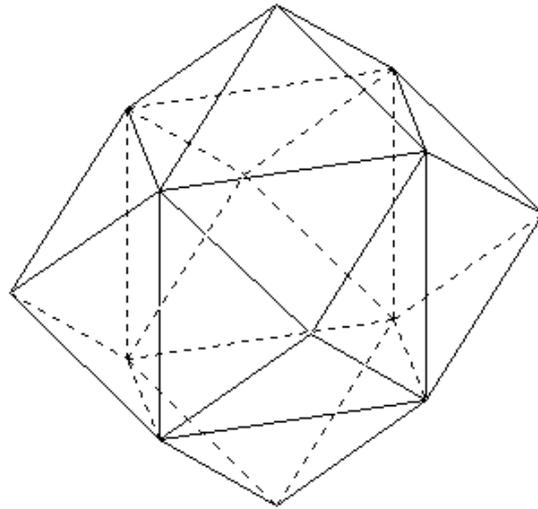
## 2.7 Pyramiden abschneiden



**Abb. 33.1**

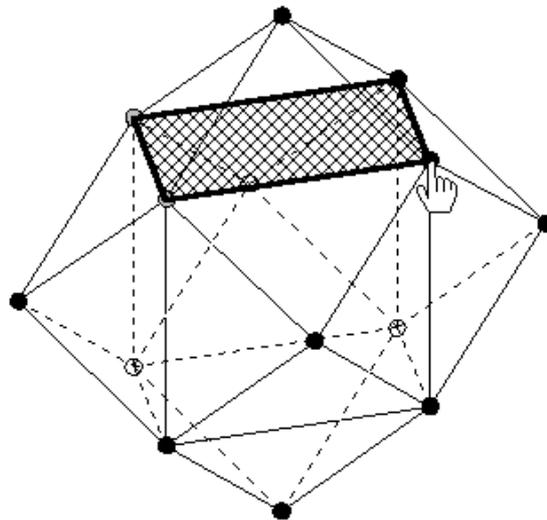
Die Abbildung 33.1 zeigt einen Zwölflächner, dessen Seitenflächen lauter einander kongruente Rauten sind. Deshalb nennt man diesen Körper auch Rautendodekaeder oder Rhomendodekaeder. Seine Ecken werden aus drei bzw. vier Rauten gebildet; deswegen handelt es sich nicht um einen regelmäßigen Körper.

Mit den Messwerkzeugen von KÖRPERGEOMETRIE kann er ausgemessen werden. In diesen Körper lässt sich ein Würfel einbeschreiben (Abb. 33.2).



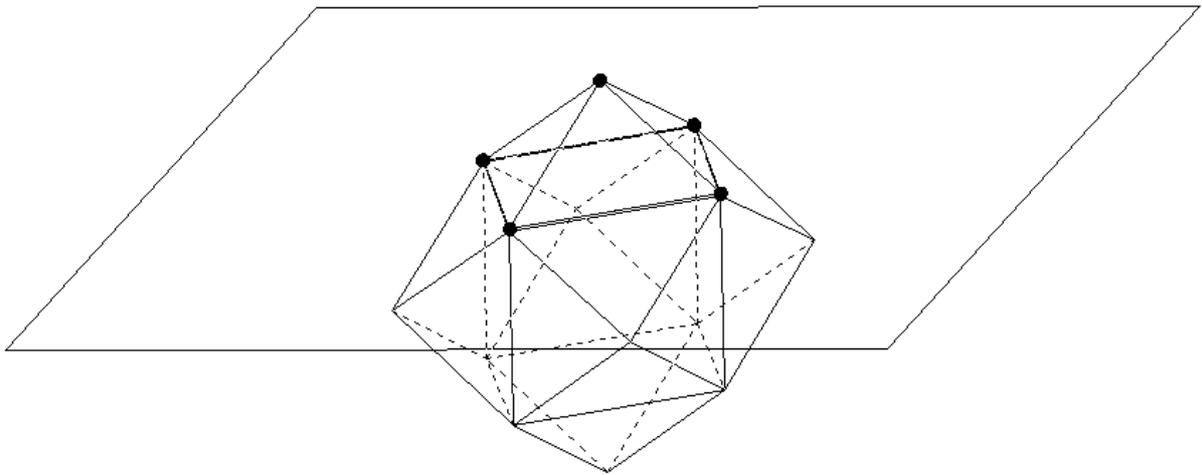
**Abb. 33.2**

Das Rautenzwölfflach ist also durch Aufsetzen geeigneter quadratischer Pyramiden auf die Würfelflächen entstanden. Wir schneiden eine der Pyramiden ab (Abb. 33.3),



**Abb. 33.3**

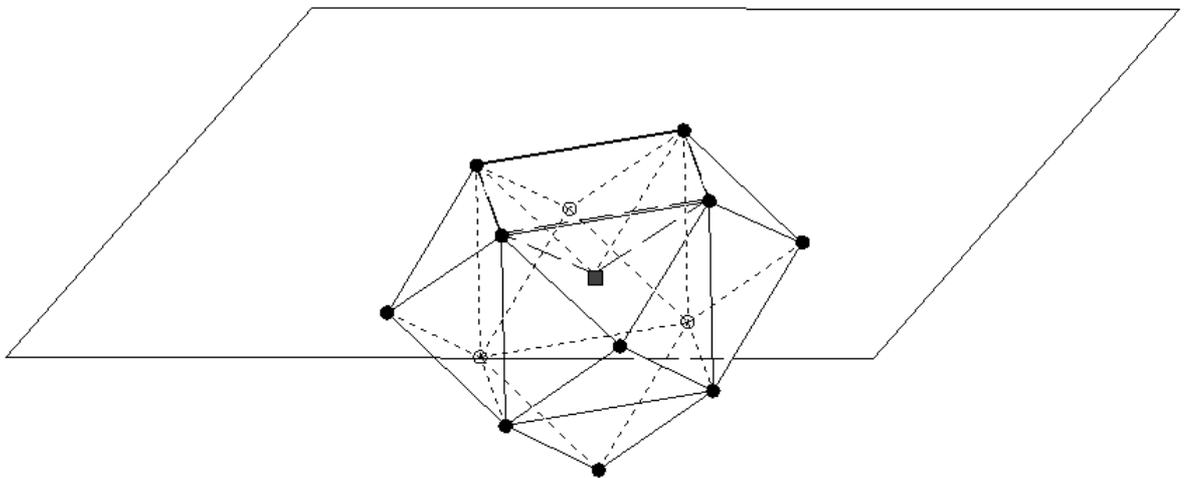
legen ihre Grundfläche als Spiegelebene fest (Abb. 33.4)



**Abb. 33.4**

und spiegeln die Pyramide.

Die Spitze der gespiegelten Pyramide fällt mit dem Würfelmittelpunkt zusammen (Abb. 33.5);



**Abb. 33.5**

die Pyramidenhöhe ist also halb so lang wie die Würfelkante.

**Einschub:** Die Eingabe des Rautendodekaeders, das in Abbildung 33.1/2 zu sehen ist, geht deshalb von den Eckpunkten eines Einheitswürfels aus, auf den die sechs passenden Pyramidenmäntel bzw. zwölf passenden Rauten aufgesetzt werden. Die folgenden Programme für die beiden Körper kann man mit irgendeinem Texteditor erstellen.

Programm für das Rautendodekaeder mit einbeschriebenem Würfel:      Programm für das Rautendodekaeder:

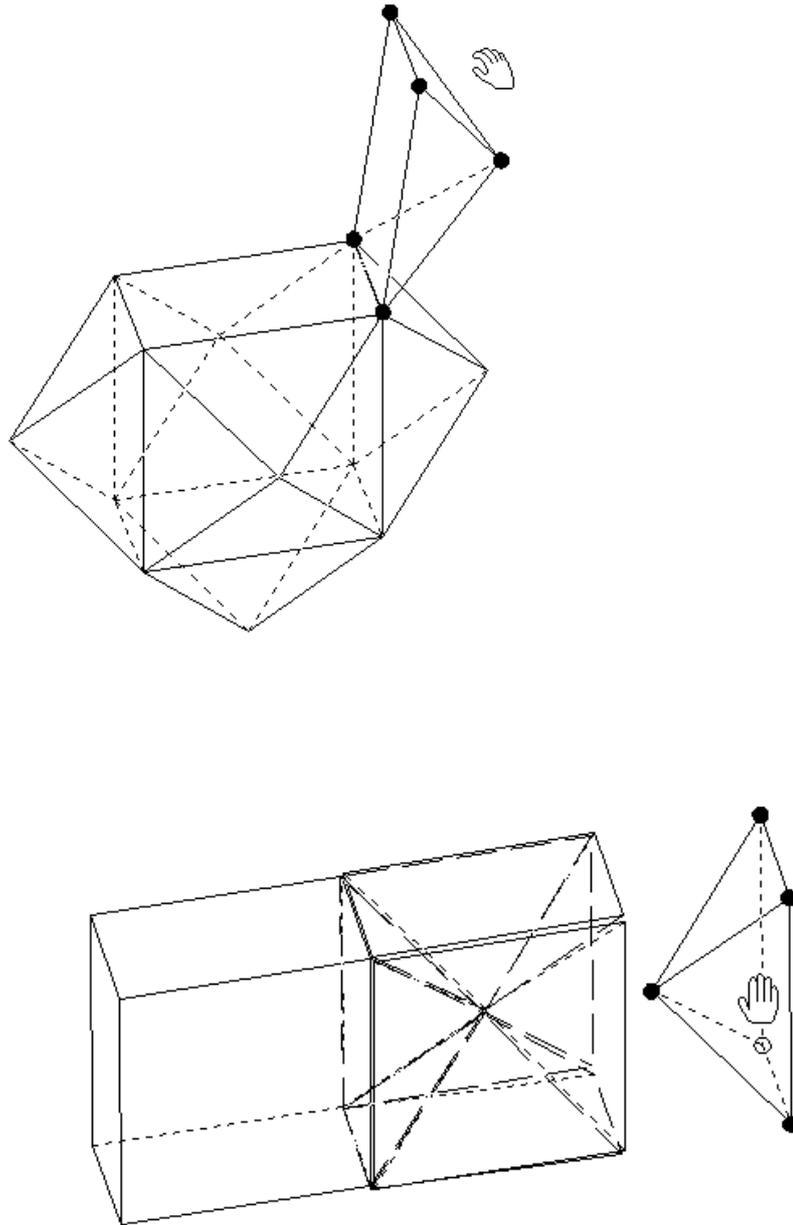
1,E, 1.0,-1.0, 0.0,A  
1,E, 1.0, 0.0, 0.0,B  
1,E, 0.0, 0.0, 0.0,C  
1,E, 0.0,-1.0, 0.0,D  
1,E, 1.0,-1.0, 1.0,E  
1,E, 1.0, 0.0, 1.0,F  
1,E, 0.0, 0.0, 1.0,G  
1,E, 0.0,-1.0, 1.0,H  
1,E, 0.5,-0.5, 1.5,I  
1,E, 0.5,-0.5,-0.5,J  
1,E, 1.5,-0.5, 0.5,K  
1,E,-0.5,-0.5, 0.5,L  
1,E, 0.5, 0.5, 0.5,M  
1,E, 0.5,-1.5, 0.5,N  
1,F,EFI  
1,F,FGI  
1,F,GHI  
1,F,HEI  
1,F,BAJ  
1,F,CBJ  
1,F,DCJ  
1,F,ADJ  
1,F,ABK  
1,F,BFK  
1,F,FEK  
1,F,EAK  
1,F,CDL  
1,F,DHL  
1,F,HGL  
1,F,GCL  
1,F,BCM  
1,F,CGM  
1,F,GFM  
1,F,FBM  
1,F,DAN  
1,F,AEN  
1,F,EHN  
1,F,HDN

1,E, 1.0,-1.0, 0.0,A  
1,E, 1.0, 0.0, 0.0,B  
1,E, 0.0, 0.0, 0.0,C  
1,E, 0.0,-1.0, 0.0,D  
1,E, 1.0,-1.0, 1.0,E  
1,E, 1.0, 0.0, 1.0,F  
1,E, 0.0, 0.0, 1.0,G  
1,E, 0.0,-1.0, 1.0,H  
1,E, 0.5,-0.5, 1.5,I  
1,E, 0.5,-0.5,-0.5,J  
1,E, 1.5,-0.5, 0.5,K  
1,E,-0.5,-0.5, 0.5,L  
1,E, 0.5, 0.5, 0.5,M  
1,E, 0.5,-1.5, 0.5,N  
1,F,KFIE  
1,F,MGIF  
1,F,LHIG  
1,F,NEIH  
1,F,KBMF  
1,F,MCLG  
1,F,LDNH  
1,F,NAKE  
1,F,KAJB  
1,F,MBJC  
1,F,LCJD  
1,F,NDJA

{ EINBETTEN Word.Picture.8 }

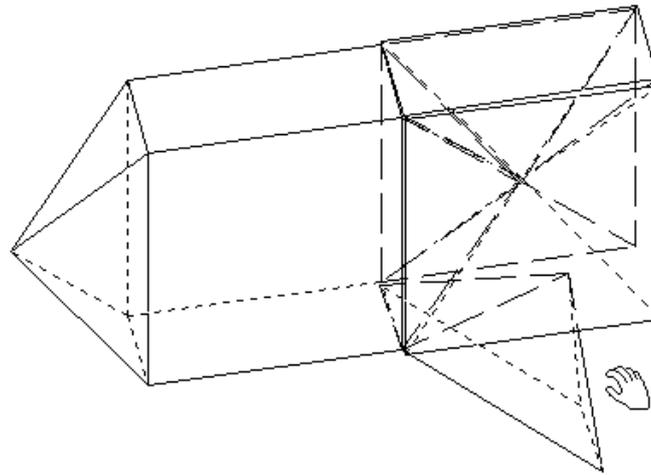
Anmerkungen: 1 steht für den zu definierenden Körper (hier nur für einen Teilkörper), E (F) für die zu definierenden Ecken (Flächen); A,B,C,D,F,G,H sind die Bezeichnungen für die Würfecken, I,J,K,L,M,N für die Pyramidenspitzen. C bildet den Koordinatenursprung; der einbeschriebene Würfel wird als Einheitswürfel angenommen.

Das Volumen des Rautendodekaeders ist deshalb doppelt so groß wie das des Würfels. Das können wir auch einsehen, indem wir aus den sechs aufgesetzten Pyramiden einen Würfel bilden, der zum einbeschriebenen kongruent ist. Dazu schneiden wir nacheinander vier der Pyramiden ab, drehen diese jeweils passend um eine ihrer Grundkanten (Abb. 34.1/2)



**Abb. 34.1/2**

und verschieben die fünfte in die verbliebene Lücke (Abb. 34.3).



**Abb. 34.3**

Ein weiteres Beispiel für das Abschneiden quadratischer Pyramiden:

Wir definieren eine vierseitige Doppelpyramide mit gleichlangen Kanten (regelmäßiges Oktaeder) , schneiden ihre sechs Ecken jeweils bis zu den Kantenmitten ab und erhalten einen Körper mit sechs Quadraten und acht gleichseitigen Dreiecken als Seitenflächen, der Kuboktaeder genannt wird.

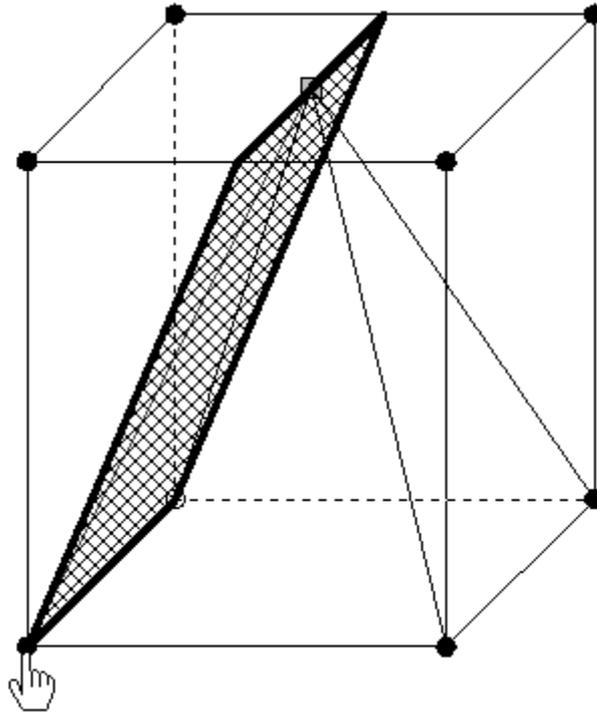
## **2.8 Pyramiden herausschneiden**

Aus Körpern können quadratische Pyramiden herausgeschnitten werden. Dafür ist u.a. eine quadratische Säule geeignet: Zuerst zeichnen wir in die quadratische Säule die Pyramide ein, sozusagen als Plan für das Schneiden (Abb. 35.1),

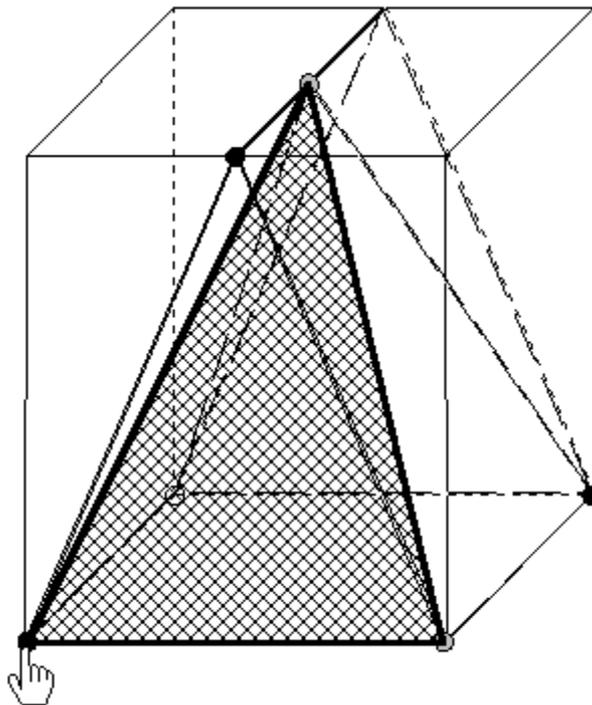
{ EMBED Word.Picture.8 }

**Abb. 35.1**

dann schneiden wir, wie in Abbildung 35.2 und 35.3

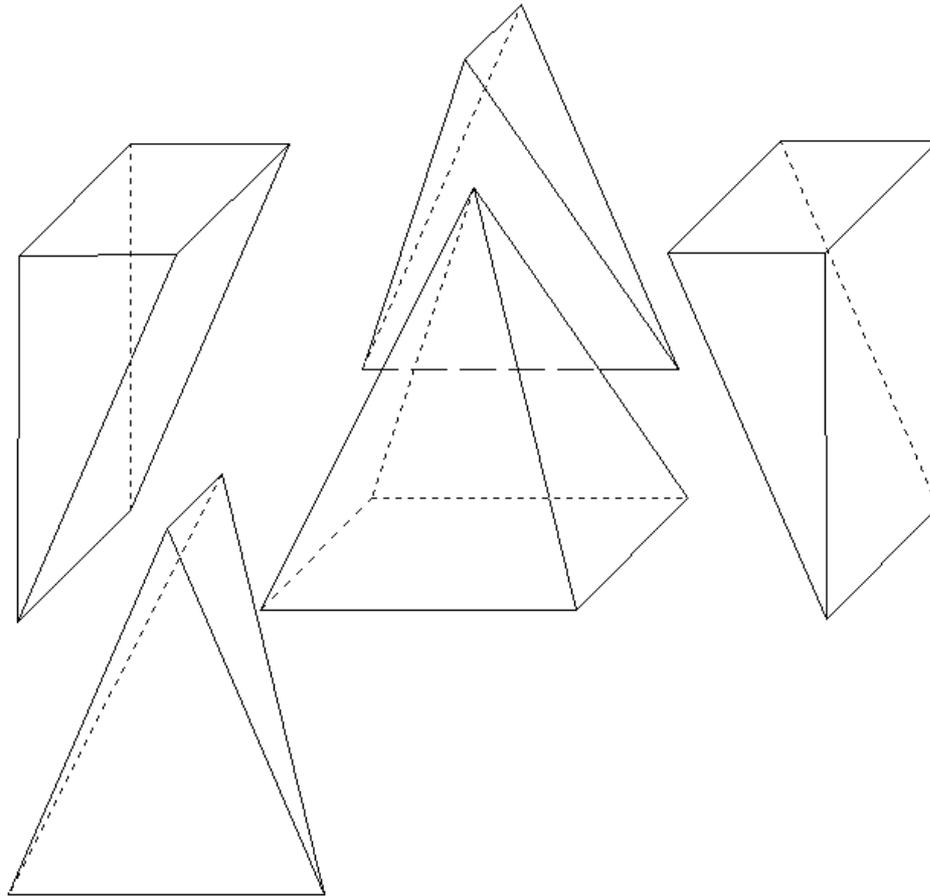


**Abb. 35.1**



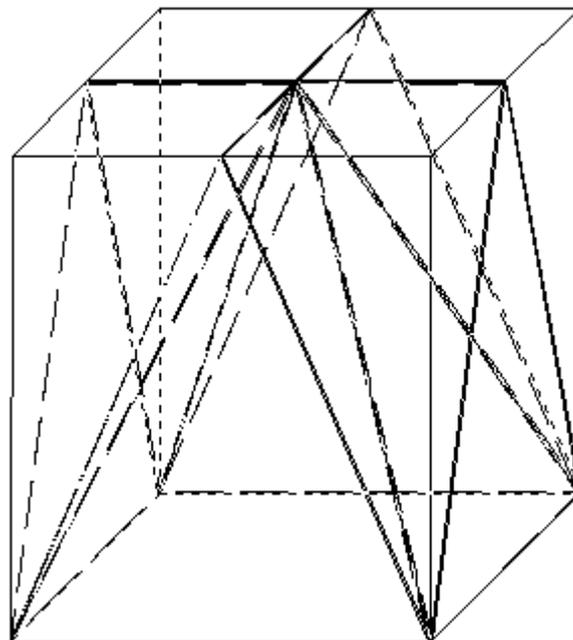
**Abb. 35.3**

zu sehen ist, mit dem ersten Schnittwerkzeug und erhalten vier „Abfall-Körper“ (Abb. 35.4).

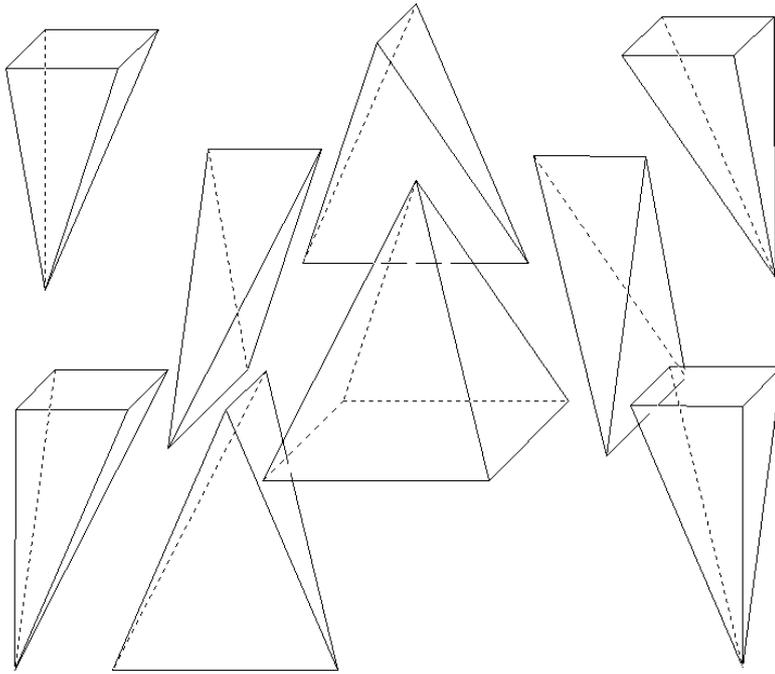


**Abb. 35.4**

Verwenden wir auch das zweite Schnittwerkzeug, so ergeben sich auch andere Restkörper (Abb. 36.1/2);

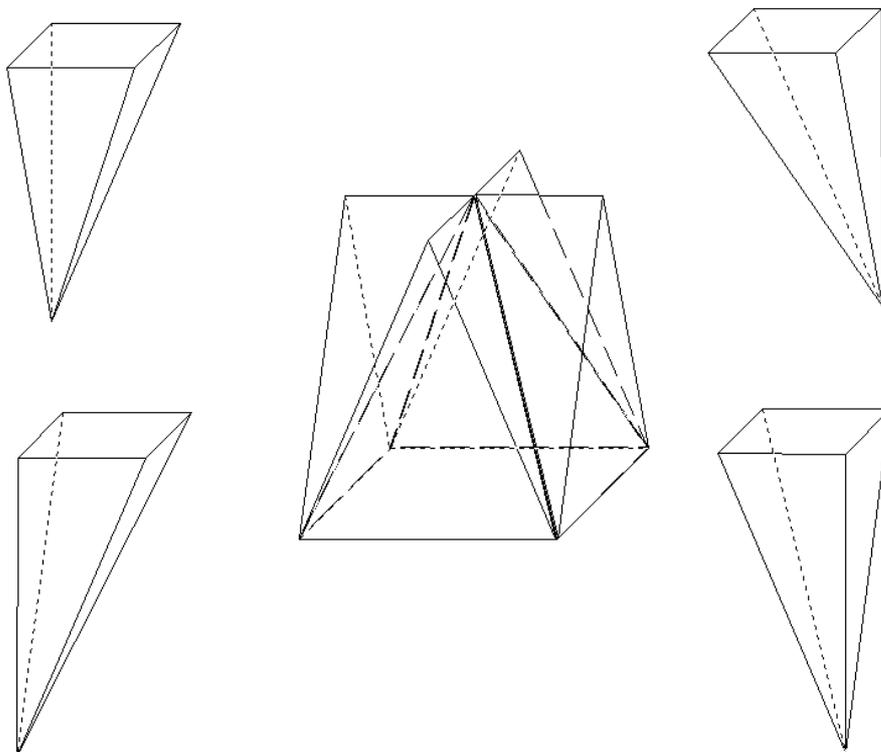


**Abb. 36.1**



**Abb. 36.2**

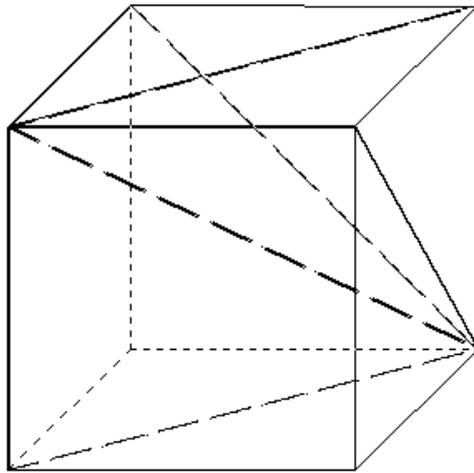
nur teilweise auseinandergenommen, erhalten wir ein Dach mit einer Vierung (Abb. 36.3).



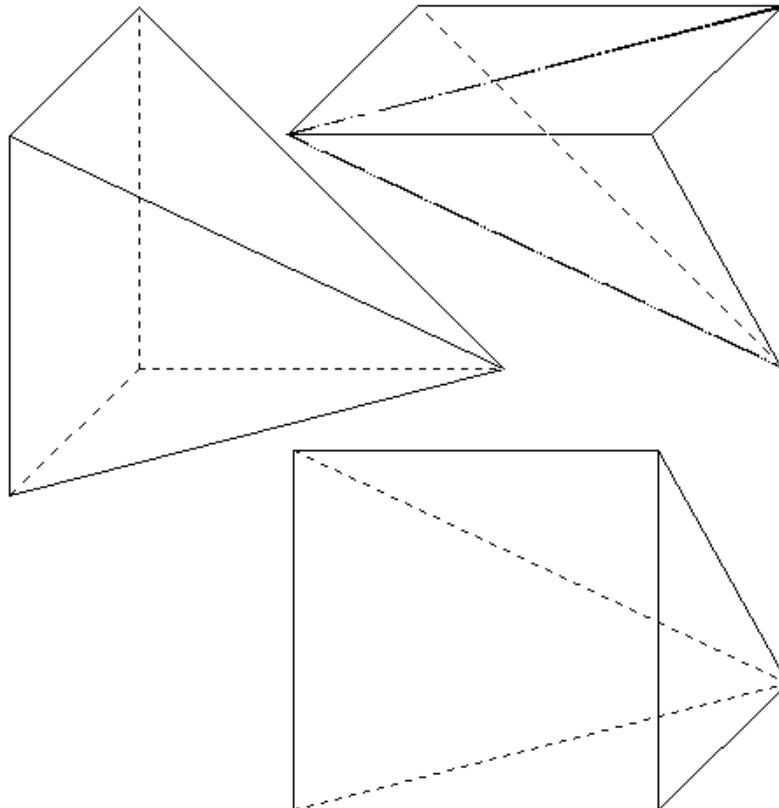
**Abb. 36.3**

Auch den Würfel können wir in Pyramiden zerlegen. Wir führen hier nur eine der Möglichkeiten aus. Mit dem "3-Punkte-Werkzeug" zerlegen wir den Würfel in drei ein-

ander kongruente vierseitige Pyramiden mit quadratischer Grundfläche, bei denen die Höhe mit einer Seitenkante zusammenfällt; leider lässt es sich nicht vermeiden, dass beim Schneiden immer eine der Pyramiden in zwei dreiseitige Pyramiden zerlegt wird (Abb. 37.1/2).



**Abb. 37.1**



**Abb. 37.2**

Das Netz einer solchen Pyramide zeigt die wahre Form der Seitenflächen: zwei kongruente gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke mit der Würfelseitenflächendiagonalen als Hypotenuse und zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke mit der Würfel-

raumdiagonalen als Hypotenuse und der Würfelseitenflächendiagonalen als Kathete (Abb. 37.3).

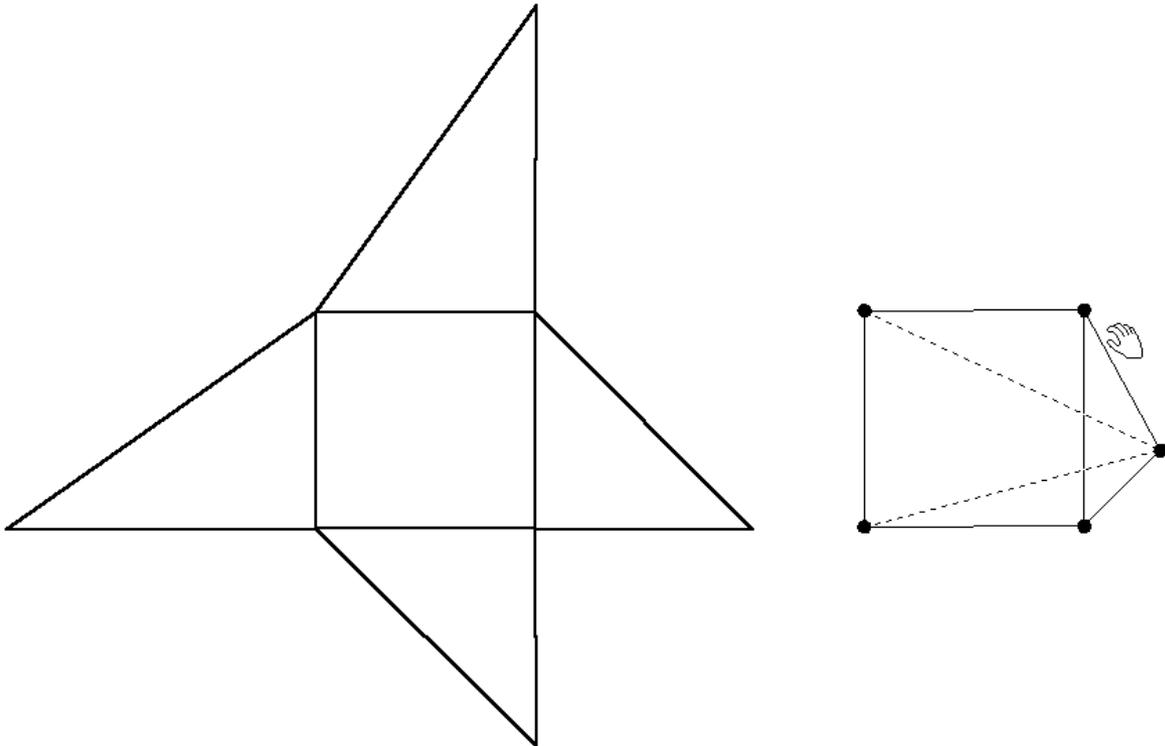


Abb. 37.3

## 2.9 Eine Pyramide in andere Körper zerlegen

Aus einer quadratischen Pyramide soll eine Doppelpyramide herausgeschnitten werden. Den Plan dafür zeigt die Abbildung 38.1.

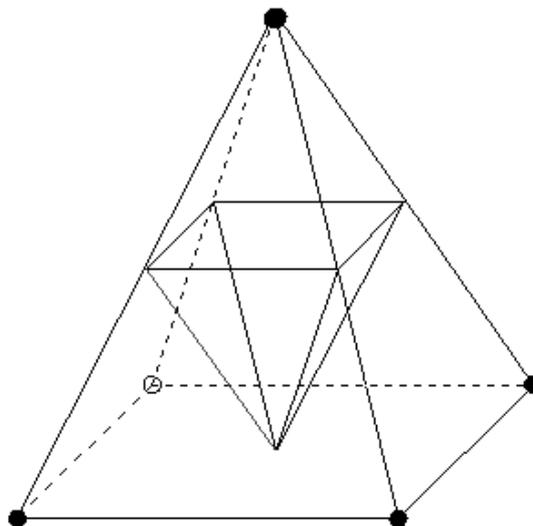
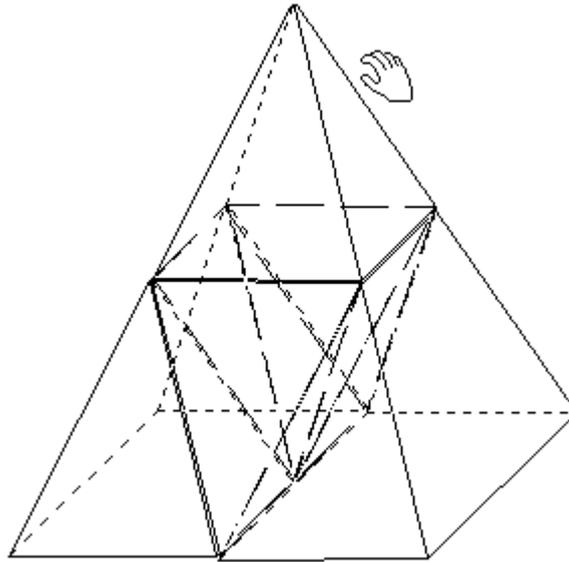


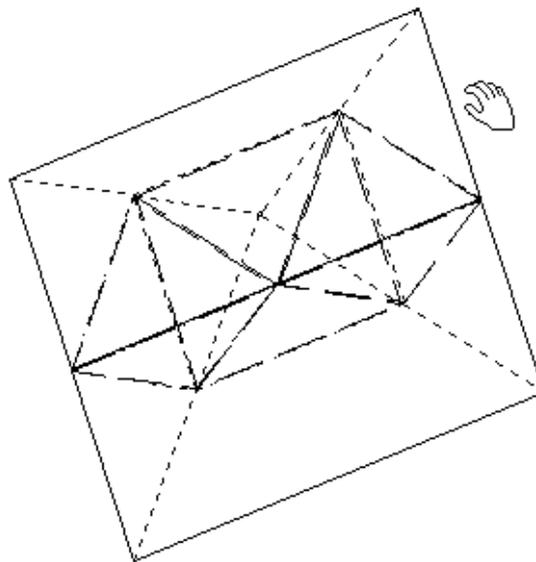
Abb. 38.1

Mit dem ersten Schnittwerkzeug erhalten wir eine Zerlegung wie in Abbildung 38.2,



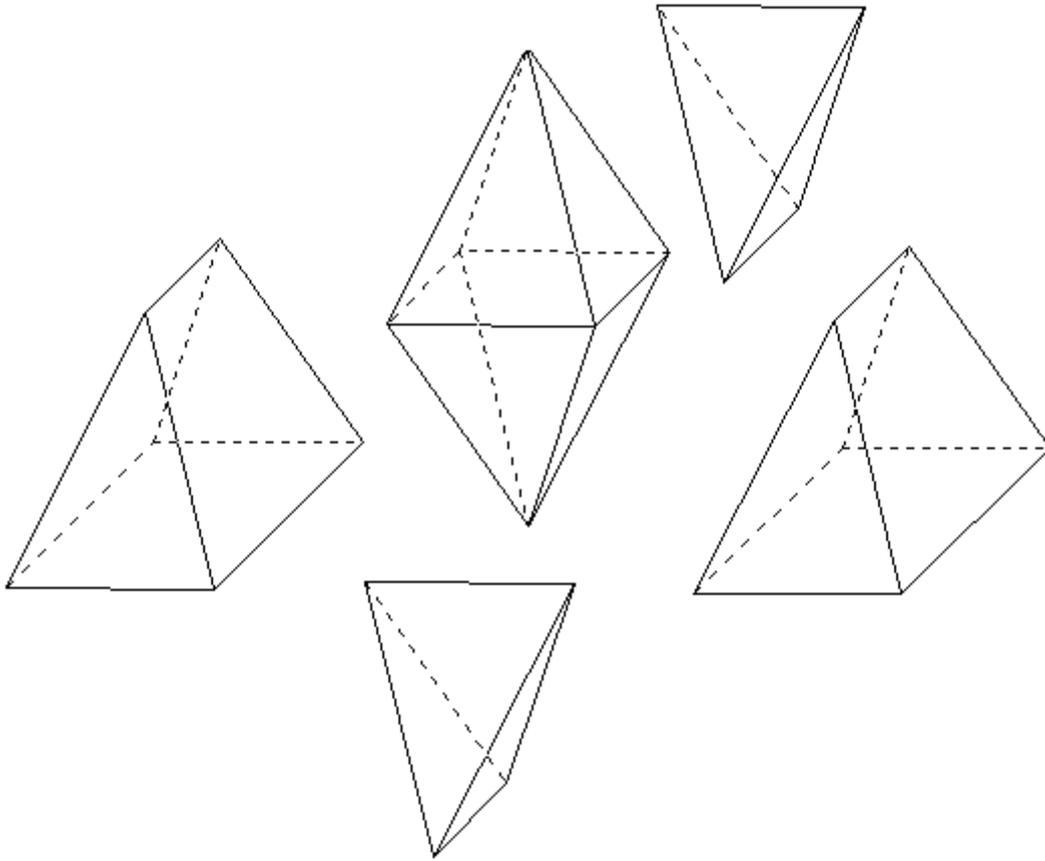
**Abb. 38.2**

die wir uns durch Drehen im Körper anschauen können (Abb. 38.3).



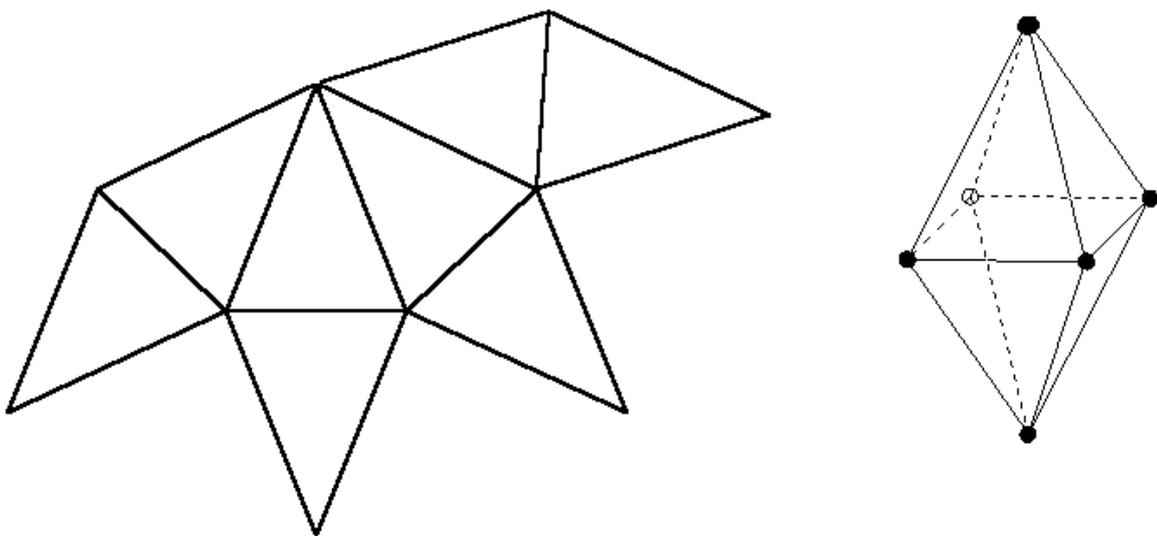
**Abb. 38.3**

Das Ergebnis des Auseinanderziehens der Teile zeigt die „Explosionsdarstellung“ in Abbildung 38.4,

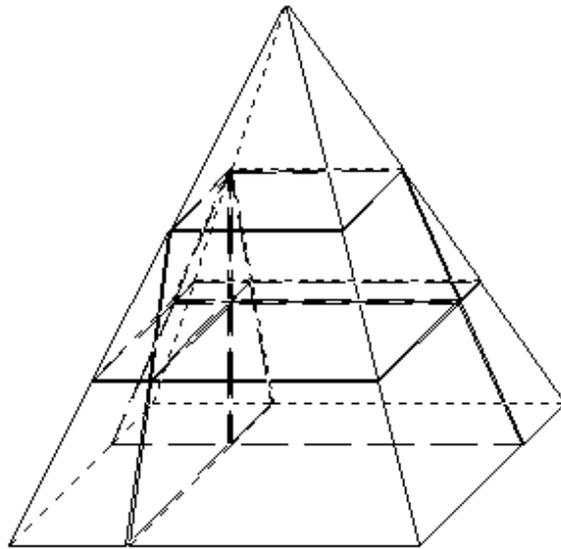


**Abb. 38.4**

die natürlich auch als ganze Schnittszene herumzudrehen ist und deren Teile als "Pyramidenpuzzle" verwendet werden können. Das Netz des Oktaeders ist in Abbildung 38.5 zu sehen; durch Ausdruck auch der anderen Teilkörper werden die Puzzteile taktil verfügbar gemacht.

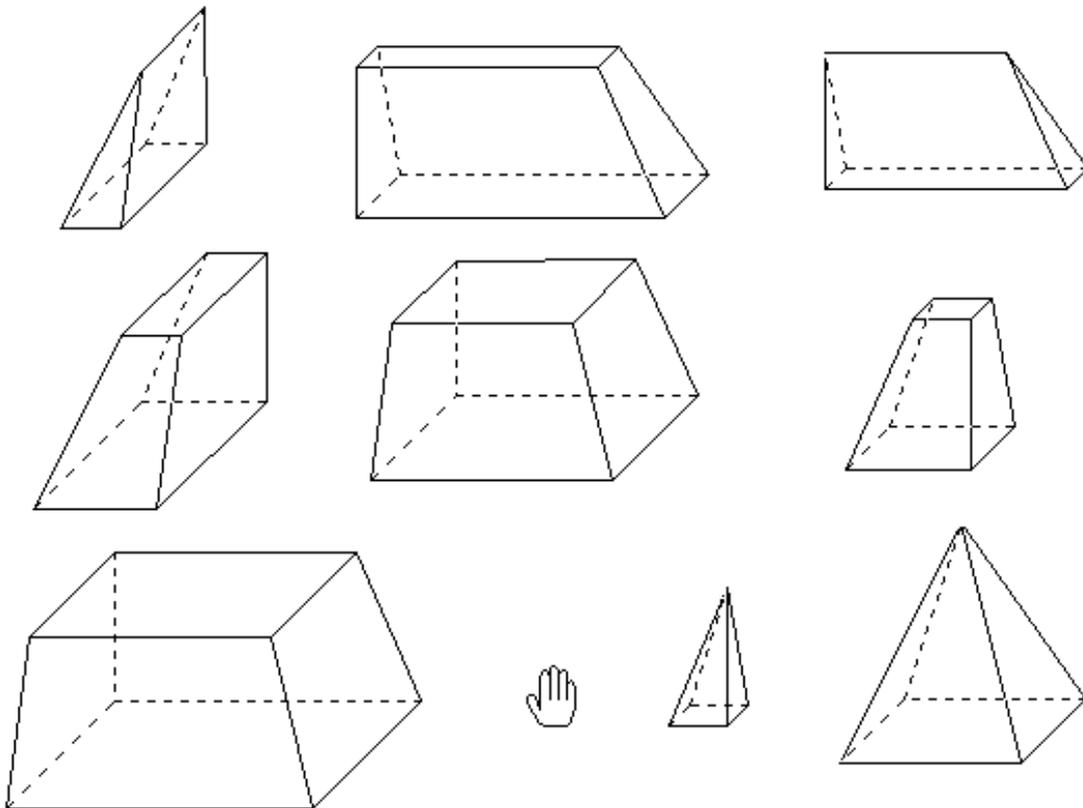


Herstellung eines "regellosen" Bildschirm-Puzzels: Wir legen in eine quadratische Pyramide beispielsweise jeweils zwei horizontale und vertikale Schnitte (Abb. 39.1),



**Abb. 39.1**

ziehen die Teilkörper auseinander und mischen diese (Abb. 39.2).



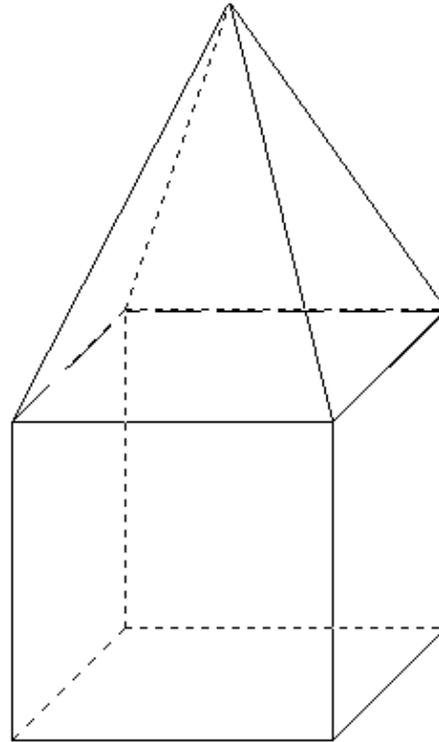
**Abb. 39.2**

Es ist eine reizvolle Aufgabe, die Teile durch Parallelverschieben wieder zu einer Pyramide zusammenzufügen.

## 2.10 Körper mit Pyramiden zusammensetzen

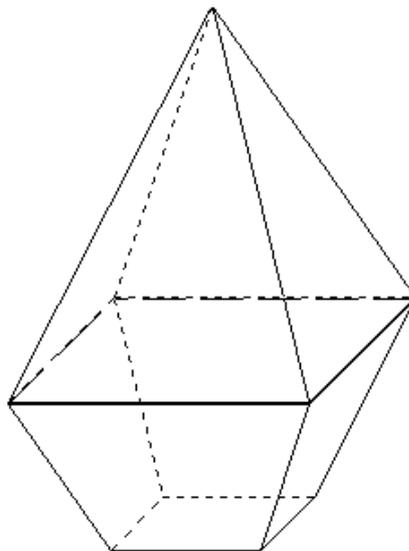
Im Symbolleiste „Körper auswählen und definieren“ können wir eine Pyramide mit sich und den anderen (Grundkörpern zusammenbauen); drei solcher Zusammenbauergebnisse zeigen Abbildungen Abb. 40.1 - 40.3.

{ EMBED Word.Picture.8  
}



**Abb. 40.1** (Pyramide mit Pyramide)

**Abb.40.2** (Pyramide mit Würfel)



**Abb.40.3** (Pyramide mit Pyramidenstumpf).

### 2.11 Pyramide ein- und umbeschreiben

In der Symbolleiste für „Einbeschriebene Körper und Rotationskörper“ wählen wir das „Einbeschreiben“ für eine quadratische Pyramide in den Würfel und veranschaulichen das Ergebnis in einer räumlichen Ecke (Abb.41.1) und im Dreitafelbild (Abb.41.2);

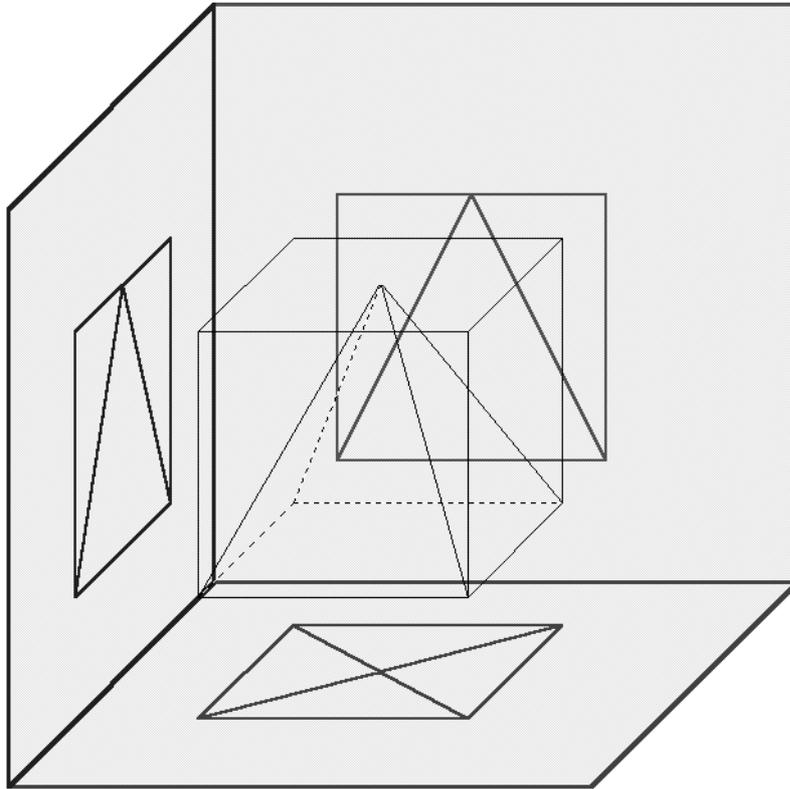


Abb. 41.1

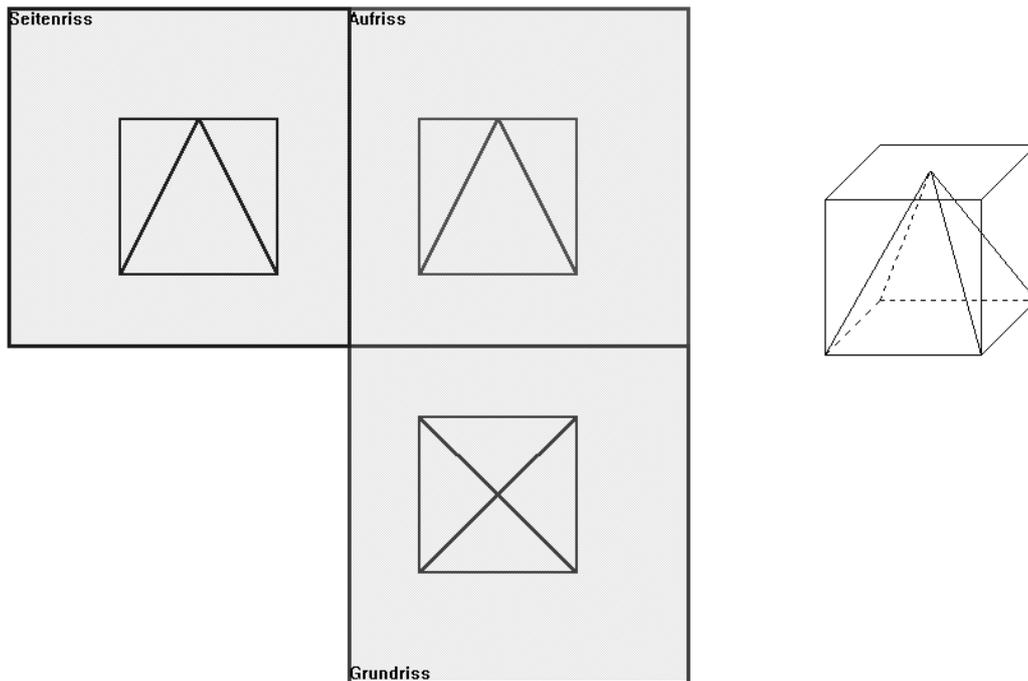
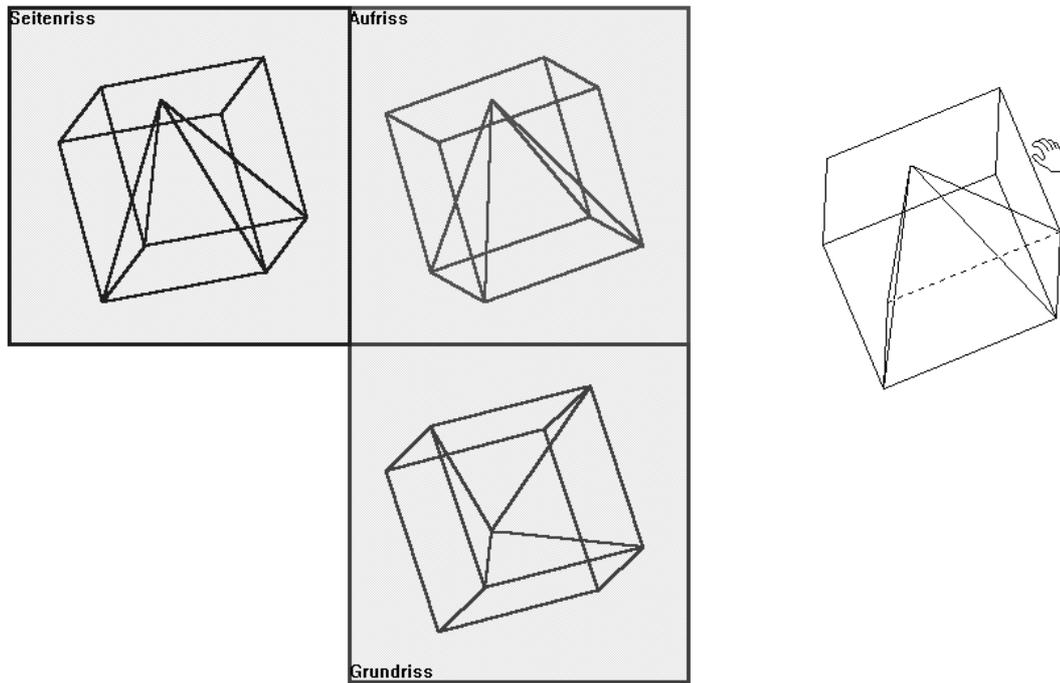


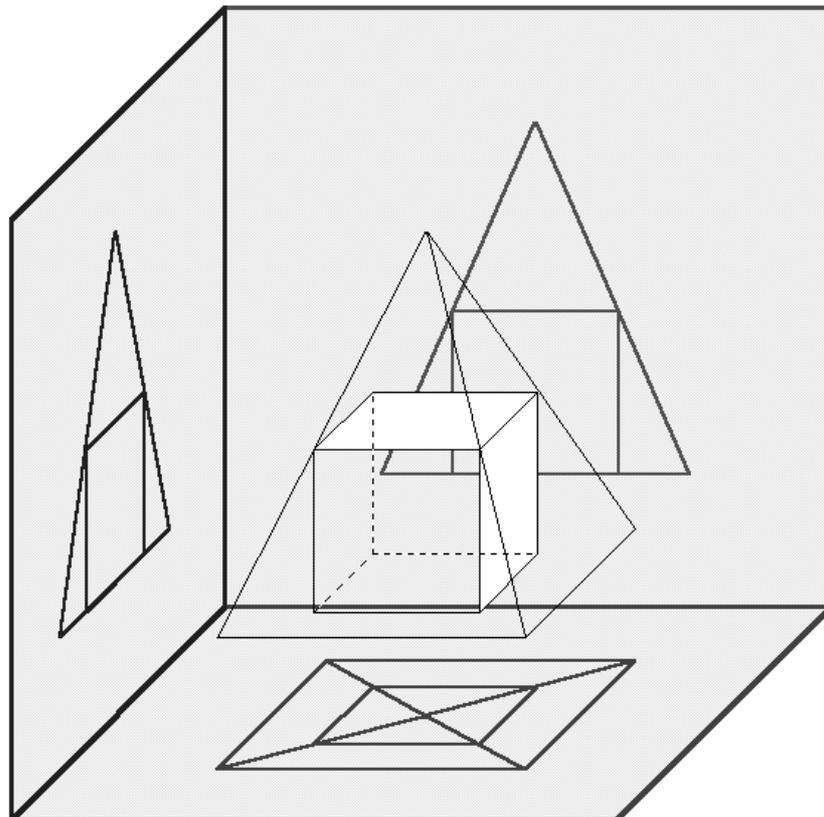
Abb. 41.2

nach einer Drehung (Abb.41.3).



**Abb. 41.3**

Den Würfel beschreiben wir in eine quadratische Pyramide ein und damit die Pyramide um (Abb. 42.1/2).



**Abb. 42.1**

{ EMBED Word.Picture.8 }

**Abb. 42.2**

Wir können auch einen Zylinder (auf nicht eindeutige Weise!) und die Kugel in eine quadratische Pyramide einbeschreiben (Abb. 43 /Abb. 44).

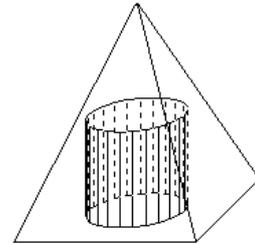
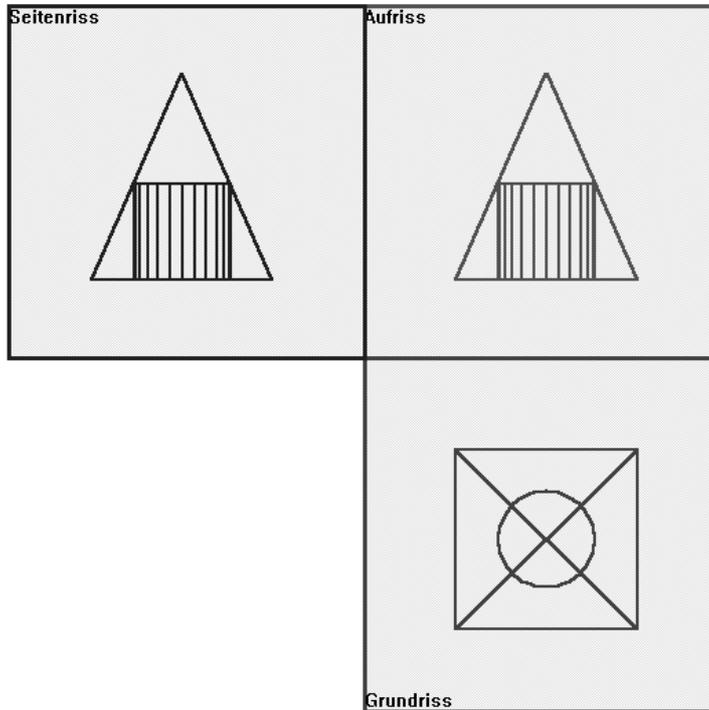


Abb. 43

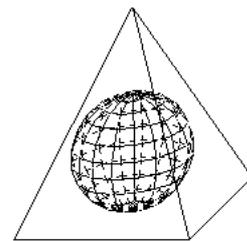
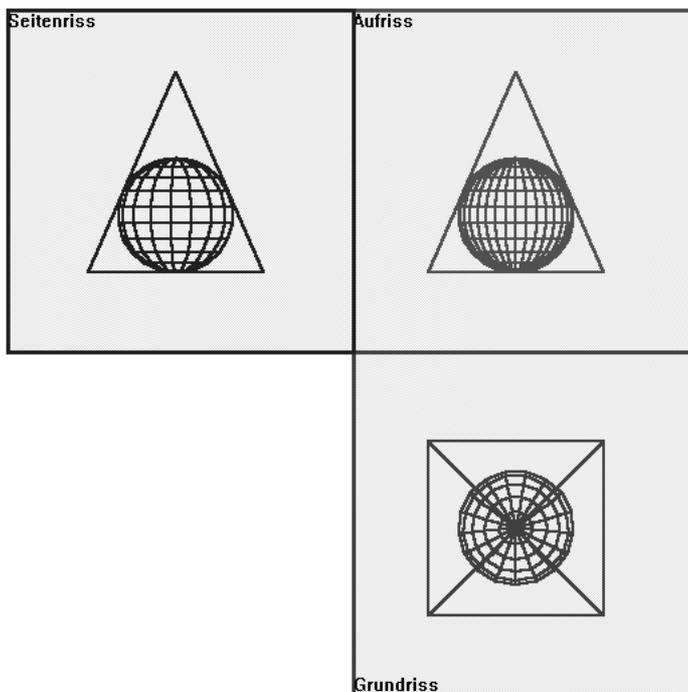


Abb. 44

### 2.12 Von der Pyramide zum "Kegel"

Die Abbildungen 45.1 – 45.4 sollen den näherungsweisen Übergang von der 4-seitigen Pyramide zum „Kegel“ bei gleicher Körperhöhe und gleichem Radius des Grund-

flächenumkreises illustrieren; dabei sind auch die entsprechenden Netze eingeblendet, die jeweils die regelmäßige Grundfläche und den Pyramidenmantel zum Vergleich zeigen.

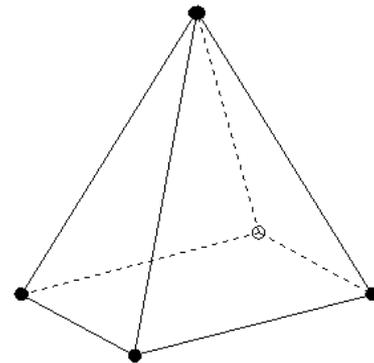
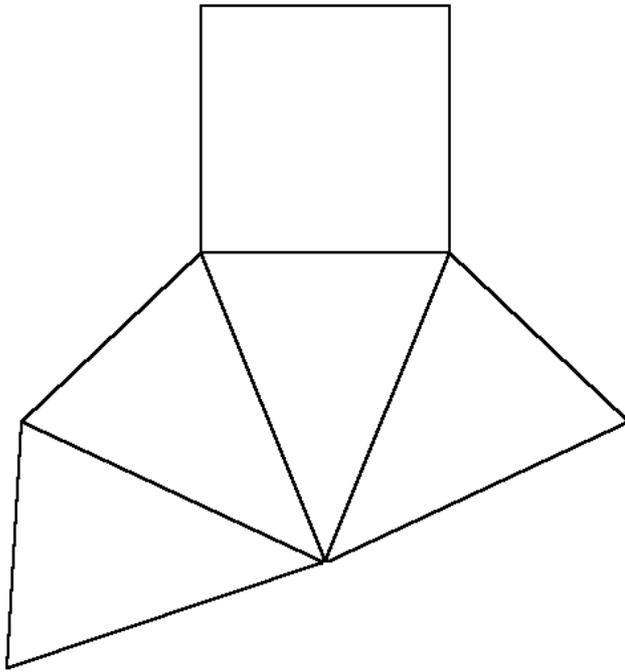


Abb. 45.1

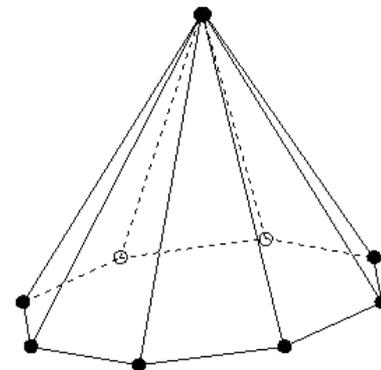
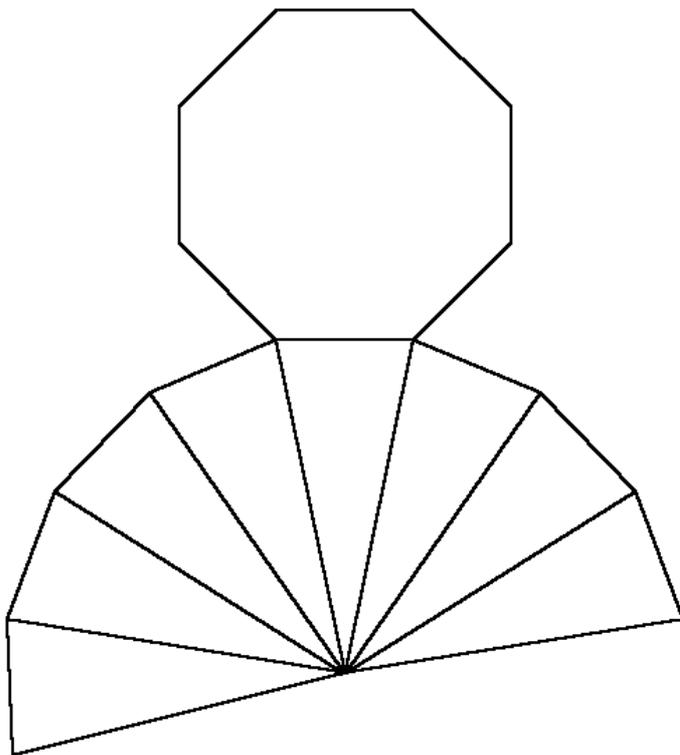


Abb. 45.2

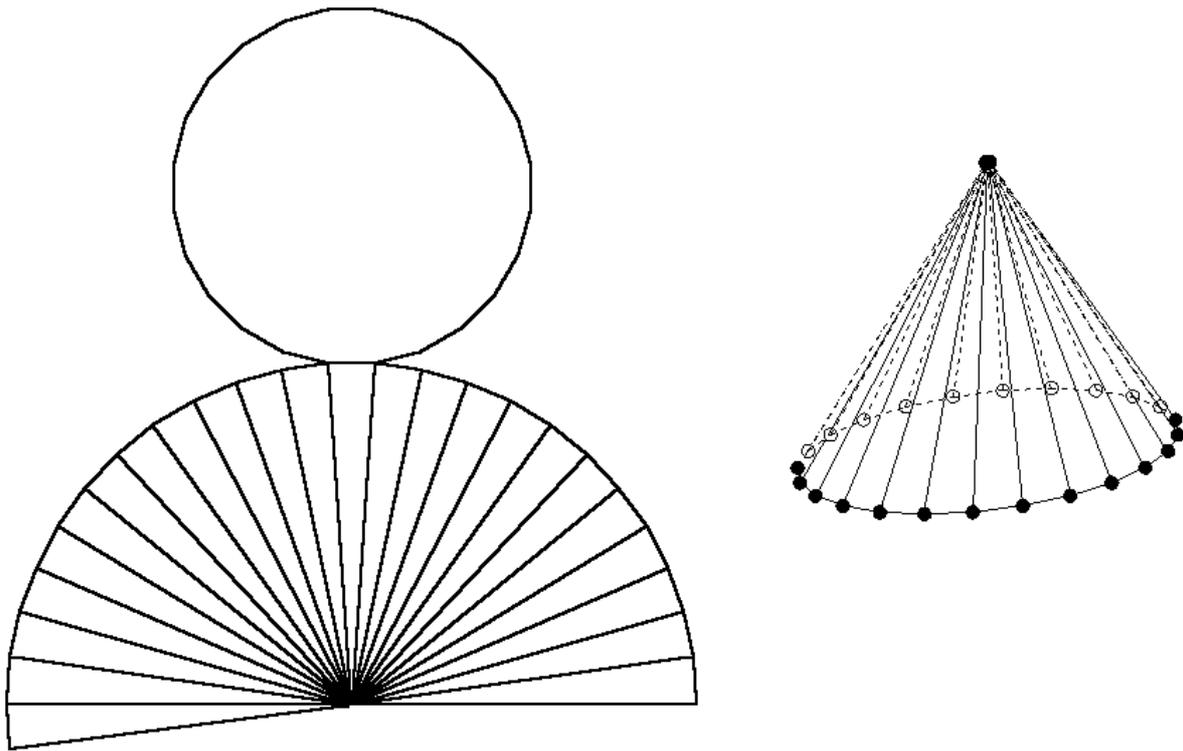
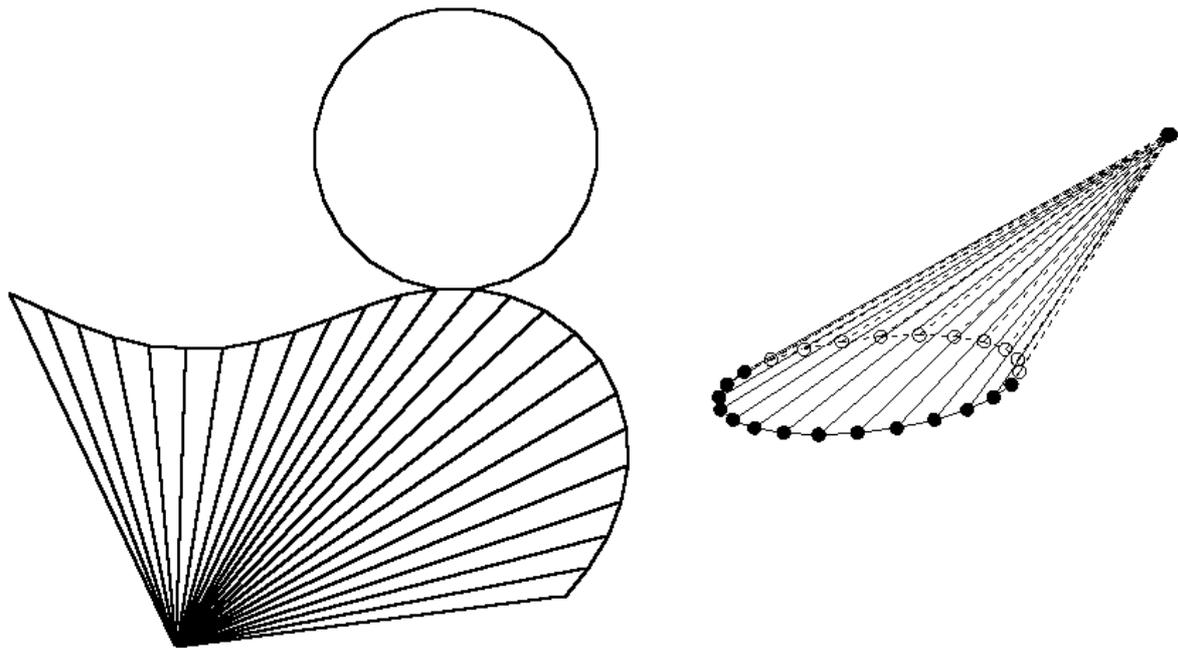


Abb. 45.3

Der Körper in Abbildung 45.4 ist mit dem Kegelbutton erzeugt; wir erkennen aber durch Abzählen, dass es sich eigentlich um eine 24-seitige Pyramide handelt. In KÖRPERGEOMETRIE wird also ein Kegel stets durch eine solche Pyramide approximiert. – Durch Verziehen des geraden Kreiskegels zu einem schiefen, erhalten wir ästhetische wirkende Kegelnetze (Abb. 46).



**Abb. 46**

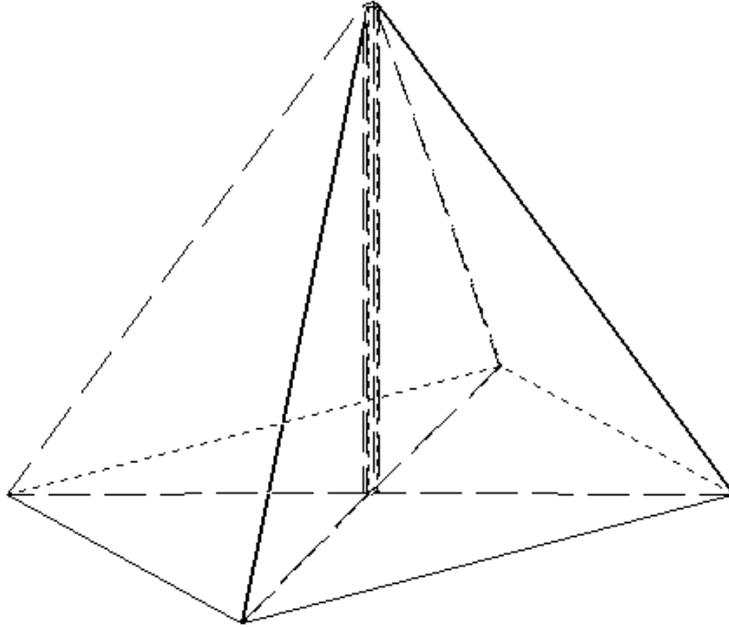
Der Kegel lässt sich auch als Rotationskörper erzeugen. Dazu muss das dreieckige Rotationsprofil entsprechend durch Verziehen eingestellt werden (Abb. 47.1).

{ EINBETTEN  
Word.Picture.8 }

**Abb. 47.1**

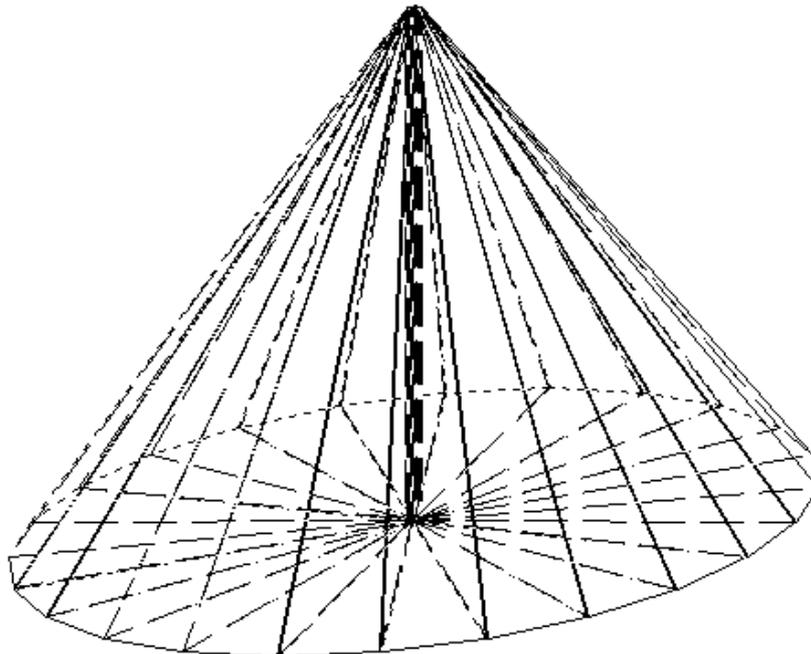
Je nach Wahl der Facettenanzahl  $n$  erhält man eine  $n$ -seitige Pyramide (Abb. 47.2,  $n = 4$ : quadratische Pyramide );

{SEITE }



**Abb. 47.2**

für die Höchstzahl an Facetten ergibt sich näherungsweise einen Kegel (Abb. 47.3).



**Abb. 47.3**

Durch Verziehen des Rotationsprofils kann die Entstehung des Rotationskörpers demonstriert werden (Abb. 47.4).

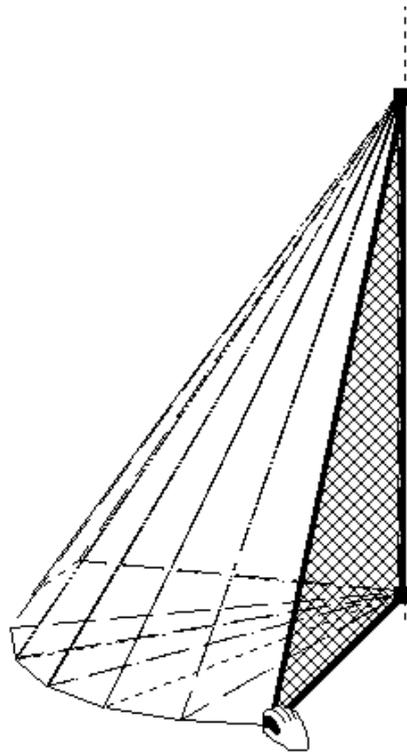


Abb. 47.4

### 2.13 Verschiedene Arten von Kegelschnitten

Eine zur Grundfläche parallele Ebene schneidet den Kegel in einen Kreis (Abb. 48.1).

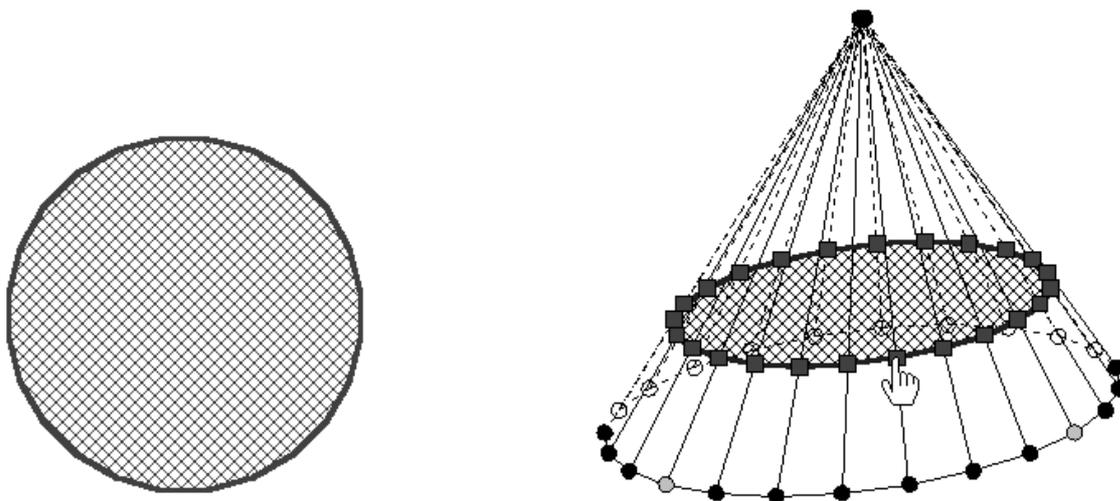
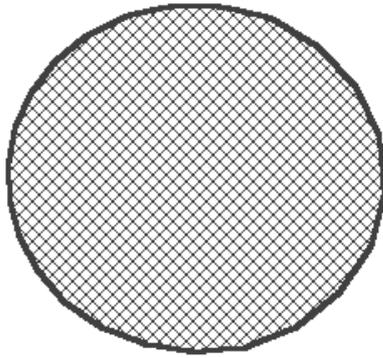
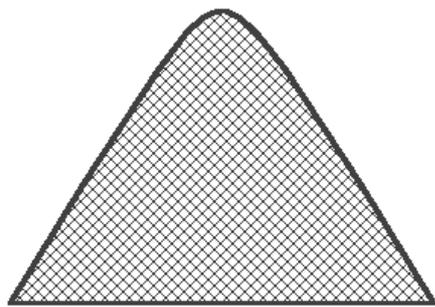
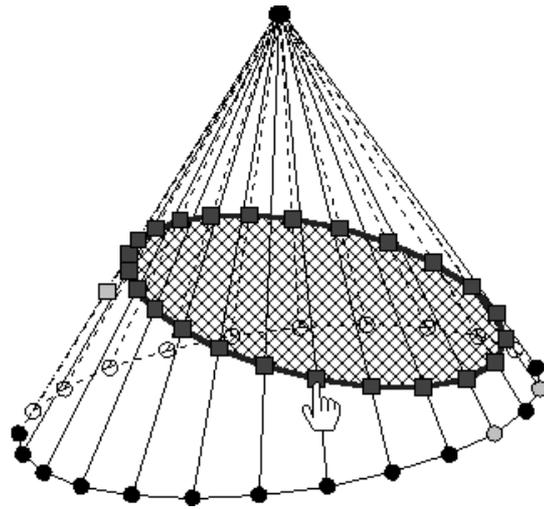


Abb. 48.1

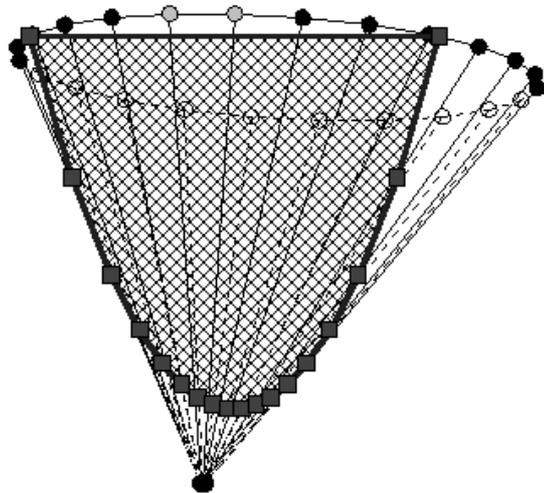
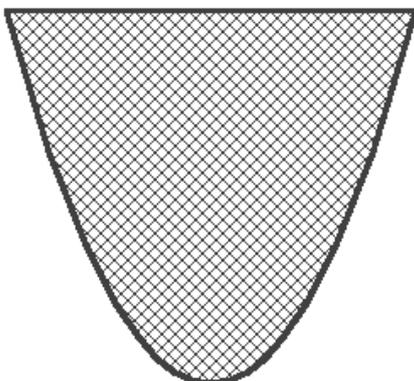
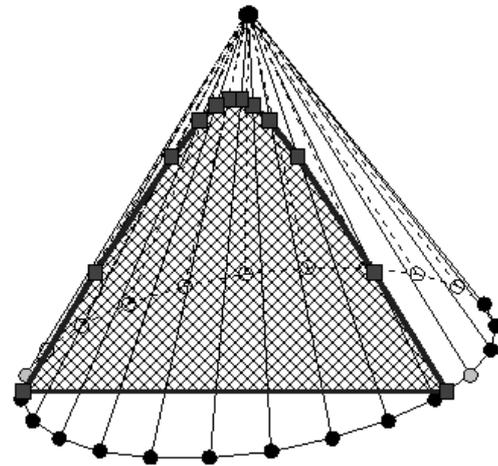
Je nachdem der Winkel zwischen Schnittfläche und Grundfläche kleiner, größer oder gleich dem Winkel zwischen Mantellinie und Grundfläche schneidet die Schnittfläche den Kegel in einer Ellipse (Abb. 48.2),



**Abb. 48.2**  
einer Hyperbel (Abb. 48.3),

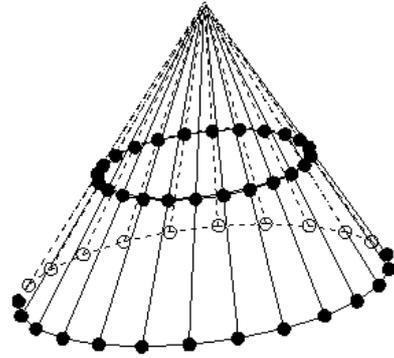
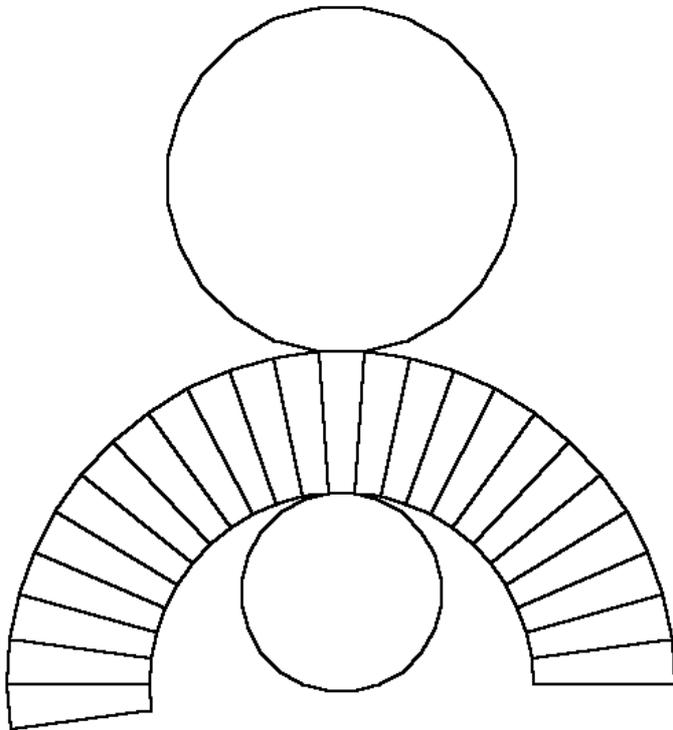


**Abb. 48.3**  
einer Parabel (Abb. 48.4).



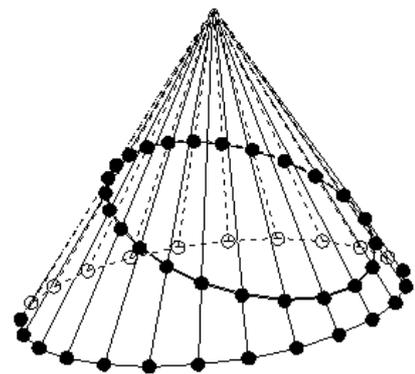
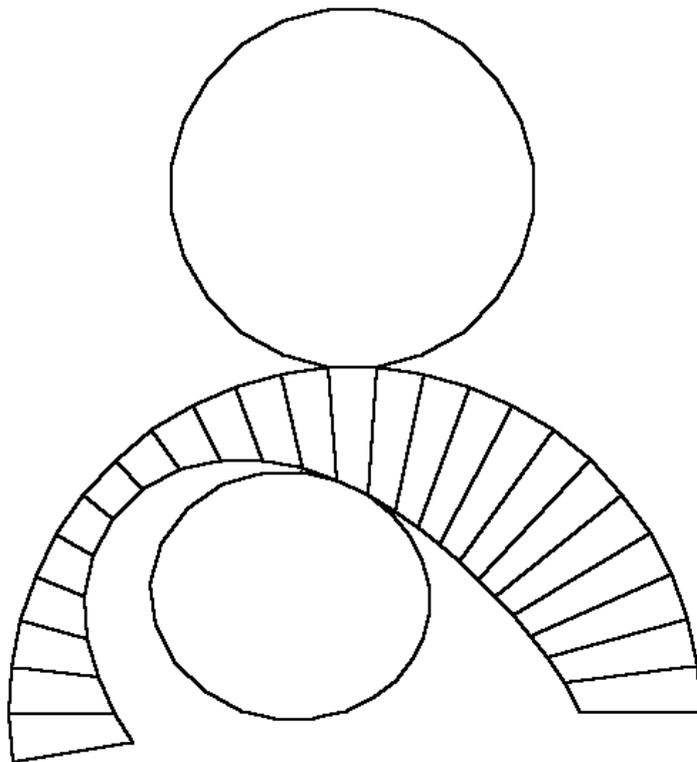
**Abb. 48.4**  
Mit den entsprechenden Werkzeugen lassen sich die betreffenden Winkel messen.

Wir führen nun alle Schnitte längs der genannten Schnittflächen aus und stellen die Netze der betreffenden Schnittkörper dar: Kegelstumpf mit kreisförmiger Grundfläche (Abb. 49.1),



**Abb. 49.1**

Kegelstumpf mit elliptischer Deckfläche (Abb. 49.2a)



**Abb. 49.2a**

und Kegel mit elliptischer Grundfläche (Abb. 49.2b),

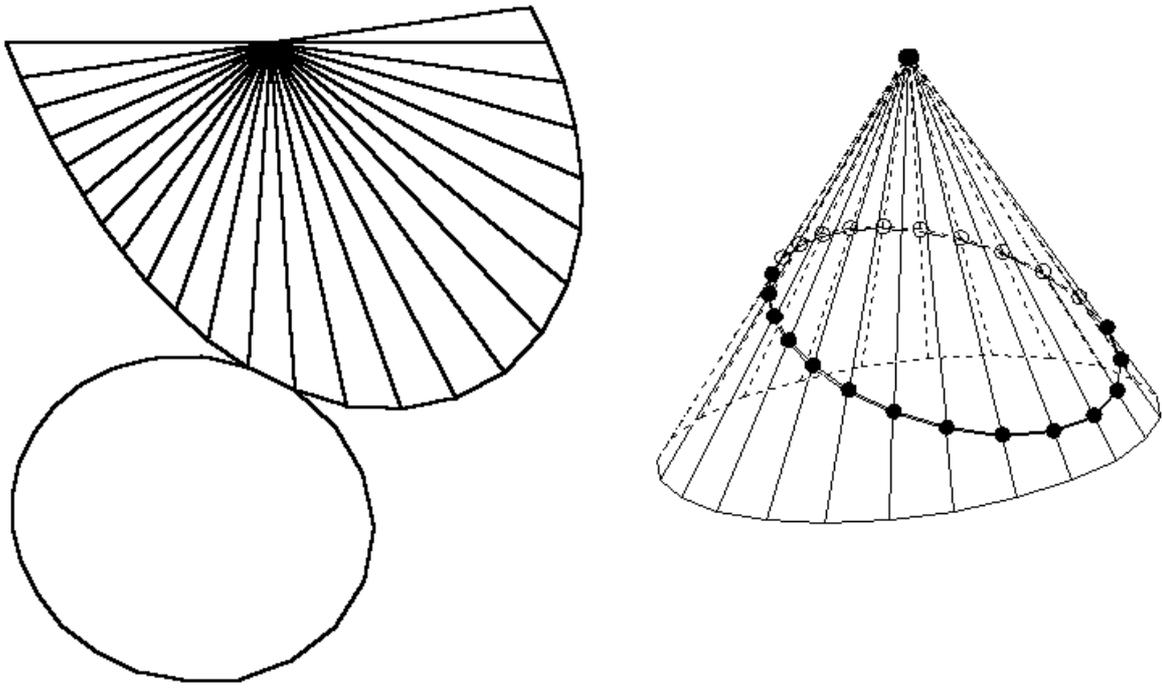


Abb. 49.2b

Kegelabschnitte mit jeweils hyperbelförmiger Schnittfläche (Abb. 49.3a/b).

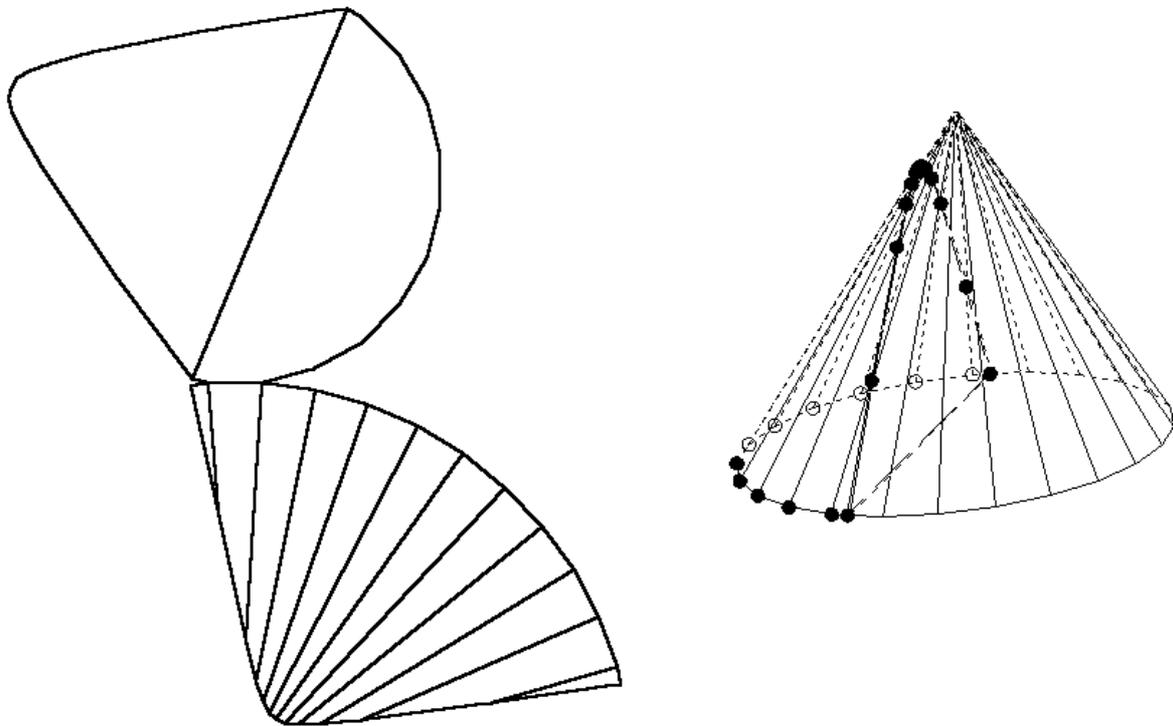


Abb. 49.3a

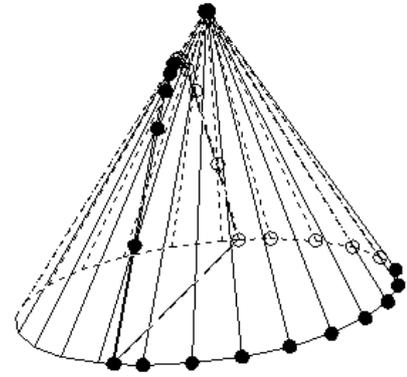
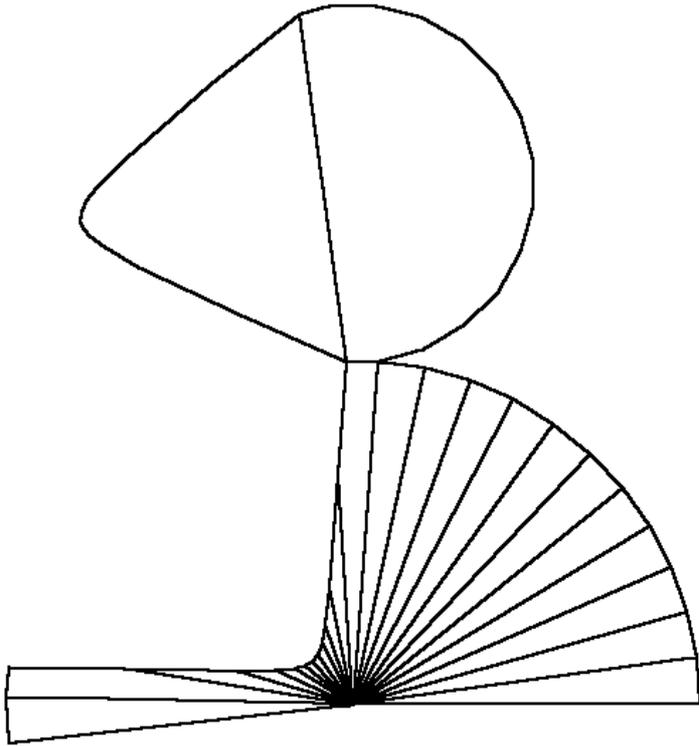


Abb. 49.3b

Kegelabschnitte mit jeweils parabelförmiger Schnittfläche (Abb. 49.4a/b).

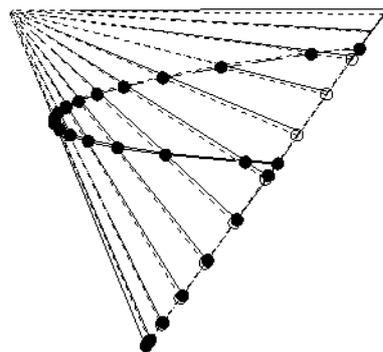
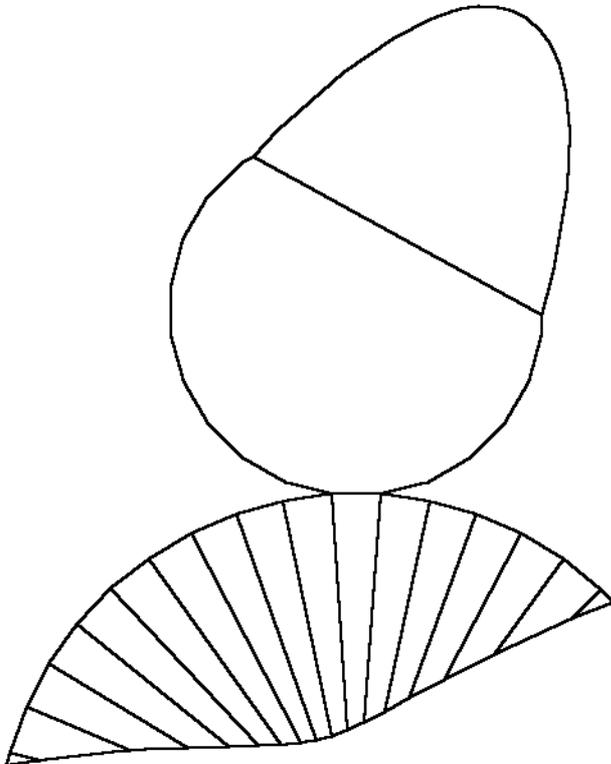


Abb. 49.4a

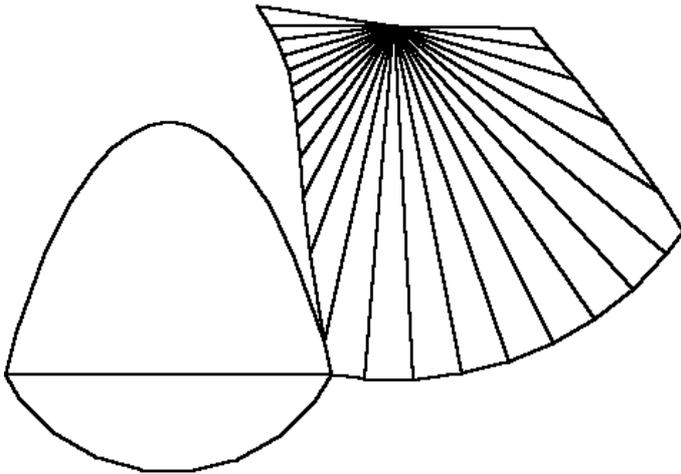
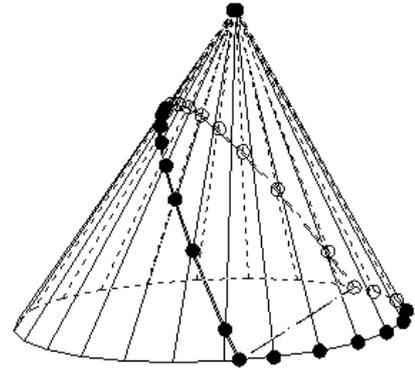


Abb. 49.4b



Die Schnittlinie kann vor Schnittausführung in's Netz eingetragen werden, beispielsweise für den elliptischen Schnitt (Abb.50).

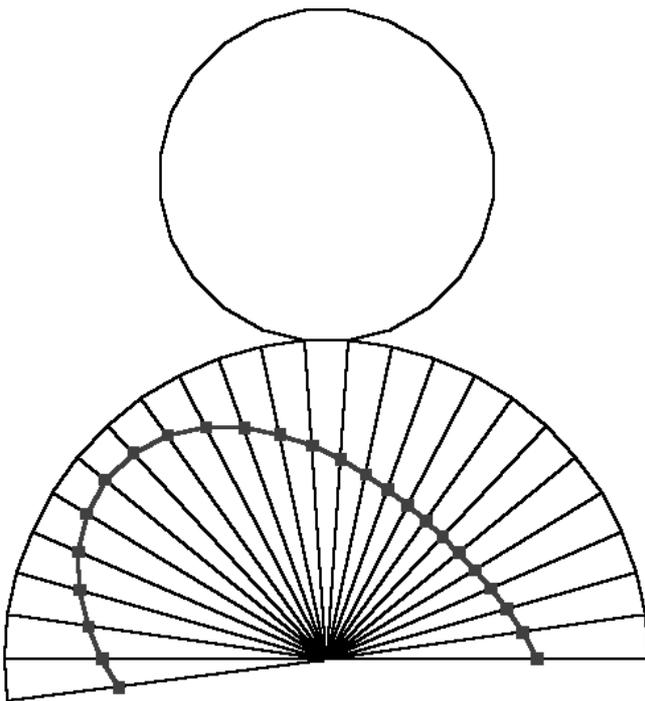
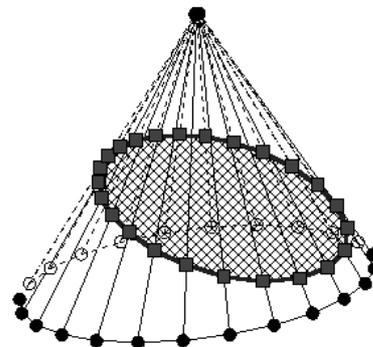


Abb. 50



### 2.14 Vom Kegel zum Zylinder

Der Zylinder lässt sich auffassen als ein Kegel, dessen Spitze in's Unendliche verzogen worden ist (Abb.51.1/2).

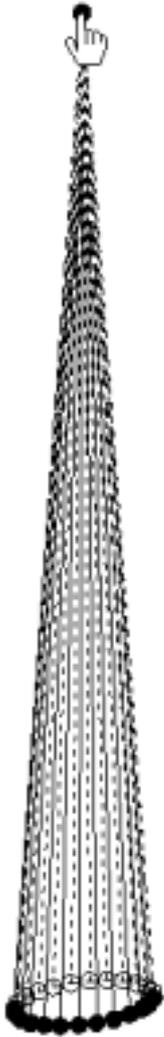


Abb.51.1

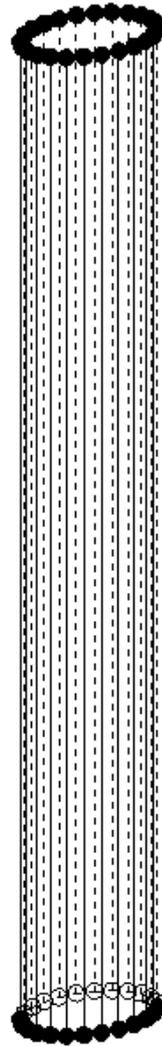


Abb. 51.2

Das Netz des geraden Kreiszyinders (Abb.52.1)

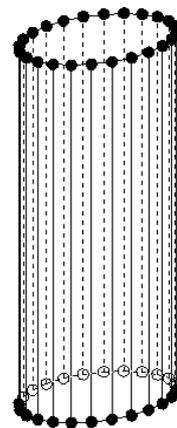
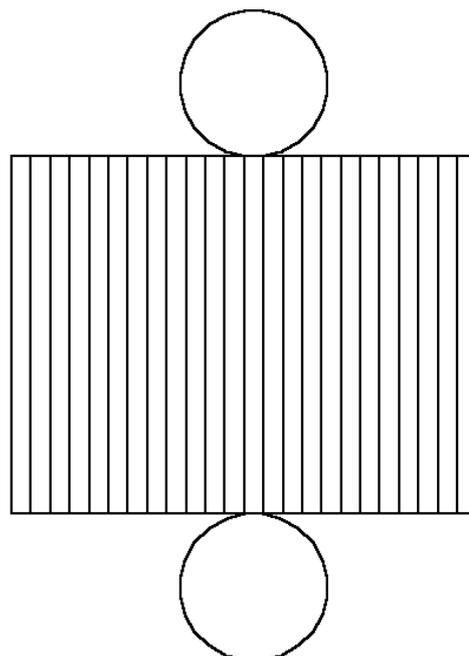
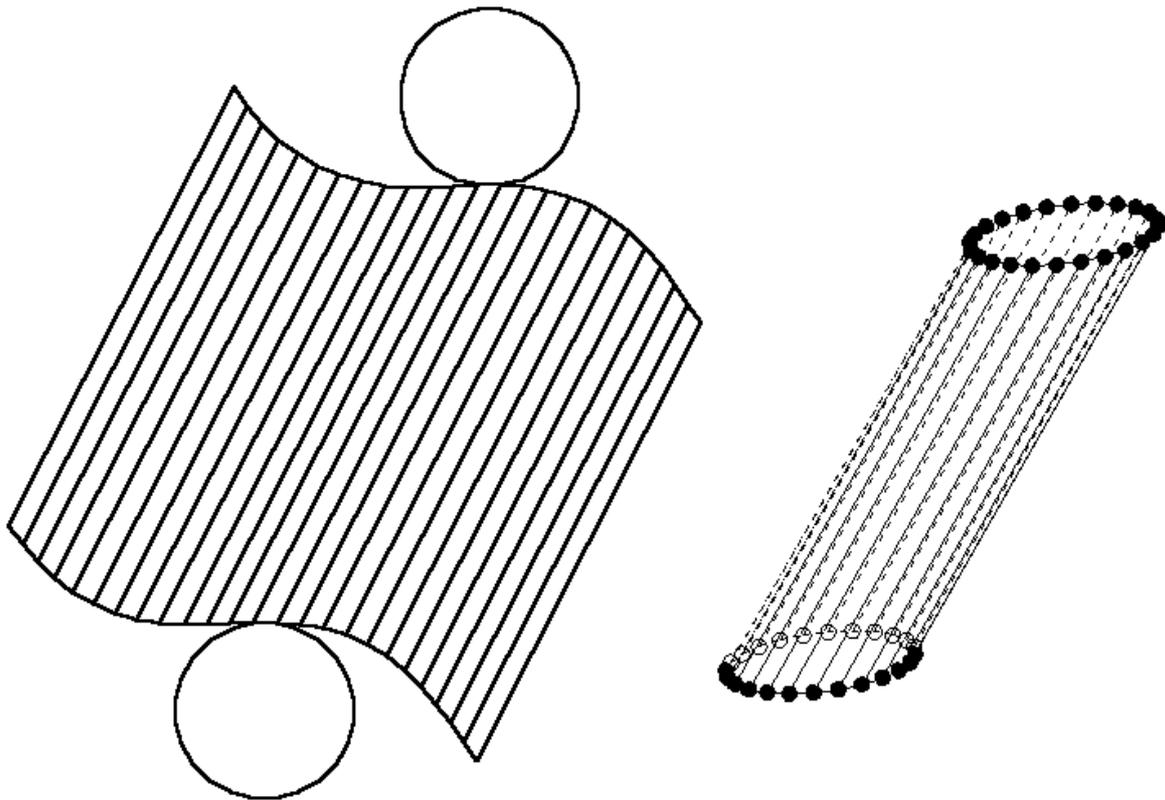


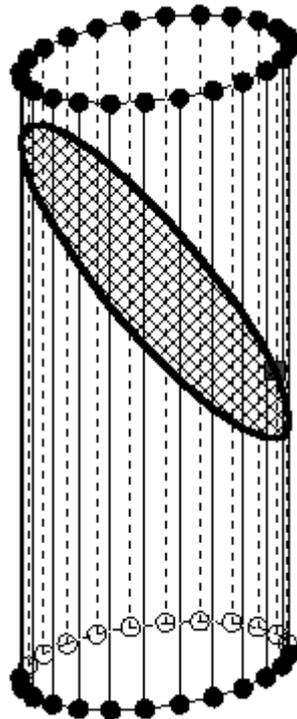
Abb. 52.1

geht über in das dynamische wirkende Netz des schiefen Kreiszyllinders (Abb. 52.2)



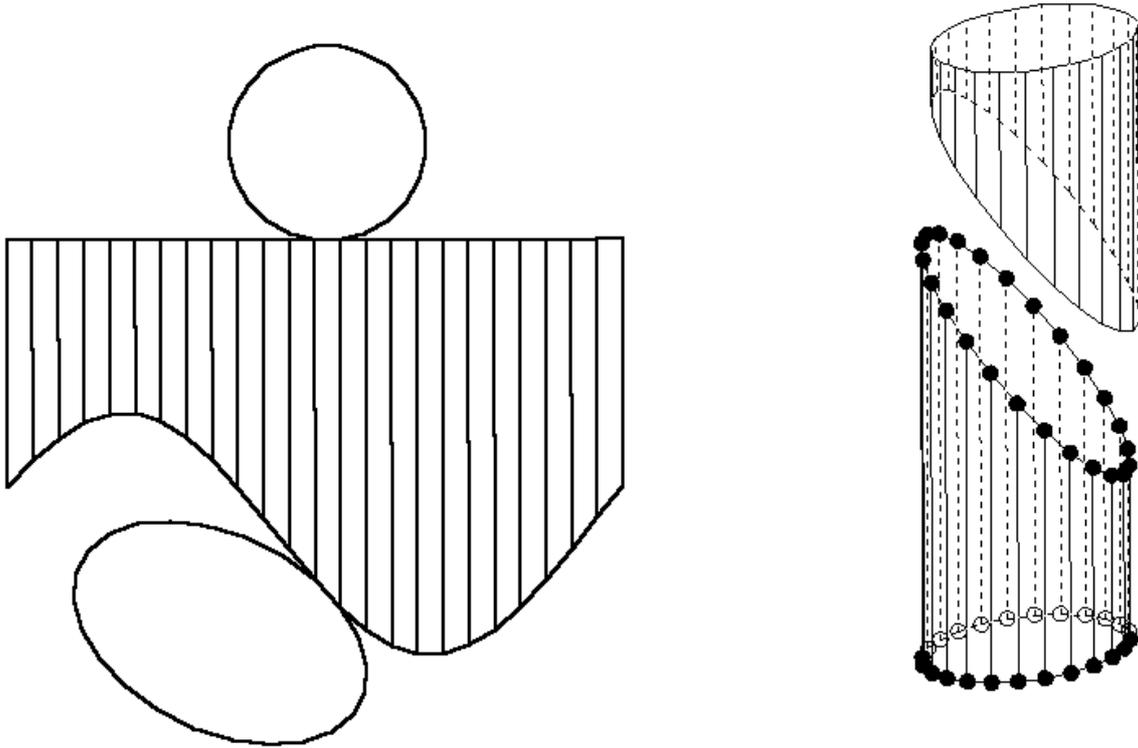
**Abb. 52.2**

Schneiden wir die „zylindrische Wurst“ oder Walze mit einem (ebenen) Schnitt (Abb. 53.1),



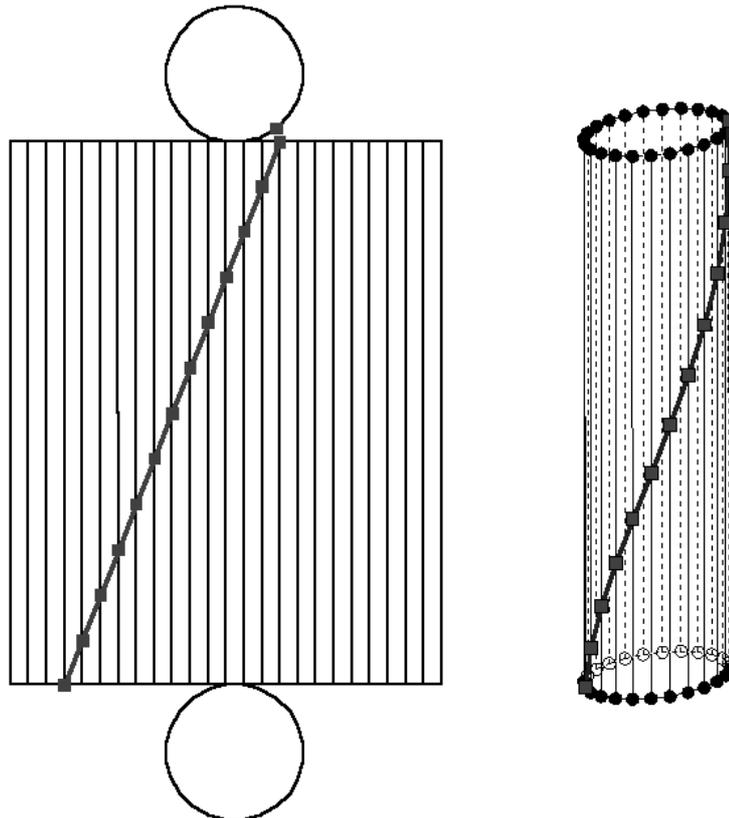
**Abb. 53.1**

so erhalten wir einen elliptischen Schnitt mit Schnittkörpern, die eine entsprechende "Pelle" haben (Abb. 53.2).



**Abb. 53.2**

Eine Schlingpflanze schlingt sich ökonomisch um einen zylindrischen Stamm, nämlich auf kürzestem Wege (Abb. 54);



**Abb. 54**

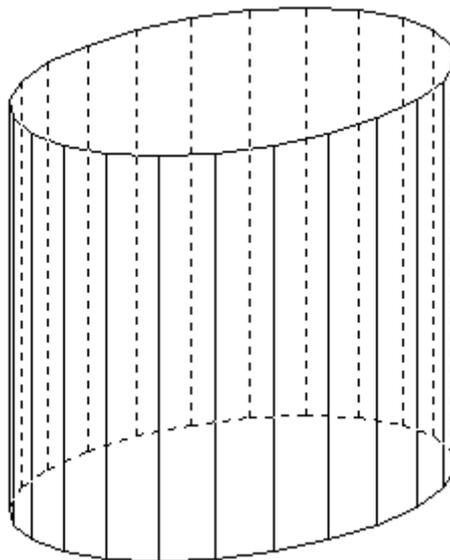
das zeigt im Netz die Strecke als kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte...

Wir schließen unseren Ausflug in die KÖRPERGEOMETRIE mit der Konstruktion eines Schnittkörpers (sog. Mehrzweckstöpsel) der durch jedes der drei Löcher der in Abbildung 55



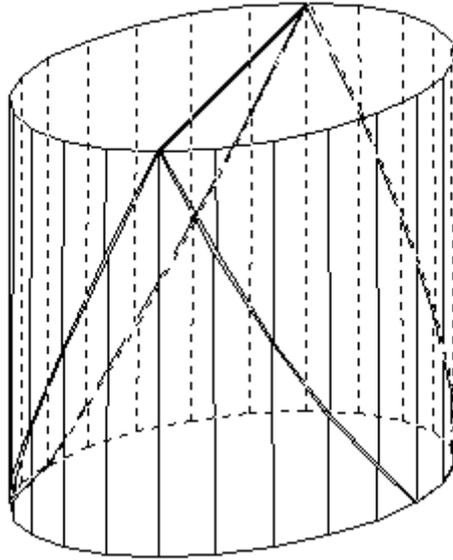
**Abb. 55**

gegebenen Schablone hindurchgeschoben werden kann. Dazu dimensionieren wir einen Zylinder so, dass seine Höhe gleichgroß wie sein Durchmesser ist (Abb. 56.1).



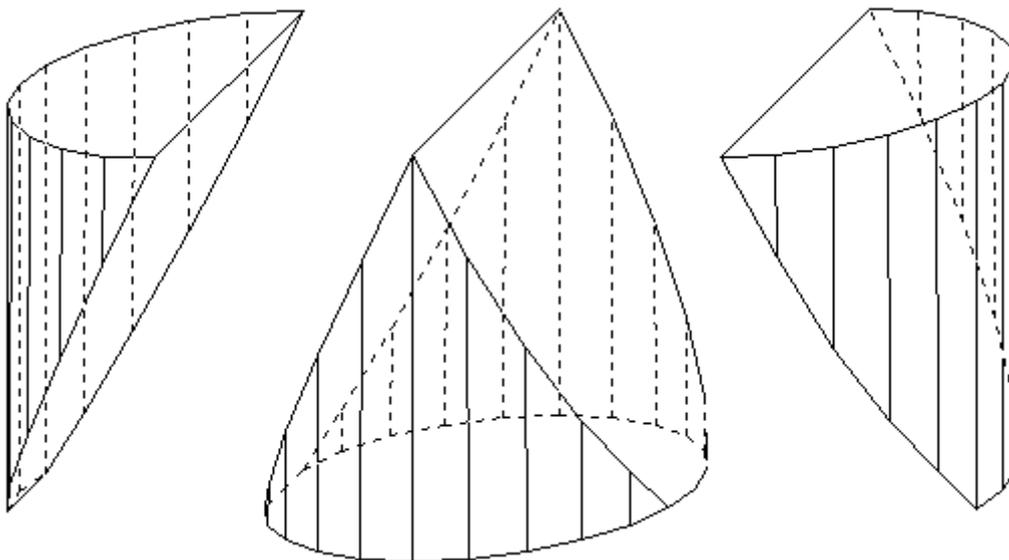
**Abb. 56.1**

Dann legen wir zwei Schnitte, jeweils gebildet aus zwei Endpunkten einer Diagonalen der Deckfläche und einem der Endpunkte der im rechten Winkel stehenden Diagonalen der Grundfläche (Abb. 56.2);



**Abb. 56.2**

die Separierung der Schnittkörper zeigt die Abbildung 56.3.



**Abb. 56.3**

Mit der Generierung eines Netzes und seinem Ausdruck machen wir uns den Mehrzweckstöpsel taktile zugänglich (Abb. 56.4)

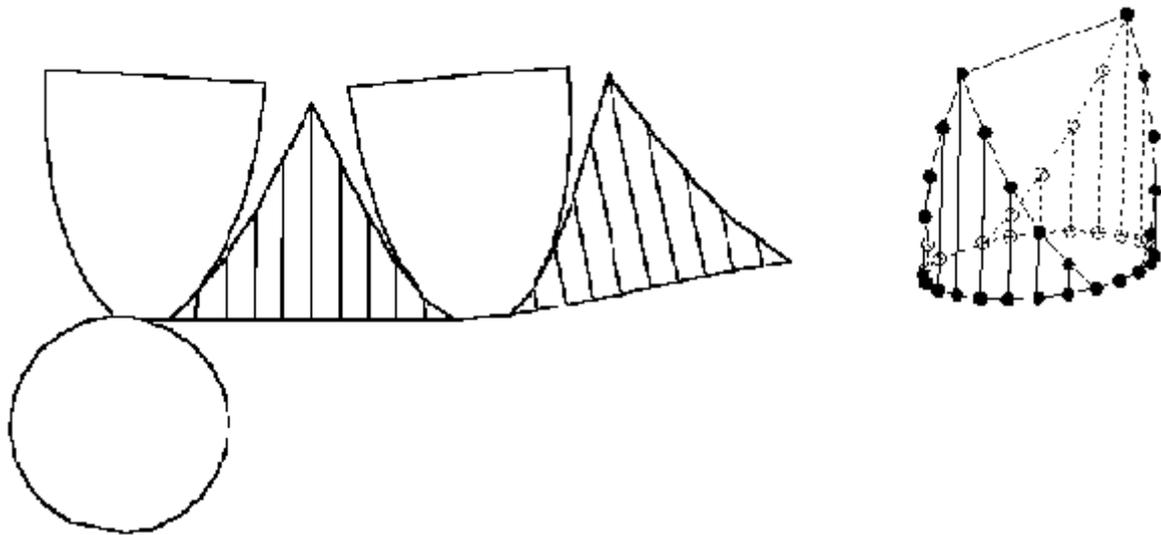


Abb. 56.4

Im Dreitafelbild des gesuchten Körpers ist zu erkennen, dass dieser die gewünschten Eigenschaften hat (Abb. 56.5).

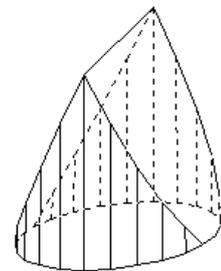
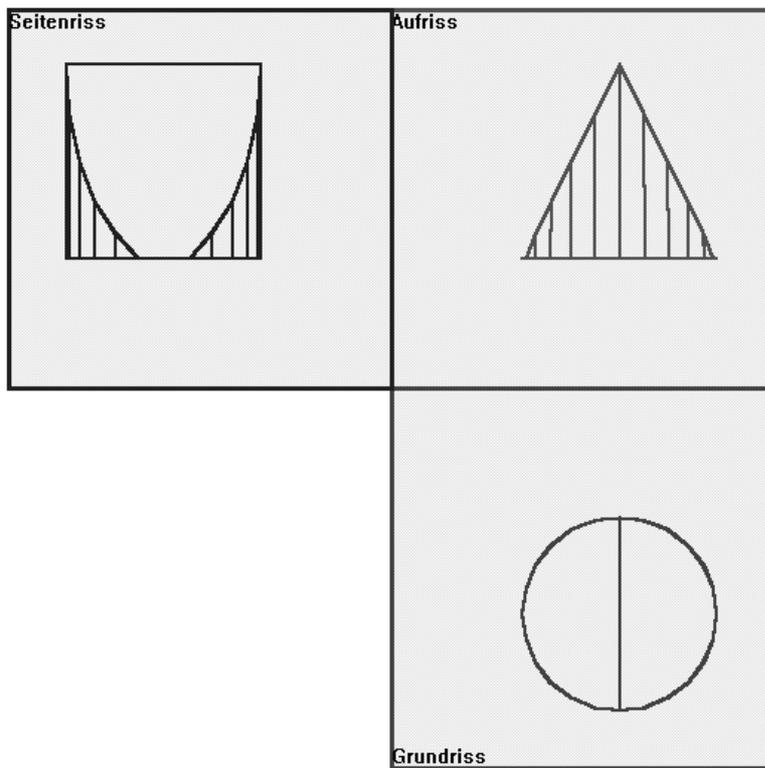


Abb. 56.5

### 3 Abschließende Bemerkungen

**Bemerkung 1:** Bei unserer Tour sind wir nicht auf das Zusammenspiel der drei medienspezifischen Darstellungsweisen (Papier-Bleistift- bzw. Print-Medien-Darstellung, materiale Darstellung und Bildschirmdarstellung von Körpern) eingegangen. Die Leistungsfähigkeit der herkömmlichen Körperdarstellung ist aber im Vergleich mit der Bildschirmdarstellung bei zunehmender figuraler Komplexität ziemlich beschränkt. Von der Bildschirmdarstellung kann durch entsprechendes Ausdrucken zur print-medialen und materialen Darstellung übergehen. - Das Verständnis für den Übergang zur Bildschirmdarstellung von Körpern setzt das dreidimensionale kartesische Koordinatensystem und die Kenntnis der Koordinaten der Körperecken voraus; dann erst kann ein Körper für die KÖRPERGEOMETRIE computerisiert werden.

**Bemerkung 2:** Natürlich ist KÖRPERGEOMETRIE nicht für die Lösung aller (offenen) raumgeometrischen Aufgaben geeignet. So ist z.B. das Entdecken aller konvexen Polyeder, deren Oberfläche aus gleichseitigen Dreiecken und Quadraten besteht, am besten mit dafür geeigneten Materialien zu realisieren. Eine Auswahl offener raumgeometrischer Aufgaben, die sich mit KÖRPERGEOMETRIE gut lösen lassen, befindet sich in Schumann (1998). Ein Ergebnisbericht über Unterrichtsexperimente zum computerunterstützten Lösen offener raumgeometrischer Aufgaben kann nachgelesen werden in Schumann (1999).

**Bemerkung 3:** KÖRPERGEOMETRIE ist kein Solid Modeller, d.h. mit ihm können keine Booleschen Operationen mit Körpern ausgeführt werden, wie es in 3D-CAD-Systemen üblich ist. So ist eine Zusammensetzung von Körpern in KÖRPERGEOMETRIE kein neues Objekt. - KÖRPERGEOMETRIE hat innerhalb einer Option kein "Undo", was sich nachteilig bei notwendigen Korrekturen auswirkt. - Das Konzept des Zug-Modus ist in der jetzigen Version nur teilweise realisiert: Konstruktive Ergänzungen werden im Allgemeinen beim Verziehen gelöscht (Abhilfe: Arbeiten in mehreren Fenstern).

**Bemerkung 4:** Wie bei jedem Computerwerkzeug, so ist auch die Benutzung von KÖRPERGEOMETRIE gewöhnungsbedürftig. Es kann - wie üblich - bei den User-Anfängern zu einer Überlagerung von Benutzungsproblemen mit dem eigentlich zu lösenden Problem kommen.

**Bemerkung 5:** Eines der ersten Computerwerkzeuge für den Raumgeometrie-Unterricht in der Sekundarstufe I, das DOS-Programm SCHNITTE (Doorman/Schumann, 1995), erfüllt heute nicht mehr die Standards zeitgemäßer Software-Ergonomie; außerdem hat es einen nur auf das Schneiden von Polyedern ausgerichteten Leistungsumfang.

**Bemerkung 6:** Die Entwicklung von Software für den Raumgeometrieunterricht, in der der Schüler/die Schülerin in einem virtuellen Raum agiert, steht erst an ihrem Anfang (Schumann 1995). - KÖRPERGEOMETRIE ist ein erstes prototypisches synthetisch-geometrisches Windowswerkzeug dieser Unterrichtssoftware-Entwicklungslinie.

#### 4 Literatur

Bauer, H.: Freiberger, U.; Kühlewind, G., Schumann, H.: KÖRPERGEOMETRIE (Software mit Manual). Berlin: Cornelsen, 1999.

Doorman, M.; Schumann, H.: SCHNITTE (Software). Bonn: Dümmlers, 1995.

Schumann, H.: Computerunterstütztes Lösen offener raumgeometrischer Aufgaben. In: Meissner, H. et al. (Hrsg.): Proceedings of the International Conference "Creativity and Mathematics Education" (July 15-19, 1999 in Muenster), S. 266-269.

Schumann, H.: Körperschnitte – Raumgeometrie interaktiv mit dem Computer. Bonn: Dümmlers, 1995.

Schumann, H.: Raumgeometrie – Computerwerkzeuge für den Raumgeometrie-Unterricht in der Sekundarstufe I. In: LOG IN (Informatische Bildung und Computer in der Schule), Jahrg. 18, 1998, Heft 6, S. 44-48.