

## **Computergenerierung von Körperpuzzles im Raumgeometrie-Unterricht**

Die Teile sind mehr als das Ganze.

### **1 Einleitung**

Zu den Lernspielformen des Geometrieunterrichts gehören die geometrischen Puzzles: Ein Satz von 'ebener' bzw. räumlicher Teilfiguren ist in materialer Form vorgegeben und die Schüler/Schülerinnen sollen die Teilfiguren zu einer mehr oder weniger bekannten „Gestalt“ zusammensetzen. Wegen ihres Aufforderungscharakters, der darin besteht, aus Teilen ein Ganzes zu machen, ist das Lösen von Puzzle-Aufgaben, auch von solchen außergeometrischer Art, sehr motivierend.

Weniger üblich sind Puzzle-Aufgaben als offene Aufgaben, bei der zu einer Zielform unterschiedliche Zusammensetzungen oder sogar möglichst viele verschiedene, selbst zu entdeckende Zielformen durch Zusammensetzen der Teile herausgefunden werden sollen. Diese Art von Aufgaben fördert das divergente Denken, also kreatives Verhalten - oder genauer: die Bearbeitung solcher Aufgaben stärkt die Dispositionsfähigkeit für das künftige Lösen derartiger offener Aufgaben.

Anspruchsvoller sind Aufgaben, die in der Kreation eines Puzzles bestehen: Die Schüler und Schülerinnen sollen z.B. aus Steckwürfeln einander inkongruente Würfelmehrlinge so zusammenbauen, dass sich mit diesen ein Würfel zusammensetzen lässt. Eine Lösung dieser Aufgabe sind die bekannten Soma-Würfelfiguren, die zu einem  $3 \times 3 \times 3$ -Würfel zusammengesetzt werden können.

Bei der Entwicklung von raumgeometrischen Puzzles im Geometrieunterricht stößt man aber sehr schnell an die Grenzen dessen, was material machbar ist: Der Vorrat an material verfügbaren elementaren Bausteinformen zum Zusammenbauen von Puzzleteilen ist sehr beschränkt und auch das Zerlegen von materialen Körpermodellen in Puzzleteile ist schon vom unterrichtsorganisatorischen Aufwand her kaum zu realisieren.

Die Puzzle-Entwicklung durch Körperzerlegung können wir aber heute durch Benutzung geeigneter Computerwerkzeuge, die für den Raumgeometrie-Unterricht geschaffen worden sind, im Raumgeometrie-Unterricht realisieren (Schumann 1995/1998). Das Computerwerkzeug muss dabei das mehrfache Schneiden eines

Körpers, das Verwalten und „Handhaben“ seiner Teile und ihre gegenständliche Visualisierung gestatten. Außerdem muss der Körper und seine Teilkörper durch den Ausdruck ihrer Netze material verfügbar gemacht werden können (was natürlich nur für „abwickelbare“ Körper, also nicht für die Kugel und ihre Teile geht). Wir gewinnen so zwei Repräsentationsformen eines Körperpuzzles: die Bildschirmdarstellung (bei der der Schüler/die Schülerin die vermischten Puzzleteile mit Mausbedienung wieder zum ganzen Körper zusammenfügen muss) und das materiale Puzzle (das aus Flächenmodellen besteht, die aus den Netzausdrucken hergestellt worden sind und bei dessen Lösung die Schwerkraft interveniert). Die Puzzleteile können dabei paarweise kongruente Körper oder, im primitivsten Fall, Teilkörper sein, die durch beliebiges Schneiden entstanden sind.

Einige Tätigkeiten der Schüler und Schülerinnen bei der Entwicklung solcher Körperpuzzles:

Sie entwickeln aus einem vorgegebenen Körper im Tandem am Bildschirm Puzzles; sie erklären am Demonstrationscomputer ihre Ergebnisse, d.h., wie sie auf ihr Puzzle gekommen sind und von welcher Art die Teile sind. Sie stellen ihrem Partner eine Bildschirm-Puzzle-Aufgabe; sie fertigen durch Netzausdrucke entsprechende Ausschneidebögen für die Puzzleteile; sie beschreiben und berechnen die Teilkörper und produzieren die entsprechenden materialen Puzzleteile als Flächenmodelle (Hausaufgabe).

Außer mit dem bei der Entwicklung von Körperpuzzles verbundenen „Kreativitätstraining“ wird die Raumvorstellungsfähigkeit (hier die Fähigkeit der Visualisierung und die Fähigkeit räumliche Beziehungen zu erkennen) und das formkundliche Beschreiben sowie das Berechnen von Körpern geübt.

Anhand des Computerwerkzeugs KÖRPERGEOMETRIE (Bauer et al. 1999) zeigen wir am Beispiel des regulären Tetraeders, wie Körperpuzzles entwickelt werden können.

## **2 Computergenerierung von Puzzles aus dem regelmäßigen Tetraeder**

Wir beginnen mit der Erzeugung eines Puzzles aus einem regulären Tetraeder der Kantenlänge  $a$ , z.B.  $a = 10$  cm (Abb. 1), das wir z.B. durch einen beliebigen horizontalen und zwei vertikale zueinander senkrecht stehende Schnitte erhalten (Abb. 2.1); das nach einem Auseinanderziehen der Teile wie in Abbildung 2.2 aussieht. Durch Vermischen der Schnittkörper ergibt sich ein Bildschirm-Puzzle (Abb.2.3), das durch Parallelverschieben seiner Teile wieder zu einem regelmäßigen Tetraeder zusammengefügt werden kann. Dazu sind zueinander

{SEITE }

passende Schnittflächen und für das regelmäßige Tetraeder charakteristische Teilkörper, wie z.B. Teilkörper, die eine räumliche Ecke bilden, zu identifizieren. Das Bildschirm-Puzzle kann dabei auch als Szene von Schnittkörpern gedreht werden und so z.B. von hinten betrachtet werden (Abb. 2.4). Natürlich lassen sich automatisch die Netze aller Teilkörper ausgeben (Abb. 2.5); auf diese Weise könnte man die materialisierte Form des Puzzles gewinnen, dessen Teile sich aber viel mühsamer zu einem regelmäßigen Tetraeder zusammensetzen ließen.

{ EMBED Word.Picture.8 }

Abb. 1

{ EMBED Word.Picture.8 }

Abb. 2.1

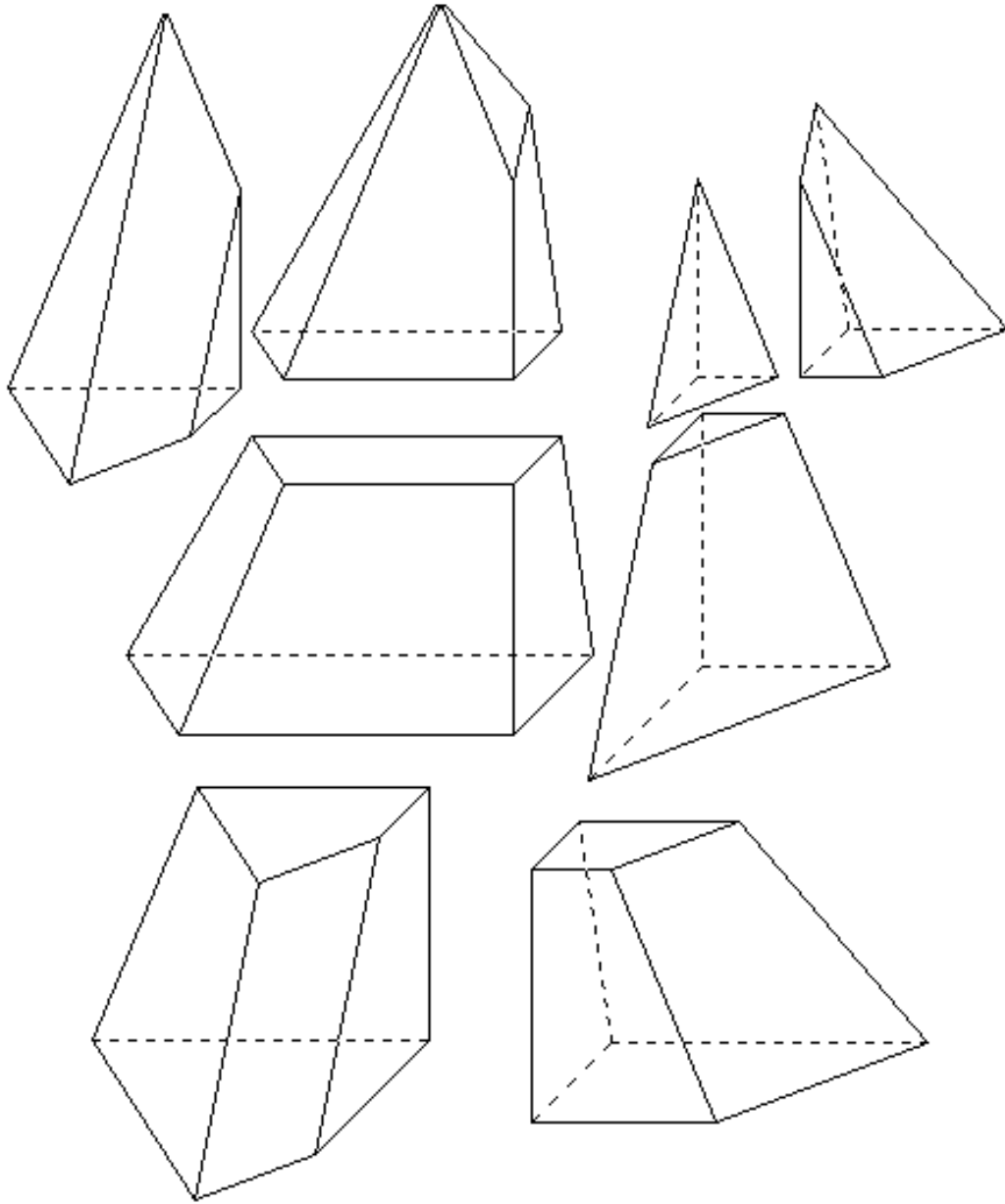


Abb. 2.2

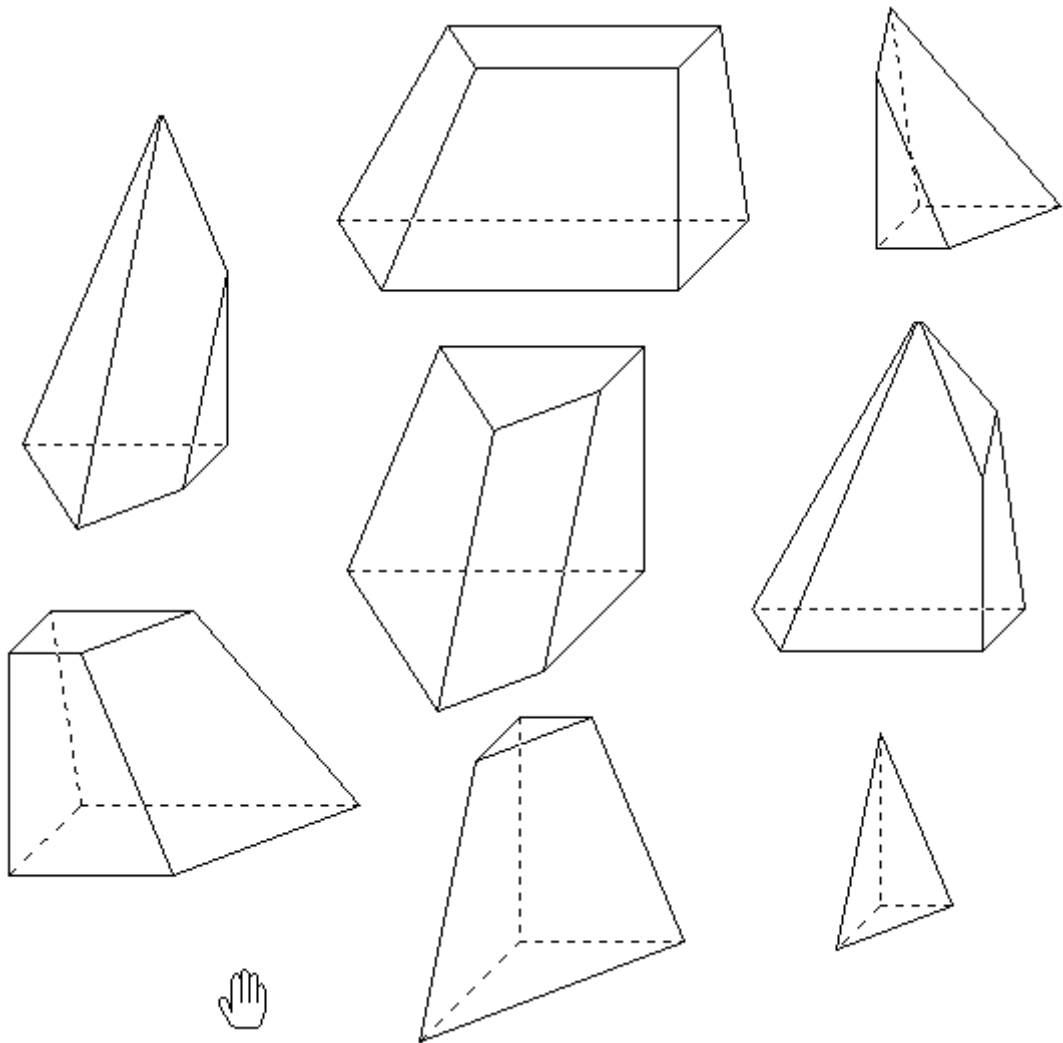


Abb. 2.3

{SEITE }

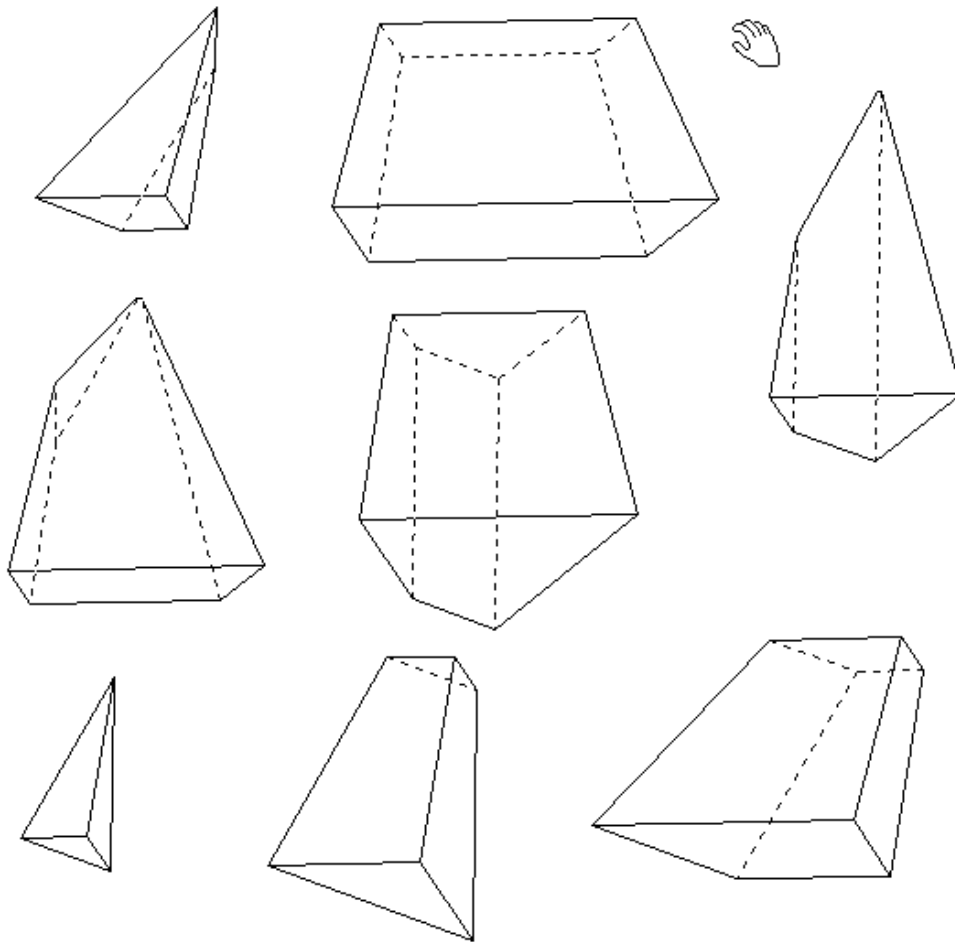


Abb. 2.4

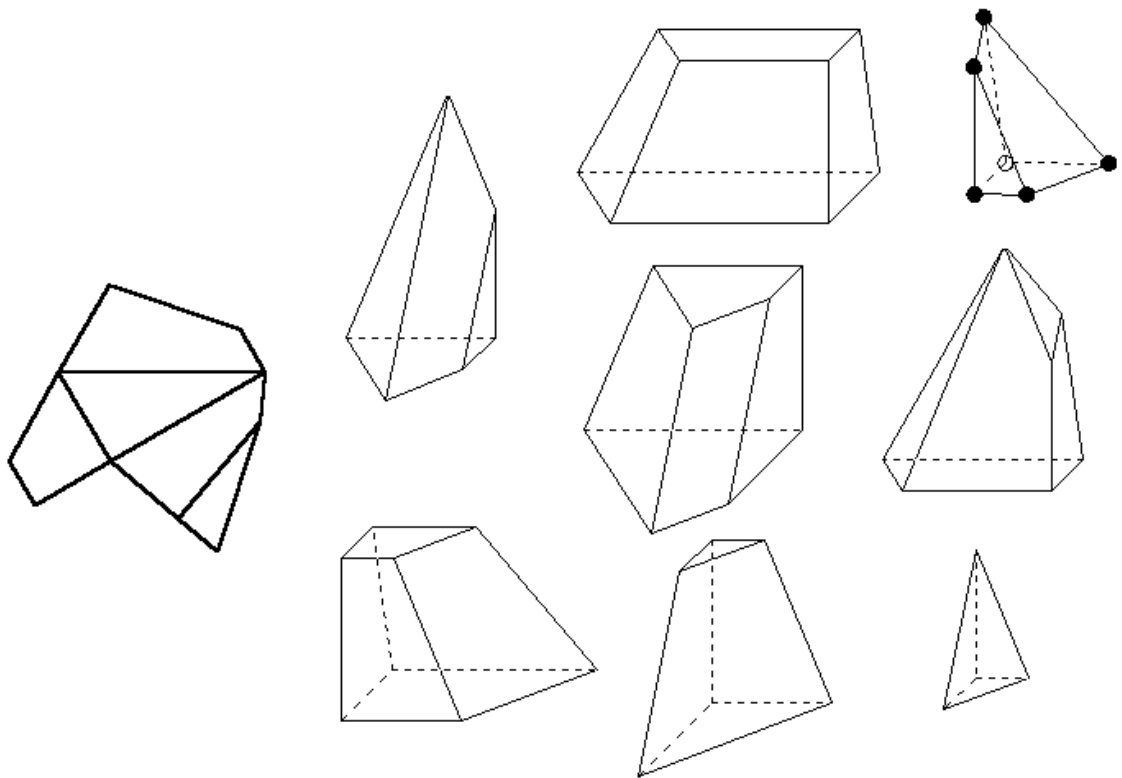


Abb. 2.5

Im folgenden sollen durch systematische Schnittbildung Tetraeder-Puzzles entwickelt werden. Wir beginnen mit körperhalbierenden Schnitten, die durch eine Kante verlaufen (Abb. 3.1). Durch Kombination dreier solcher Schnitte, deren Ebenen senkrecht zur Grundfläche stehen, erhalten wir eine Zerlegung wie in Abbildung 3.2, den Schnittebenen ist die Tetraederhöhe gemein. Eine Explosionsdarstellung zeigt die Abbildung 3.3; die Abbildung 3.4 zeigt wie die Zerlegung von unten aussieht. Das Puzzle (Abb. 3.5) besteht aus 6 kongruenten dreiseitigen Pyramiden, von denen je zwei ebenensymmetrische Paare bilden. Eine der Pyramiden ist in Abbildung 3.6 zu sehen; die dazu ebenensymmetrische hat ein entsprechendes Netz (Abb. 3.7).

Abb. 3.1

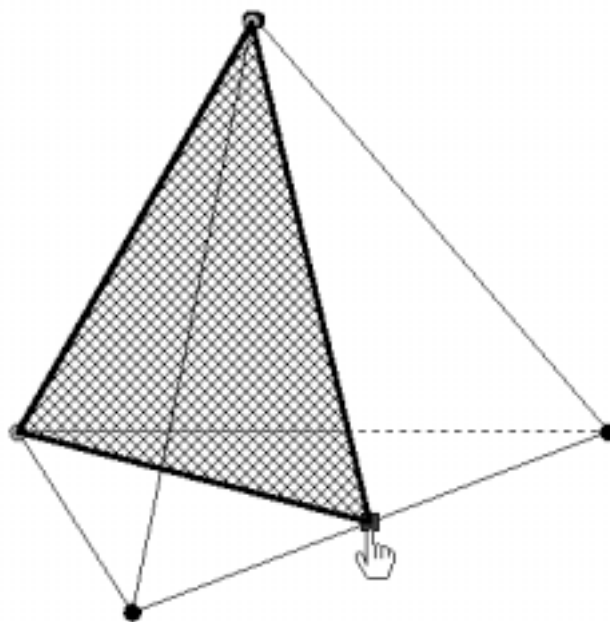
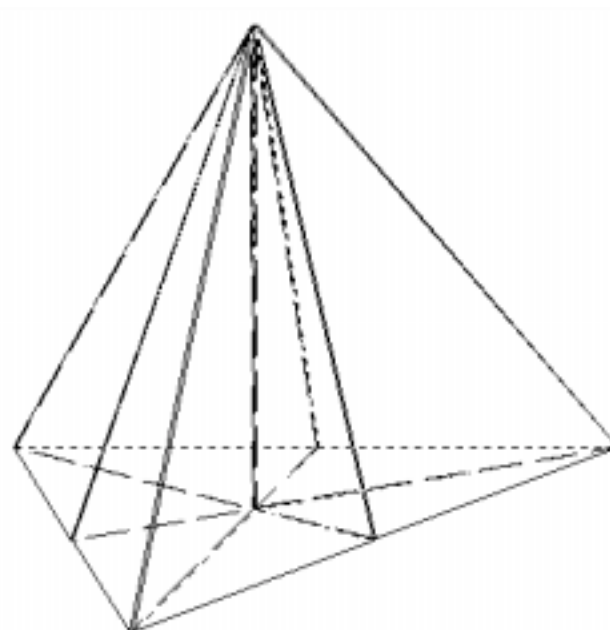


Abb. 3.2



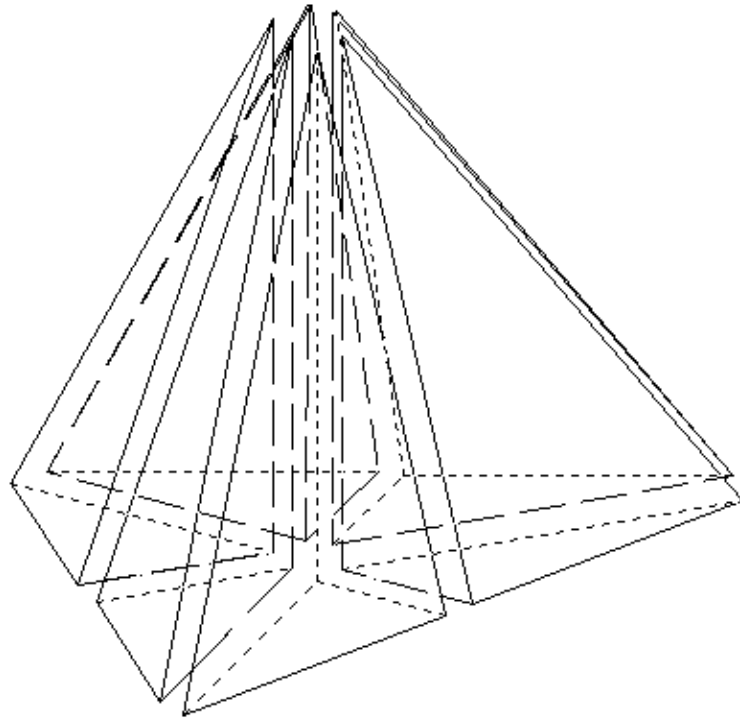


Abb. 3.3

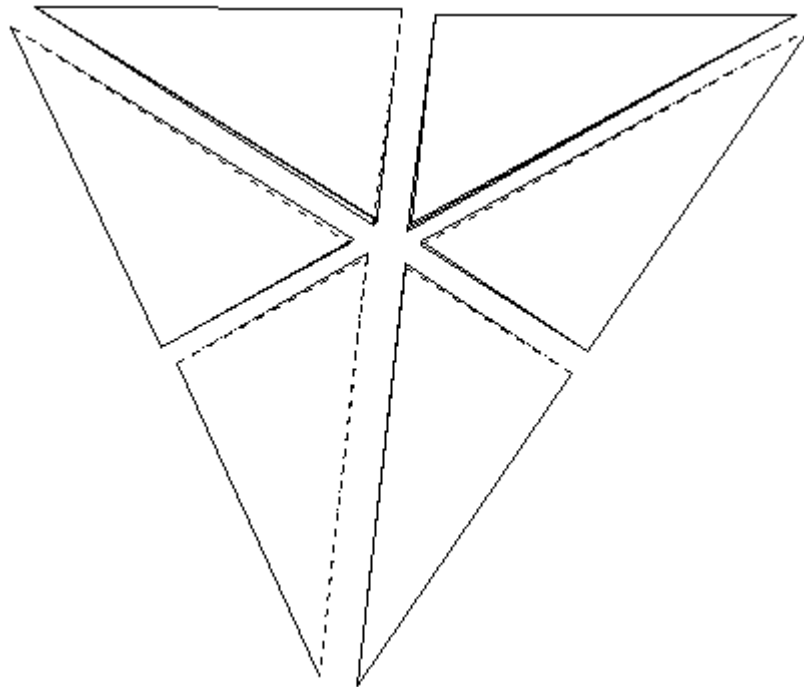


Abb. 3.4



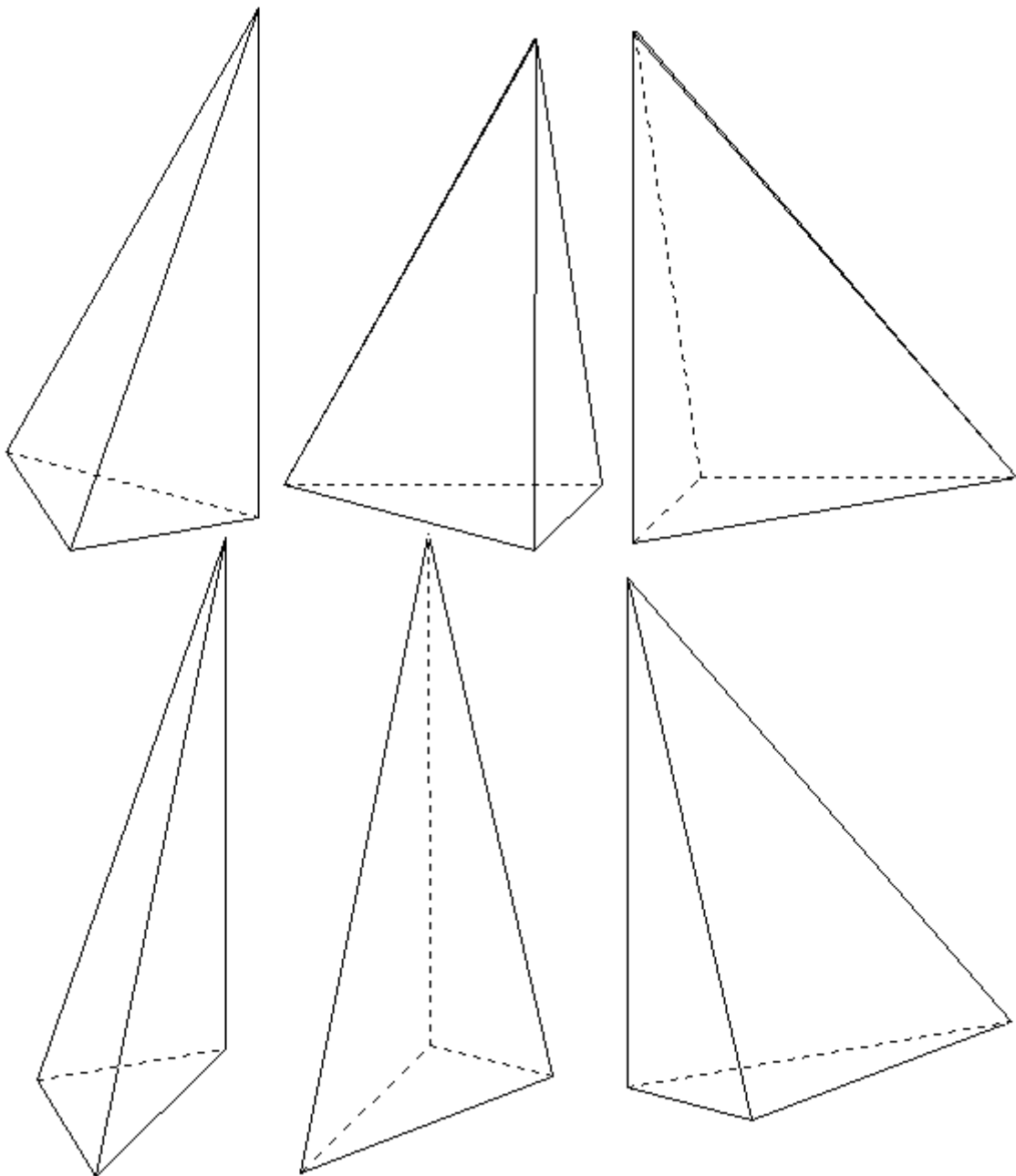
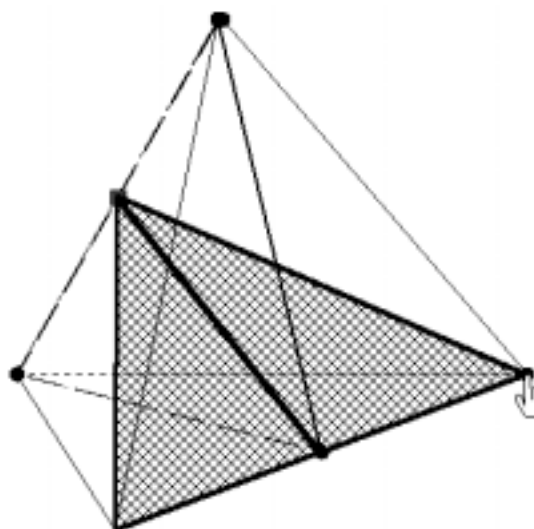


Abb. 3.5

Die Kantenlängen eines der Puzzleteile: { EINBETTEN Equation.3 } (Aufgabe für den Leser: die Längen sind den Strecken im Netz zuzuordnen). Das Bildschirm-puzzle ist besonders einfach zu lösen; obwohl auch andere Flächen der Teilpyramiden als die Schnitt Schwierigkeiten. Wir Tetraederkanten verla traederfläche stehen. entstehen (Abb. 4.1/2 dreiseitigen Teilpyramic ein Netz wie in Abbildu Dreiecke. – Es ist eine

naturale Puzzle keine Schnitte, die durch t auf derselben Te- konkruente Teilkörper der vier besonderen kanten besitzen, liefert grüner rechtwinkliger liches Netz vor seinem



{SEITE }

geistigen Auge aufzufalten. Die Kantenlängen einer solchen Pyramide: {  
EINBETTEN Equation.3 } Das Volumen einer der vier Pyramiden, die je zwei  
ebenensymmetrische Paare bilden, ist gleich dem vierten Teil des  
Tetraedervolumens, also { EINBETTEN Equation.3 }<sup>3</sup>. – Das Puzzle selbst (Abb.  
4.4) ist nicht schwer; es lassen sich noch drei andere konvexe Körper  
zusammensetzen.

Abb. 4.1

{ EINBETTEN Word.Picture.8 }

Abb. 4.2

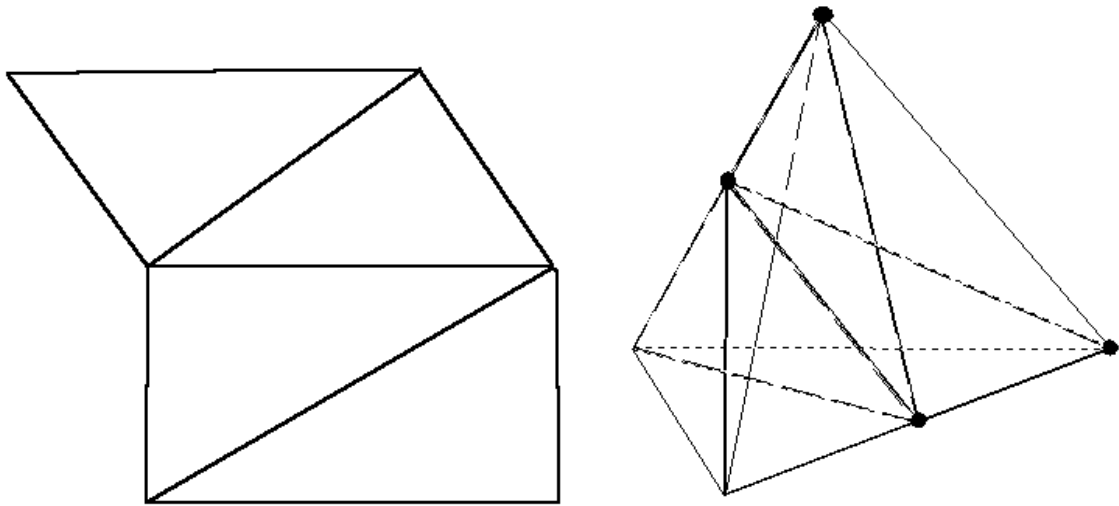


Abb. 4.3

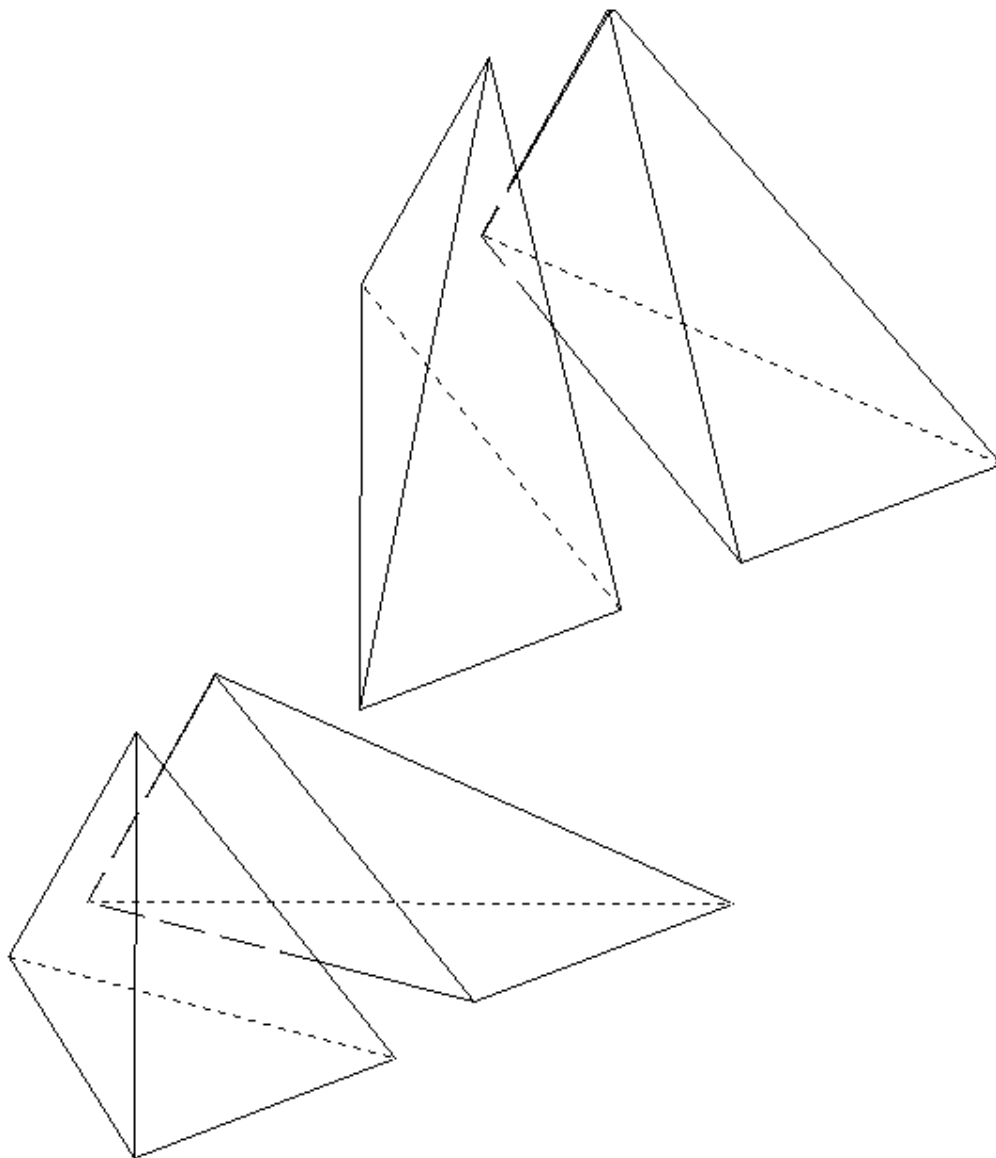


Abb. 4.4

Jetzt verwenden wir halbierenden Schnitte, die durch Kantenmitten gehen (Abb. 5.1). Nach der Schnittausführung und dem Auseinanderziehen der Teile erkennen wir die einander (gleichsinnig) konkruenten Keile (Abb. 5.2), die wir uns durch Drehen der Szene ansehen (Abb. 5.3). Das automatische Abfalten eines der zweifach ebenensymmetrischen Teilkörper liefert ein schönes geraden-symmetrisches Netz (Abb. 5.4). Die Länge der auftretenden Kanten: { EMBED Equation.3 }. Interessanterweise bereitet das Zusammensetzen der materialen Puzzleteile zu einem Tetraeder selbst geometrisch gebildeten Erwachsenen Probleme. Sie setzen die Teile spontan zu einem nichtkonvexen Körper zusammen (Abb. 5.5). Eine Puzzle-Variante erhält man durch Halbieren der Keile wie in Abbildung 6.1. Ein Netz der vier nichtsymmetrischen Keile zeigt die Abbildung 6.2 usw. Dieses Puzzle ist noch schwieriger als das vorausgehende.

{ EMBED Word.Picture.8 }

Abb. 5.1

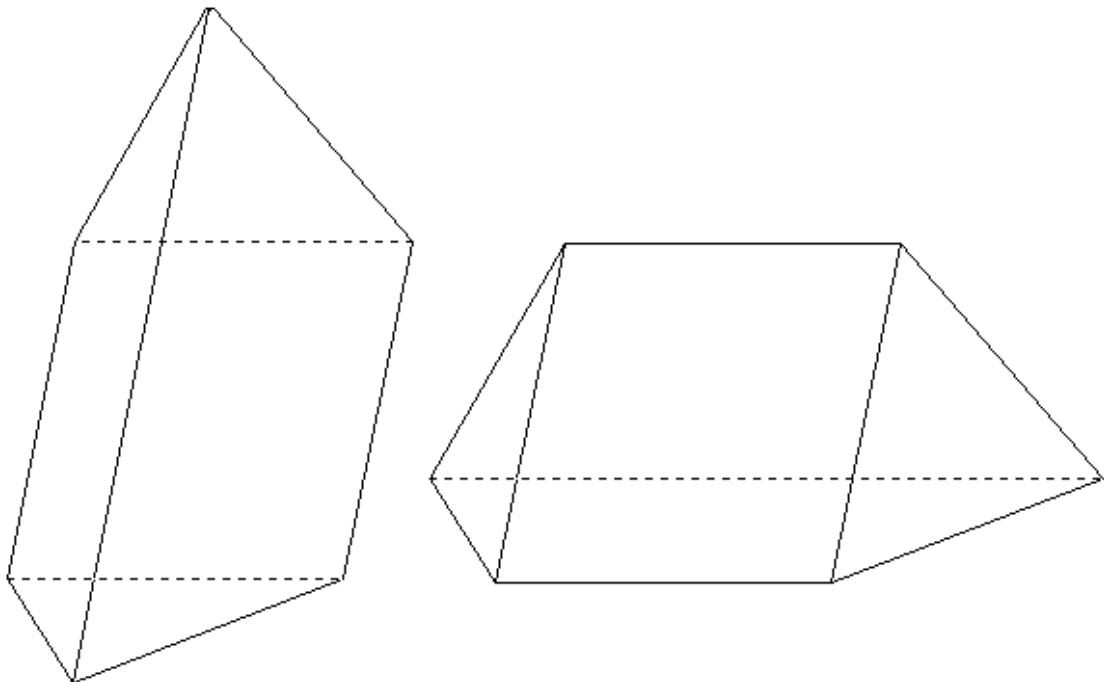


Abb. 5.2

{SEITE }

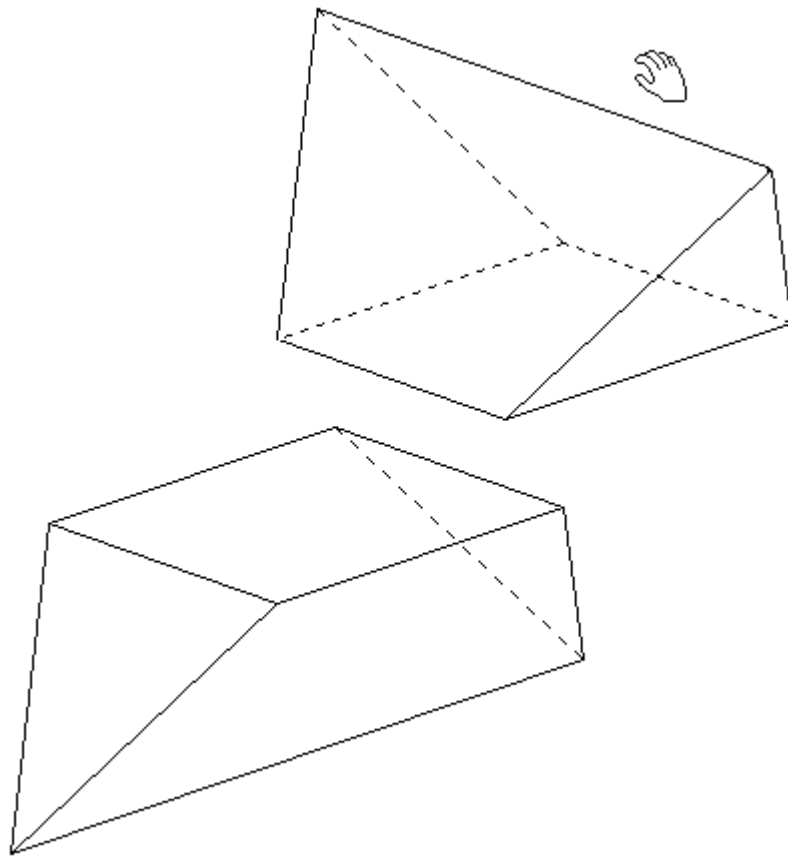


Abb. 5.3

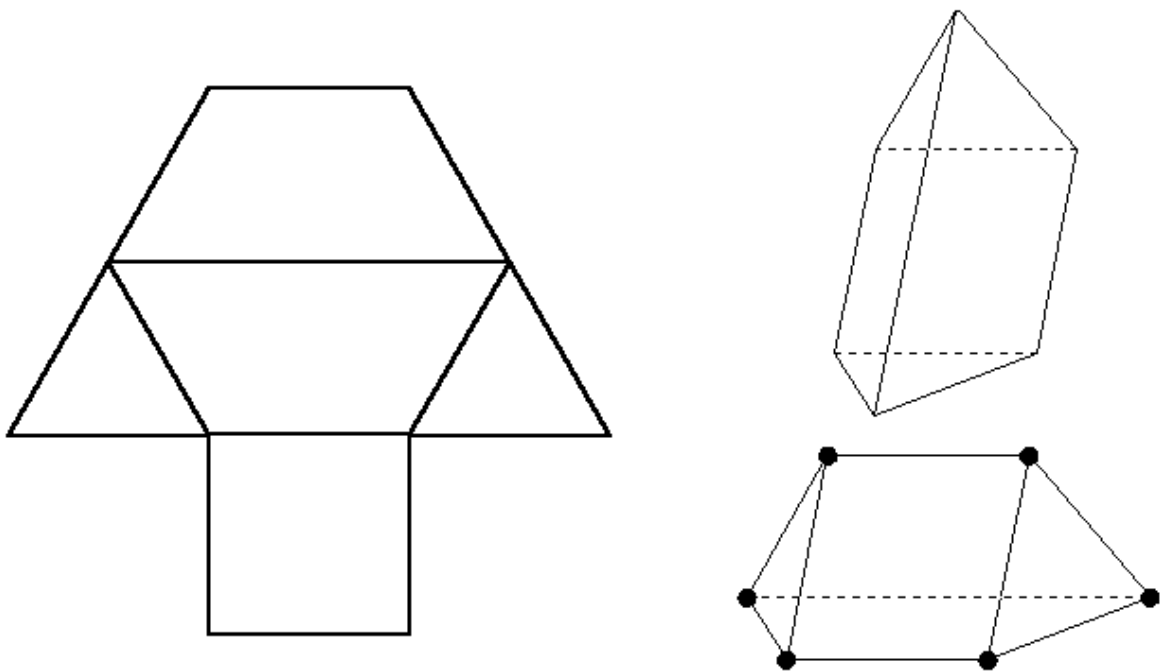


Abb. 5.4

{SEITE }

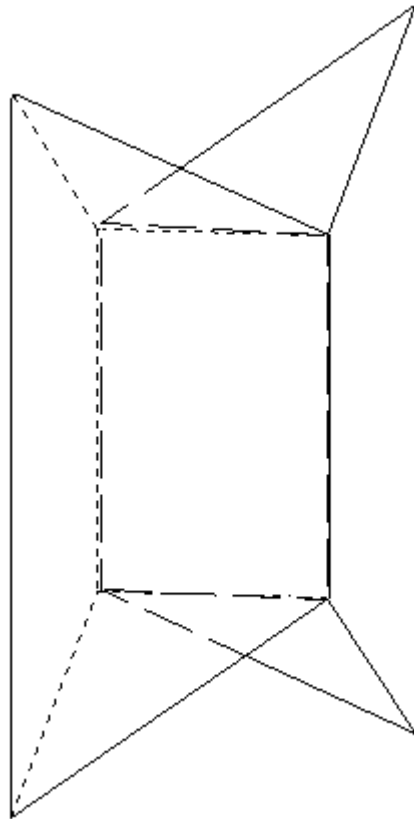


Abb. 5.5

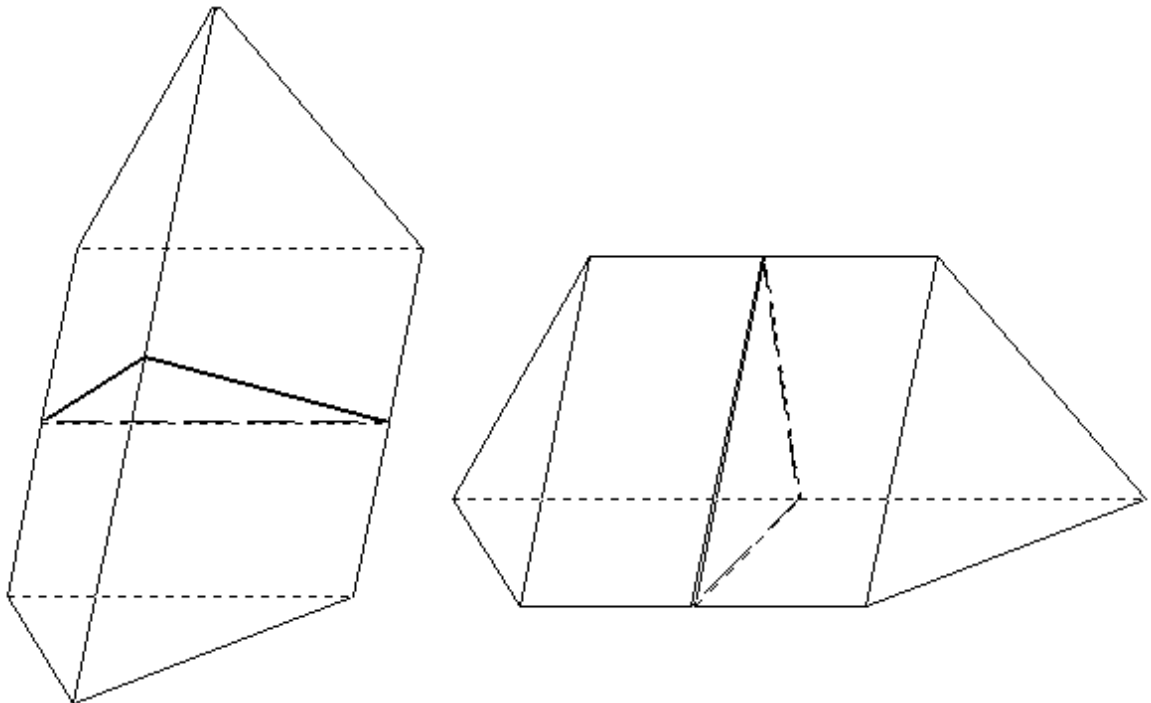


Abb. 6.1

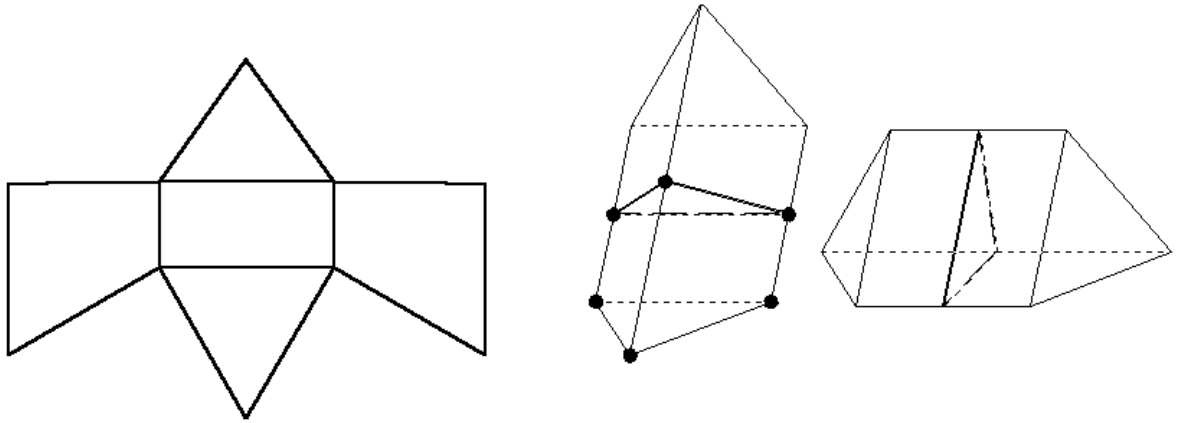


Abb. 6.2

Die Kombination zweier tetraeder-halbierender Schnitte durch Kantenmitten (Abb. 7.1); ausgeführt mit dem „Schnittebenenwerkzeug“ liefert vier kongruente vierseitige Pyramiden, die jeweils ein  $60^\circ$ -Parallelogramm als Grundfläche und zwei Paare benachbarter kongruenter Dreiecke (zwei gleichseitige und zwei rechtwinklige) als Seitenflächen besitzen (Abb. 7.2). Ein geradensymmetrisches Teilkörpernetz zeigt die Abbildung 7.3. Nimmt man die Puzzleteile (Abb. 7.4 ) in die Hand, so ist es schon schwieriger, die Teile zum Tetraeder zusammenzufügen.

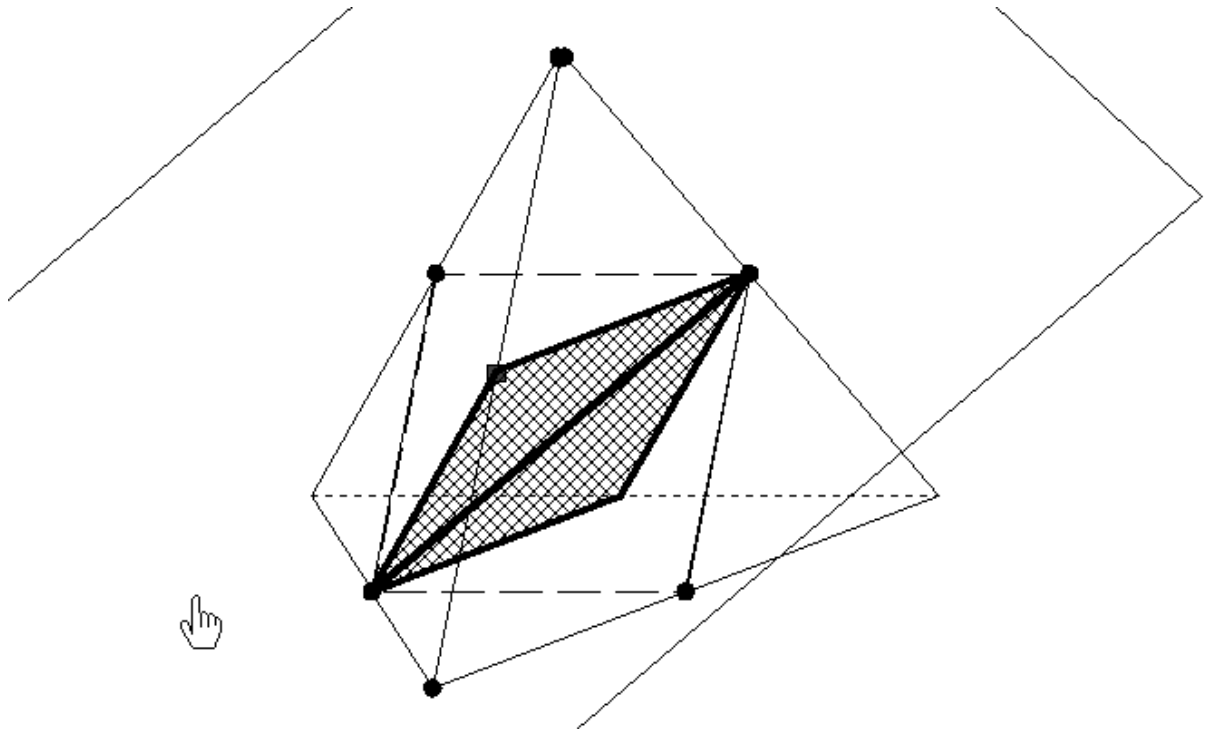


Abb. 7.1

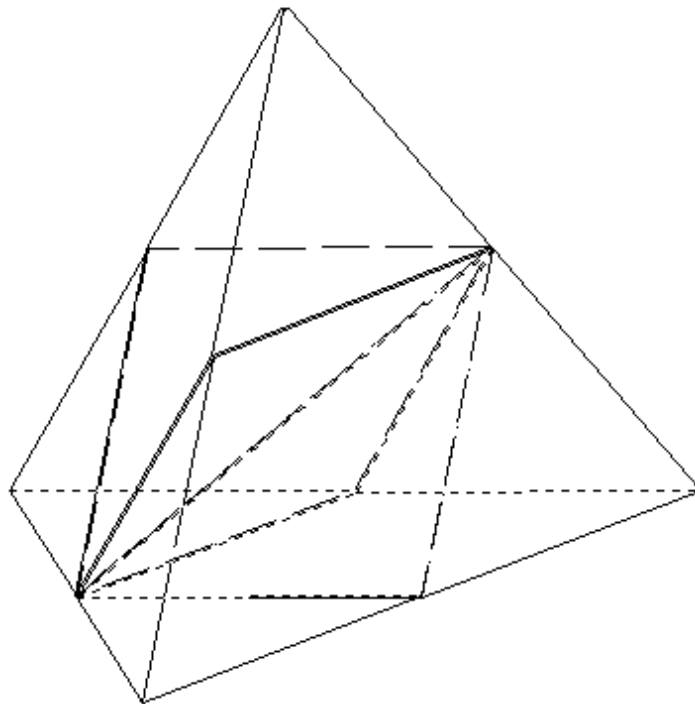


Abb. 7.2



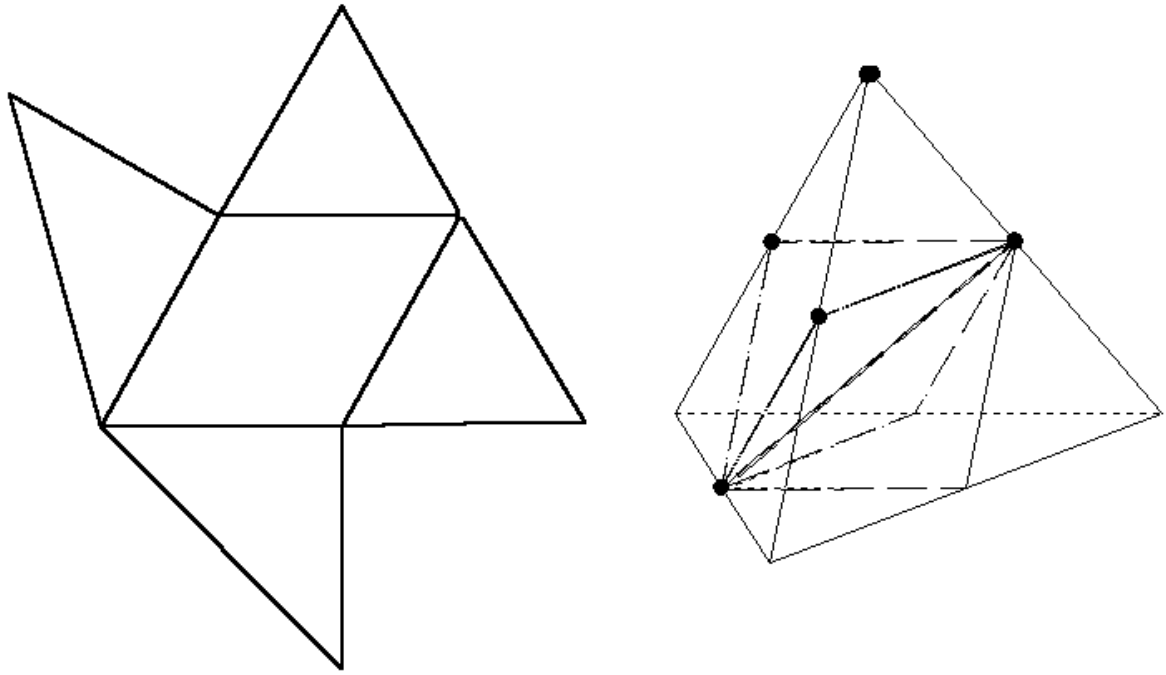


Abb. 7.3

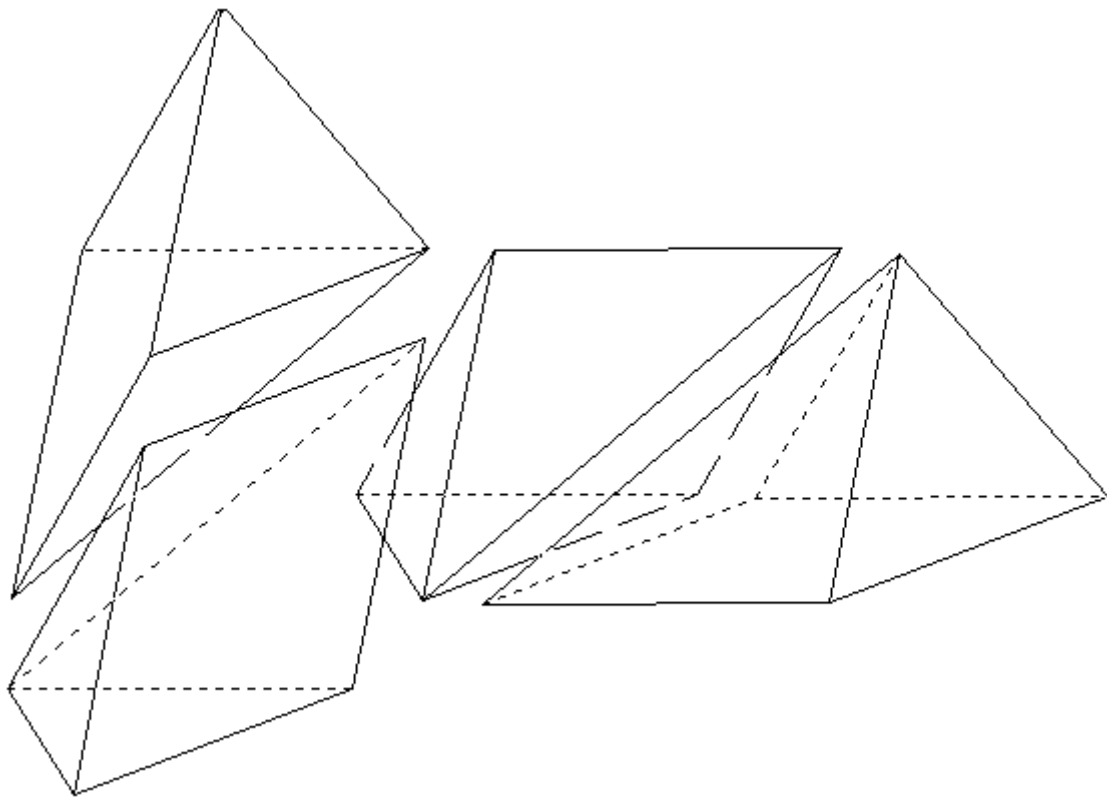


Abb. 7.4

Werden sogar die drei halbierenden Kantenmitten-Schnitte ausgeführt (Abb. 8.1), so erhält man ein recht differenziertes Puzzle, das aus vier einander kongruenten nicht regelmäßigen Tetraedern und vier einander kongruenten Sechsfächern mit jeweils dreieckigen Seitenflächen besteht (Abb. 8.2). Jedes der Teiltetraeder (Netz in Abb. 8.3) hat ein gleichseitiges Dreieck der Kantenlänge  $\{ \text{EINBETTEN Equation.3} \}$  zur Grundfläche und seine Seitenflächen bestehen aus kongruenten rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecken, deren Katheten  $\{ \text{EINBETTEN Equation.3} \}$  messen. Jedes der Sechsfächner (Netz in Abb. 4) kann in ein regelmäßiges Tetraeder der Kantenlänge  $\{ \text{EINBETTEN Equation.3} \}$  und in ein vorstehend beschriebenes Tetraeder zerlegt werden, dessen Netz auch als Teilnetz im Hexaedernetz enthalten ist.

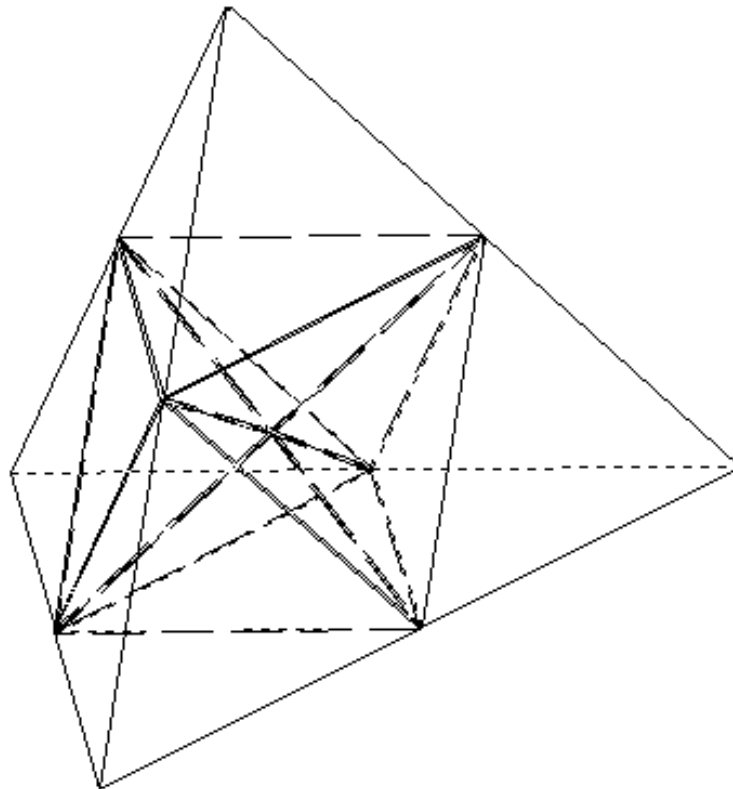


Abb. 8.1

{SEITE }

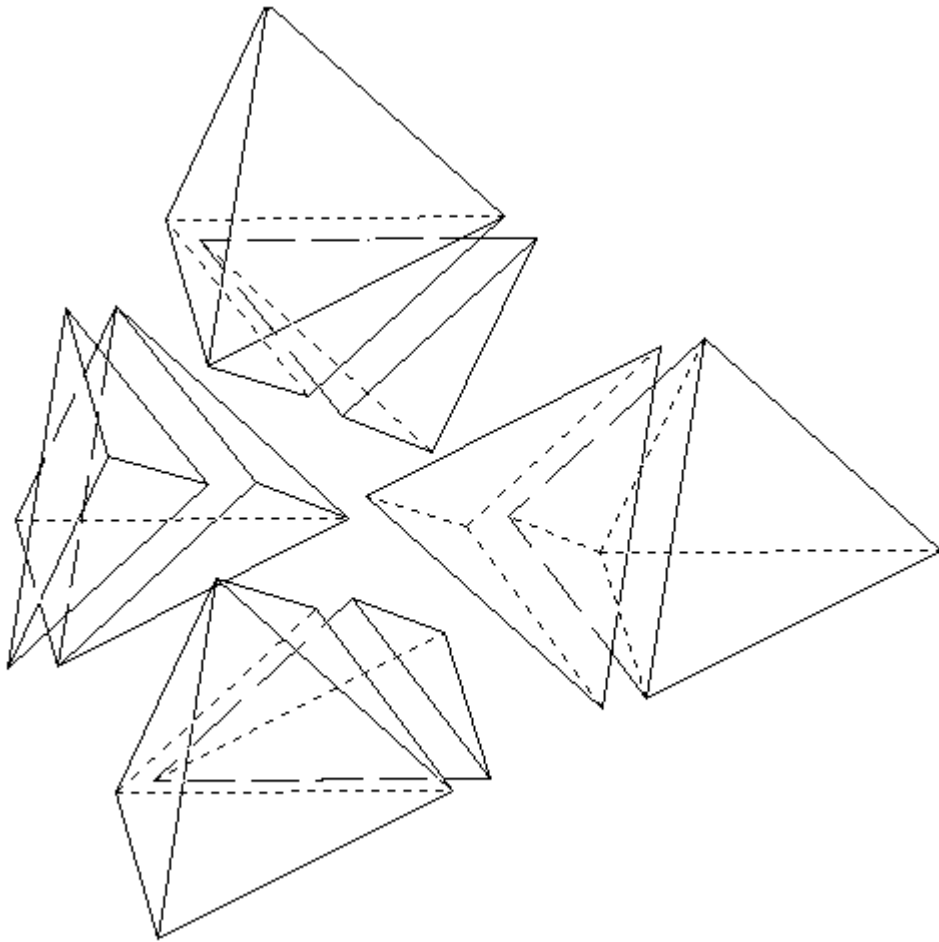


Abb. 8.2

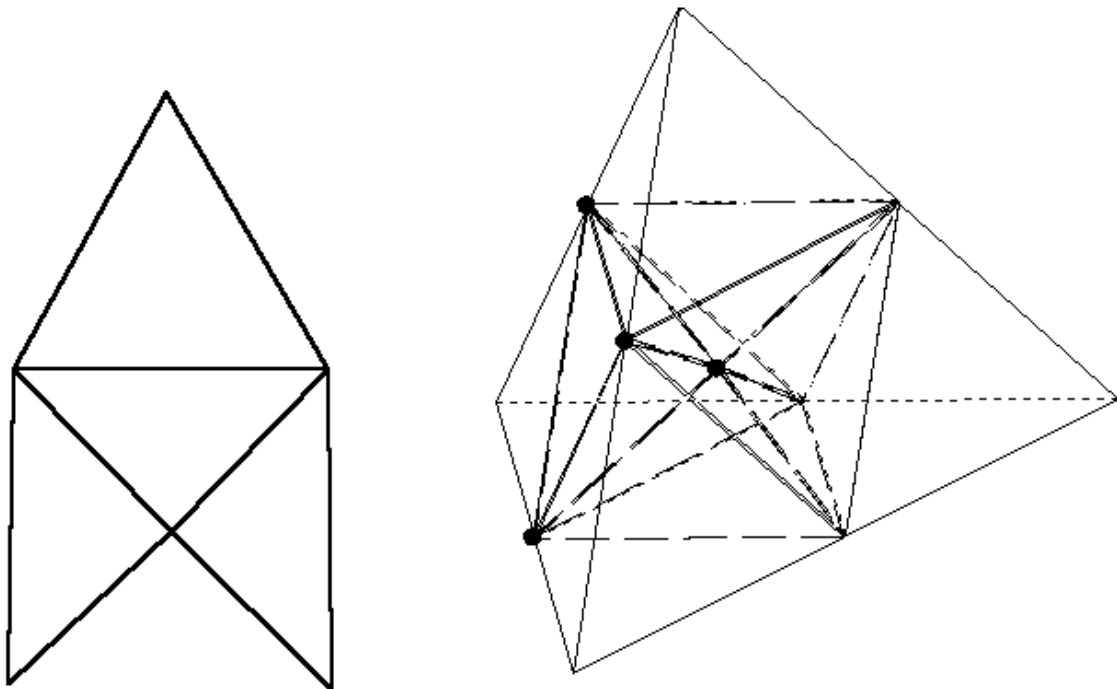


Abb. 8.3

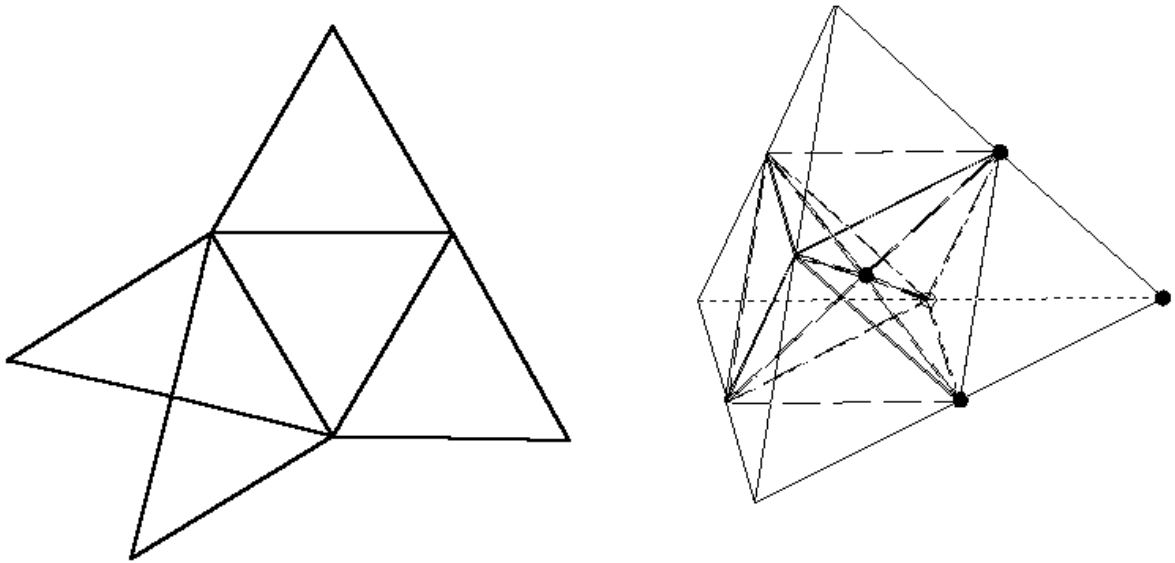


Abb. 8.4

Kombinieren wir jetzt einen halbierenden Schnitt durch eine Kante mit einem Schnitt der nur durch Kantenmitten läuft wie in Abbildung 9.1, so gewinnt man ein Puzzle, das aus zwei Paaren kongruenter keilförmiger Teilkörper besteht, die alle ein Viertel des Tetraedervolumens aufweisen (Abb. 9.2). Die Puzzle-Teile hätten wir auch durch eine entsprechende Halbierung der Tetraederhälften in Abbildung 5.2 erhalten können. Der uns bisher noch unbekannte Teilkörper hat ein Netz wie in Abbildung 9.3 usw. Wir schließen unsere (systematische) Entwicklung von Tetraeder-Puzzles mit einem Puzzle, das wir durch das Abschneiden regelmäßiger Tetraeder der Kantenlänge  $\{ \text{EINBETTEN Equation.3} \}$  aus dem Tetraeder erhalten (Abb. 10.1). Der Restkörper ist ein regelmäßiges Oktaeder der Kantenlänge  $\{ \text{EINBETTEN Equation.3} \}$ , das wir anschließend in zwei quadratische Pyramiden zerlegen. Eine Explosionsdarstellung des Tetraeders zeigt uns die Abbildung 10.2, die gedreht wie in Abbildung 10.3 aussieht.

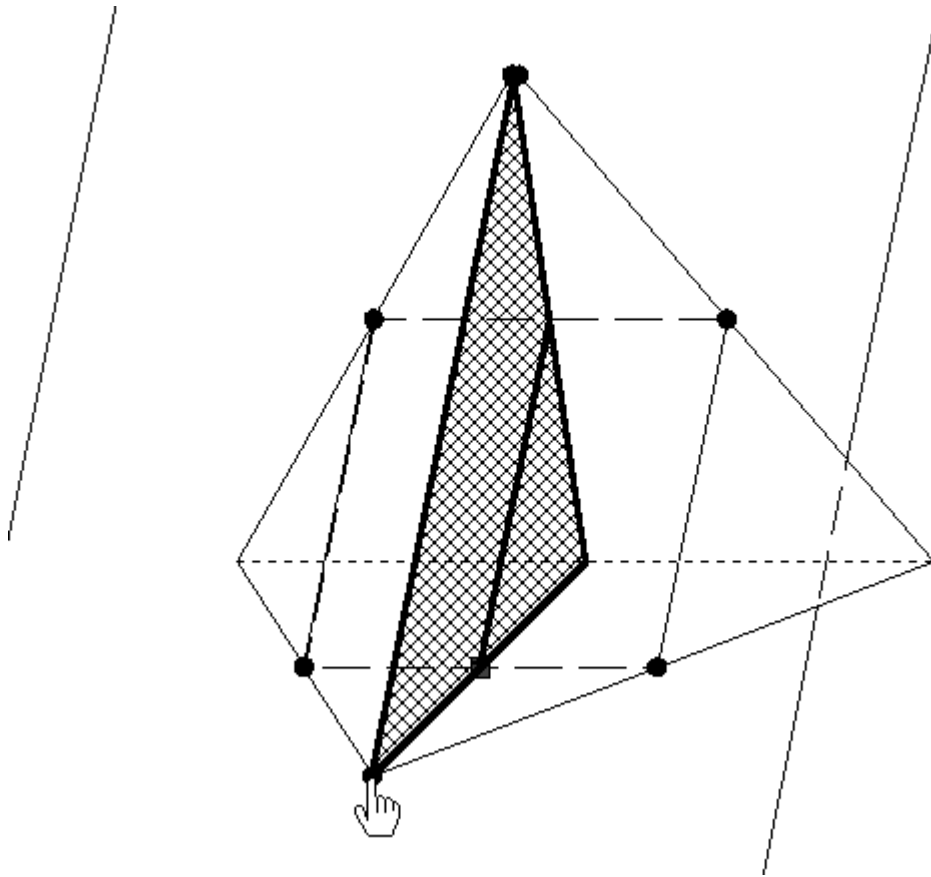


Abb. 9.1

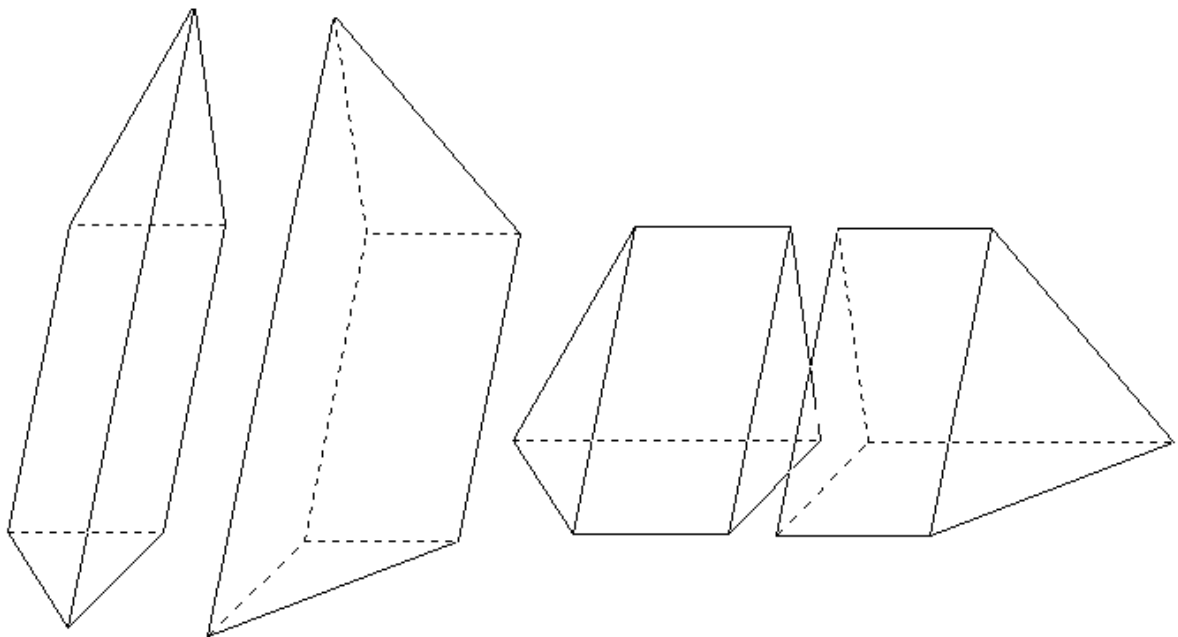


Abb. 9.2

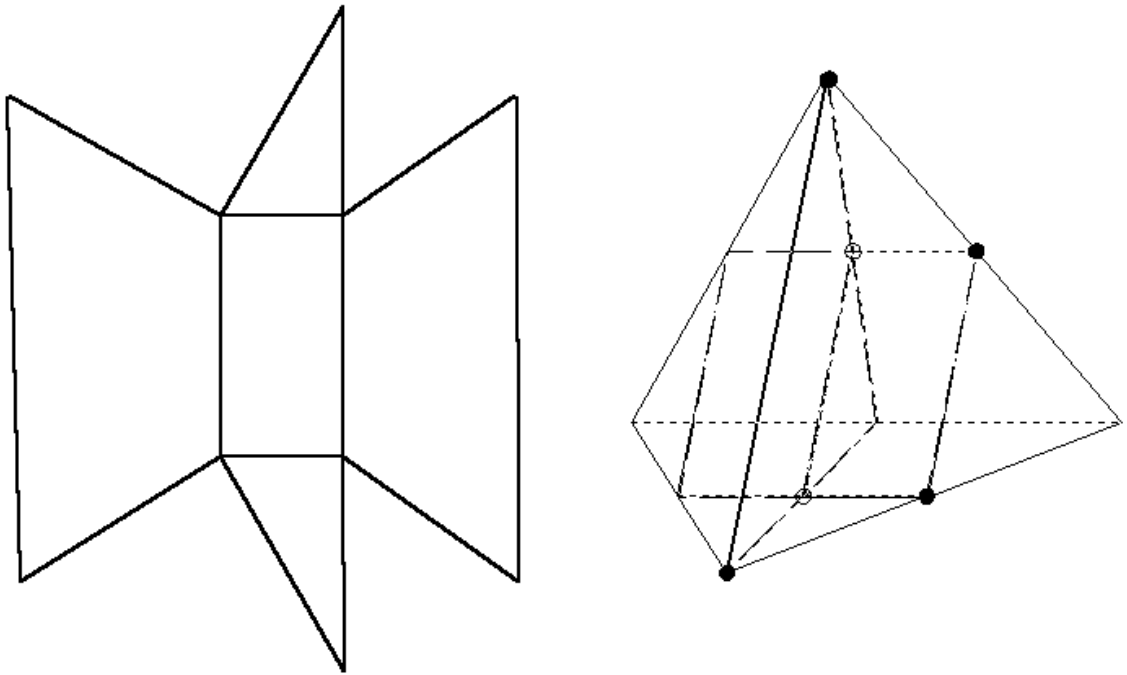


Abb. 9.3

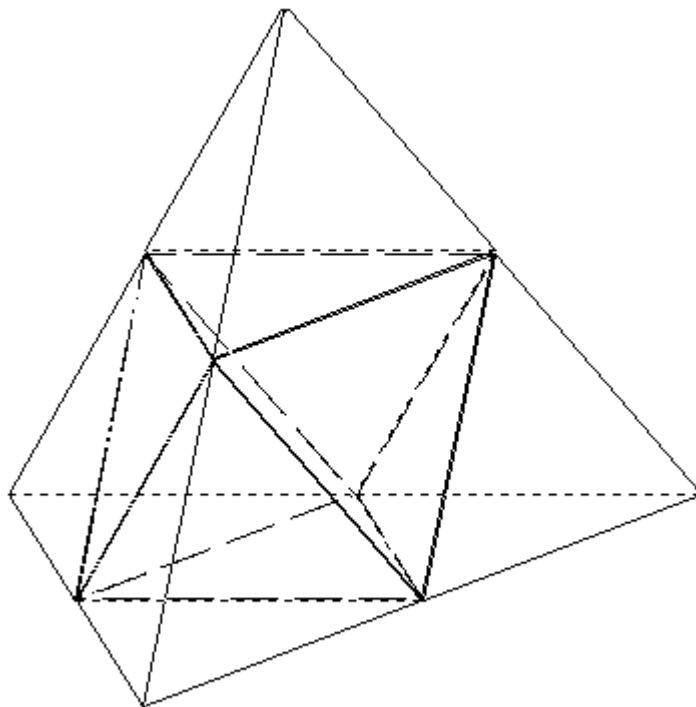


Abb. 10.1

{SEITE }

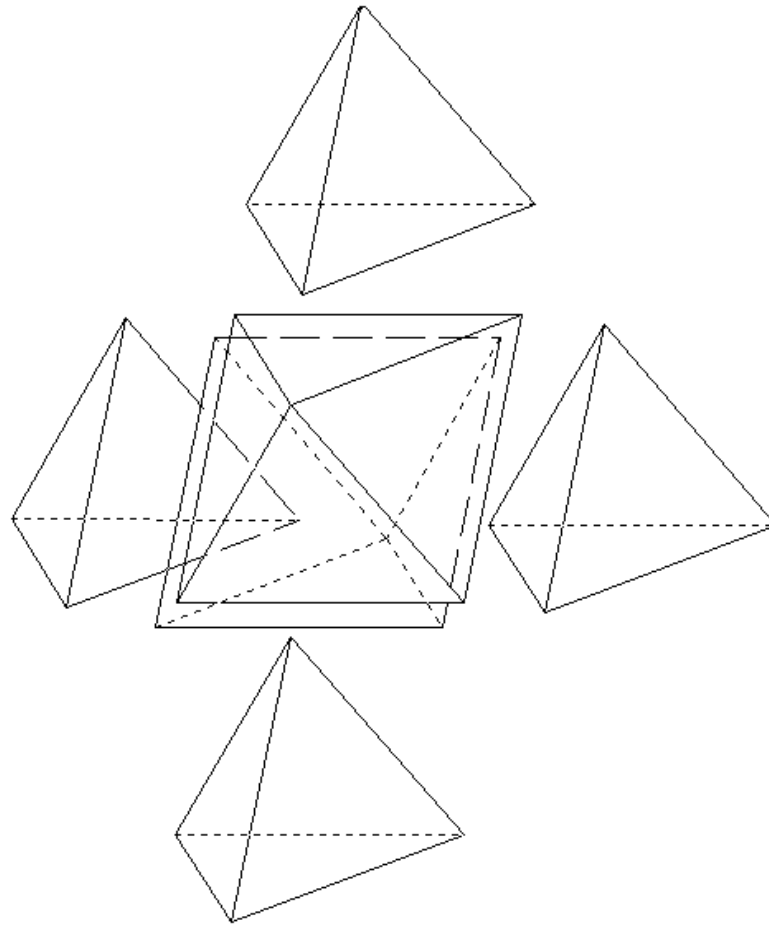


Abb. 10.2

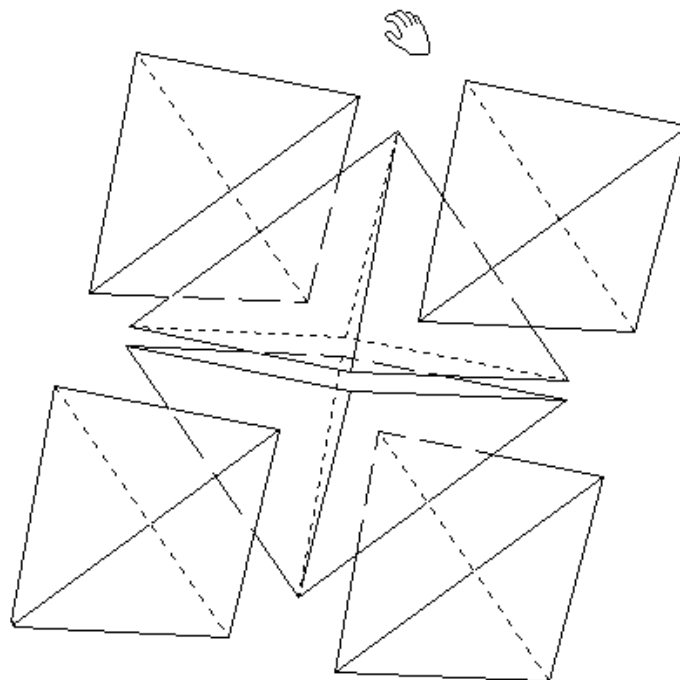


Abb. 10.3

Der Leser findet sicher noch andere Tetraeder-Puzzles.

### **3 Schluss**

So wie aus dem Tetraeder, lassen sich auch aus anderen Körpern, bei entsprechender Beherrschung des Computerwerkzeugs, schöne Puzzles gewinnen. Obwohl die print-mediale Dokumentation des exemplarischen Entwickelns von Körperpuzzles mit einem dafür geeigneten Computerwerkzeug nicht die Dynamik des experimentellen computerunterstützten Arbeitens wiedergeben kann, so ist doch erkennbar, wie ein neues Medium einen attraktiven raumgeometrischen Unterrichtsgegenstand zugänglich macht.

### **4 Literatur**

Bauer, H.; Freiberger, U.; Kühlewind, G.; Schumann, H.: KÖRPERGEOMETRIE  
(Software mit Manual). Berlin: Cornelsen, 1999.

Doorman, M.; Schumann, H.: SCHNITTE (Software). Bonn: Dümmlers, 1995.

Schumann, H.: Körperschnitte – Raumgeometrie interaktiv mit dem Computer.  
Bonn: Dümmlers, 1995.

Schumann, H.: Raumgeometrie – Computerwerkzeuge für den Raumgeometrie-  
Unterricht in der Sekundarstufe I. In: LOG IN (Informatische Bildung und Computer in der Schule), Jahrg.  
18, 1998, Heft 6, S. 44 - 48