

1 Computergrafische Werkzeuge für den Raumgeometrie-Unterricht in der Sekundarstufe I

"Wenn unser Unterricht heute darin besteht, daß wir Kindern Dinge eintrichtern, die in einem oder zwei Jahrzehnten von Rechenmaschinen erledigt werden, beschwören wir Katastrophen herauf."

Hans Freudenthal, 1973

1.1 Einleitung

Die Erfahrung lehrt uns, dass das Darstellen raumgeometrischer Sachverhalte auf Papier, an der Wandtafel oder in Form materialer Modelle eine mühsame und eine oft wenig erfolgreiche Angelegenheit ist, selbst dann, wenn gewisse Techniken des Darstellens bzw. des Konstruierens eingeübt worden sind.

Die ebene Darstellung einer räumlichen Figur hat keine räumliche Tiefe; sie ist statisch und kaum korrekturfähig; sie kann nicht "manipuliert" werden; sie kann nur unzureichend einem Lern- und Lehrprozess oder einem Explorationsprozess angepaßt werden usw. Das mag auch Ursache dafür sein, dass wegen dieser Schwächen herkömmlicher Medien, das Verhältnis von Unterrichtszeit für die Ebene Geometrie zur Unterrichtszeit für die Raumgeometrie ca. 3:1 beträgt (in den Lehrplänen finden wir eben nur das, was sich mit den traditionellen Medien im Unterricht mehr oder weniger gut realisieren läßt!).

Zu den raumgeometrischen Darstellungsformen: Papier-Bleistift- / Print-Medien-Darstellung (Zeichnung/Druck auf Papier etc.) und materiale Darstellung (Körpermodelle etc.) tritt deshalb die Computerdarstellung, die uns aber neue Schnittstellenprobleme beschert.

Das Diagramm 1 veranschaulicht den Zusammenhang der drei Darstellungsformen mit den entsprechenden Schnittstellen $S_i, S'_i, i=1,2,3$.

Trotz der Schnittstellenproblematik eröffnen sich uns neue Möglichkeiten des Problemlösens in der Raumgeometrie:

Raumgeometrische Probleme können wir in einer herkömmlichen Lernumgebung i.a. nur über die Lösung entsprechender Probleme der ebenen Geometrie lösen (Diagramm 2; AR steht für den geometrisierten Anschauungsraum, AE für die geometrisierte Anschauungsebene); dafür wurden die Methoden der Darstellenden Geometrie entwickelt. Mit der Computernutzung haben wir die Möglichkeit, raumgeometrische Konfigurationen auf dem Bildschirm mit virtuell räumlicher Tiefe

herzustellen und darzustellen (Diagramm 3) und diese Konfigurationen (direkt) zu manipulieren, im Ganzen oder im Zugmodus. Das vereinfacht das Lösen raumgeometrischer Probleme erheblich und vermeidet den "traditionellen Umweg".

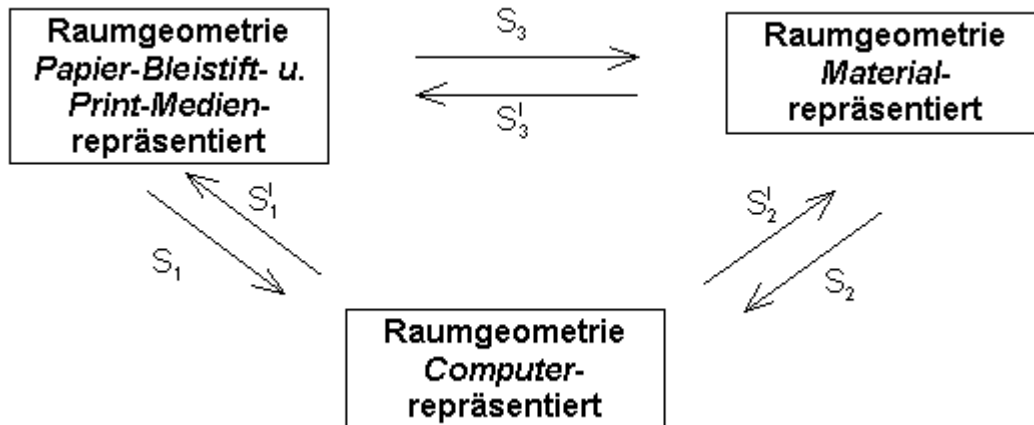


Diagramm 1

Anmerkungen zu den Schnittstellen:

S_1/S_2 : Falls der in einer Zeichnung dargestellte oder als materiales Modell vorgegebene Körper nicht bereits als digitales Modell im Computerwerkzeug verfügbar ist, wie ist er dann zu implementieren?

(Dazu müssen wir i.a. die Ecken des betreffenden Körpers in einem dreidimensionalen Koordinatensystem ausdrücken und gegebenenfalls berechnen, - wenn wir z.B. eine Laserstrahlabtastung eines materialen Objektes als ein in der Schulgeometrie nicht realisierbare Digitalisierungsmethode ansehen.- Wo kommt das 3-dimensionale Koordinatensystem im Lehrplan der Sekundarstufe I vor?)

S_1' : Raumgeometrische Bildschirm-Darstellungen lassen sich auf einfache Weise ausdrucken und so dokumentieren.

S_2' : Wie bekommen wir von einem nur der visuellen Wahrnehmung zugänglichen räumlichen Objekt auf dem Bildschirm - hier noch nicht die Wahrnehmungsmöglichkeiten des Cyber-Space in Erwägung ziehend - ein materiales Objekt, das auch taktil erfasst werden kann.

Die derzeit in der Schule praktikable Lösung besteht in der Generierung von Körpernetzen auf dem Bildschirm, die ausgedruckt und dann zu Flächenmodellen aufgefaltet werden können; diese Lösung des Schnittstellenproblems bleibt aber auf abwickelbare Körper beschränkt.

Die Verfahren des Solid-Imaging sind noch viel zu aufwendig und zu teuer.

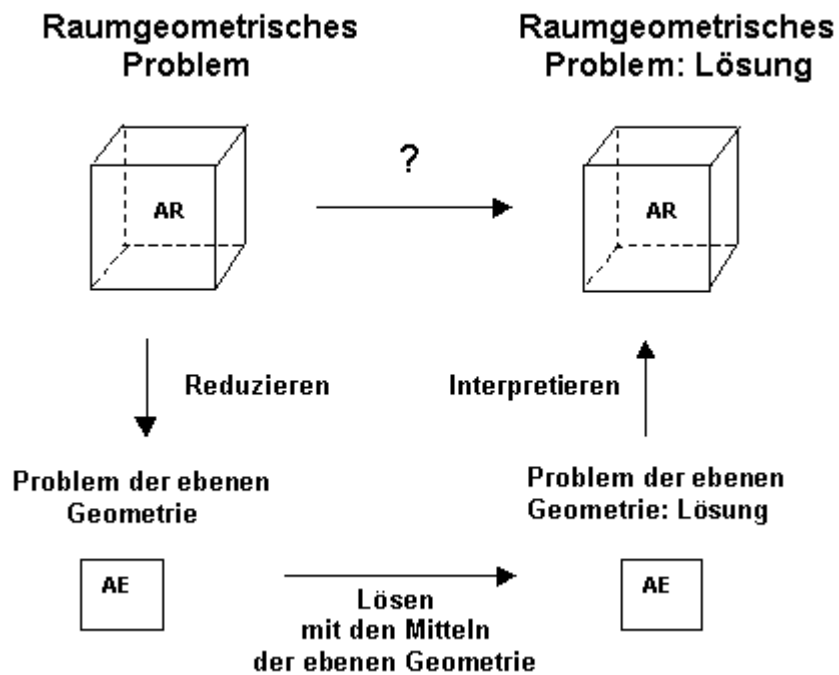
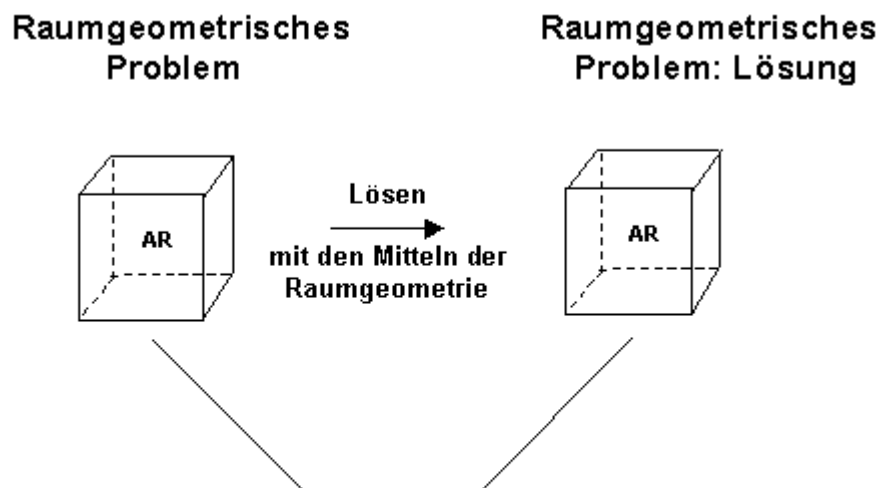
"Raumgeometrie - konservativ"

Diagramm 2

"Raumgeometrie - progressiv"

Anschauungsraum als Bildschirmraum mit 'räumlicher Tiefe'
 (mit eindeutig wahrnehmbaren und referenzierbaren räumlichen Objekten
 und mit direkter Manipulation räumlicher Objekte)

Diagramm 3

1.2 Prototypische computergrafische Werkzeuge

Zwei Software-Entwicklungslinien zeichnen sich ab. Einerseits werden Werkzeuge entwickelt, die im Wesentlichen auf die Darstellung und Bearbeitung von Körpern beschränkt sind, andererseits Werkzeuge, die im Wesentlichen räumliches Konstruieren wie die Dynamischen Geometrie-Systeme in der Ebene gestatten. Letztere Werkzeuge sind bis jetzt nur für Macintosh (3D-Geometer, Klemenz 1994/99) fertiggestellt worden - mit dem Mangel der eindeutigen Wahrnehmbarkeit räumlicher Objekte in der Tiefe (man denke nur an die Lagebeziehung von Kugel und Gerade: alle Fälle müssen visuell wahrnehmbar sein!). Der vom 3D-Geometer abgeleitete plattformunabhängige MiniGeometer (unter <http://geosoft.ch>), ein Java-Applet für interaktives Konstruieren im Raum, enthält keine Verbesserung des genannten Problems, besitzt eine recht komplexe Benutzeroberfläche und ist wohl am ehesten in der Sekundarstufe II einsetzbar. Eine hoffnungsvolle Entwicklung, das Cabri-Géomètre-3D, ist noch nicht abgeschlossen.

Wir wenden uns deshalb den "Körper-Werkzeugen" zu, die inhaltlich an den traditionellen Geometrielehrplänen angepasst sein müssen, um Akzeptanz bei den Lehrern und Lehrerinnen zu finden. Bis heute gibt es im deutschen Sprachraum zwei Entwicklungsergebnisse: Das einfach zu bedienende Werkzeug SCHNITTE gestatten nur das Darstellen, das schrittweise Schneiden und das Abwickeln konvexer Polyeder; es ist nur beschränkt direkt manipulativ. Z.B. ließe sich mit ihm die in den Abbildungen 1.1-1.6 durchgeführte Zerlegung eines Würfels nicht bewerkstelligen usw. Es war deshalb notwendig das Werkzeug SCHNITTE weiter zu entwickeln: Das direkt-manipulative Werkzeug "KÖRPER(GEOMETRIE)" verfügt über alle schulüblichen Grundkörper, die auf vielfältige Weise visualisiert und bearbeitet werden können. Es wurde u.a. das Virtual Sphere Device implementiert, das gestattet die Körper mit der planaren Maus so zu drehen, als hätte man den Körper in der Hand.

Jetzt kann die oben genannten Zerlegung vorgenommen werden. Dazu legt man entsprechende Schnitte in den Würfel (Abb. 1.1/2). Der Würfel wird direkt-manipulativ in seine Bestandteile zerlegt (Abb.1.3). Anschließend wird die quadratische Säule wie in Abbildung 1.4 halbiert, und die Hälften wie in Abbildung 1.5/6 in die restlichen Teilkörper eingefügt. Man erhält so ein Zerlegung des Würfel in zwei kongruente (nicht konvexe, ebenensymmetrische und punktsymmetrisch zueinanderliegende) Teilkörper. Beide Teilkörper können wir uns durch direkt-manipulative Drehung von

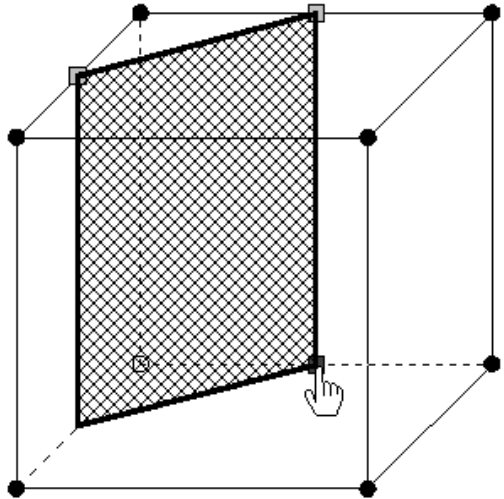


Abb. 1.1

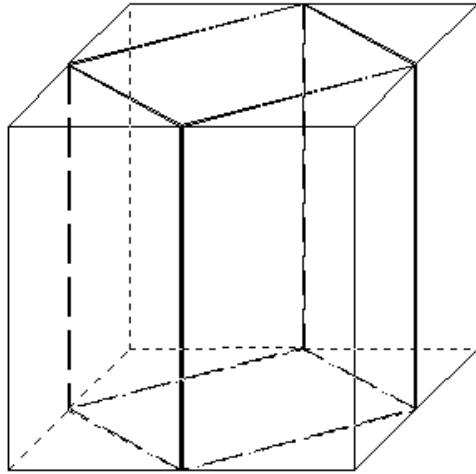


Abb. 1.2

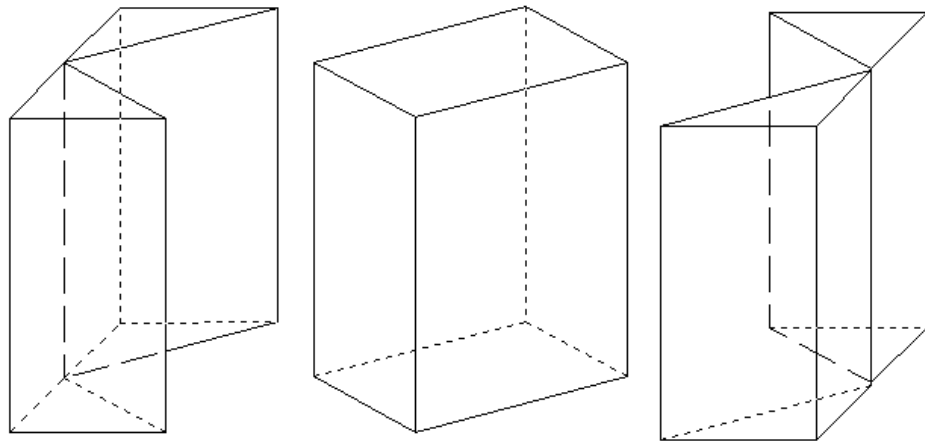


Abb. 1.3

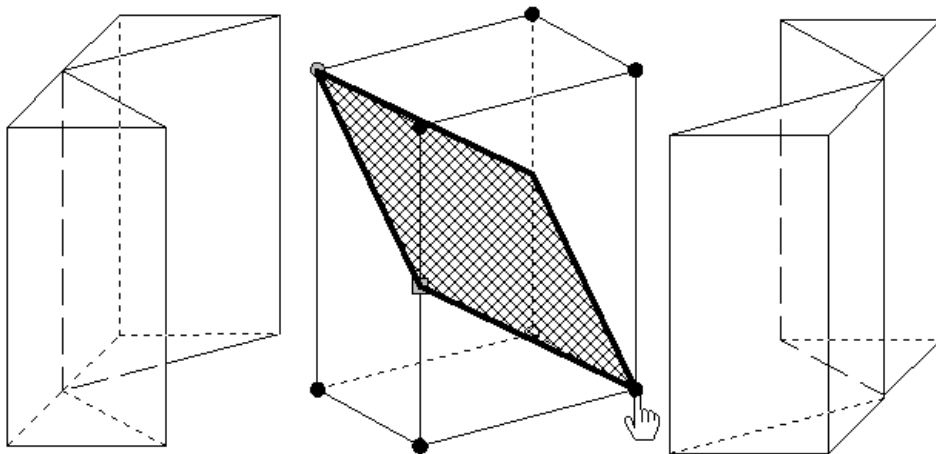


Abb. 1.4

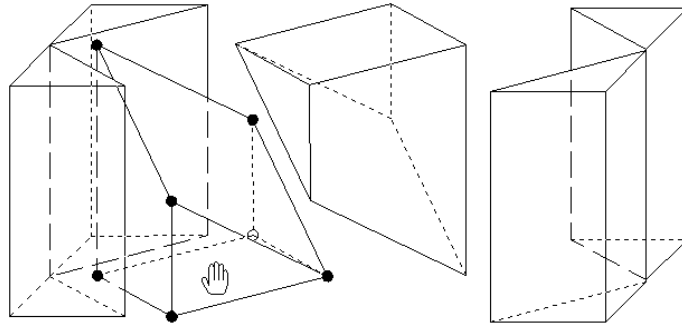


Abb. 1.5

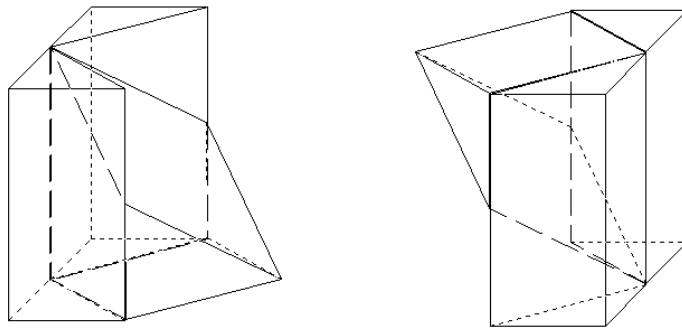


Abb. 1.6

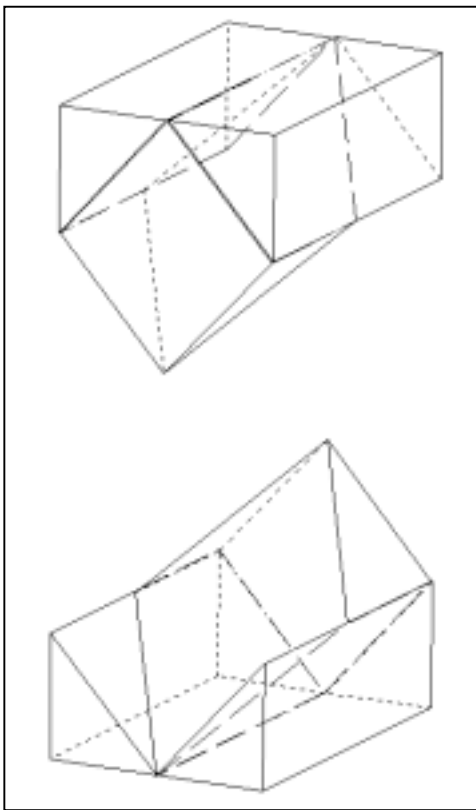


Abb. 1.7

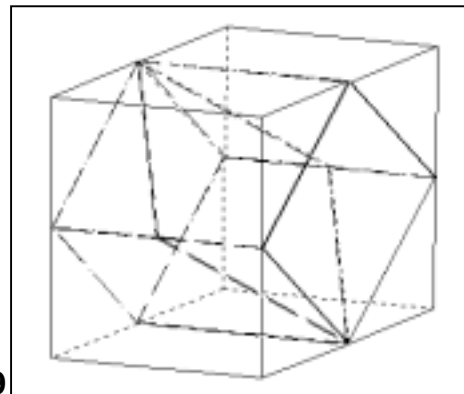
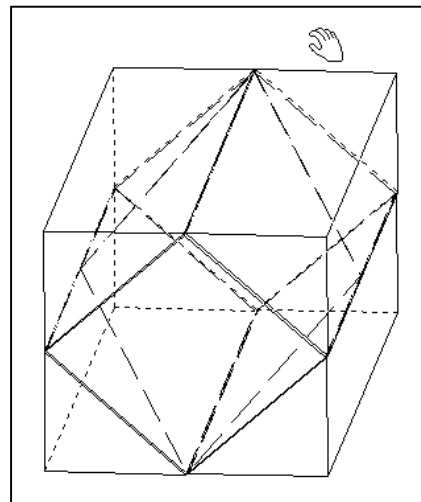


Abb. 1.8/9

allen Seiten ansehen (Abb. 1.7); das ist natürlich auch für ihre Zusammenfügung möglich (Abb. 1.8/9). Die Handskizze in Abbildung 1.10 zeigt eine andere Möglichkeit, diese Teilkörper des Würfels zu gewinnen; sie lässt sich selbstverständlich auch mit KÖRPER(GEOMETRIE) realisieren.

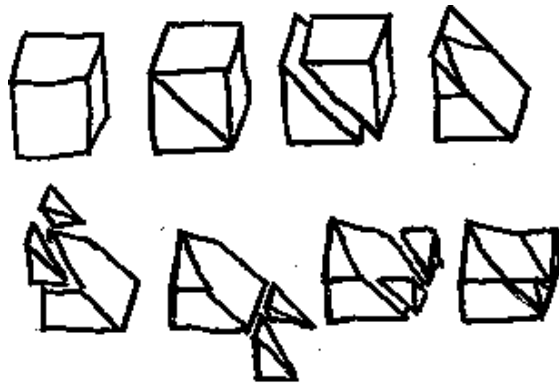


Abb. 1.10

1.3 Offene Aufgabenstellungen für den computerwerkzeugunterstützten Raumgeometrie-Unterricht

Die Nutzung adäquater Computerwerkzeuge zur Erzeugung raumgeometrischer Objekte (hier: Körperschnitte) eröffnet die Möglichkeit der Bearbeitung von offenen Aufgabenstellungen, bei der der Computer als Mittel

- der Erweiterung von Wissensbereichen, die im Unterricht mit den herkömmlichen Medien nur schwerlich behandelt werden können
- zur Verstärkung kreativer intellektueller Leistungen
- zur flexiblen und ökonomischen Reorganisation von Arbeitsabläufen und -ergebnissen

zum Tragen kommt.

Die Aufgabenstellungen sind leistungsdifferenzierend: auch schwächere Schüler und Schülerinnen haben Erfolgsmöglichkeiten. Divergendes Denken wird unterstützt. (Verweis: Die japanische Methode des "open ended approach" für den Mathematikunterricht.)

Im folgenden listen wir einige solcher Aufgabenstellungen aus dem Wissensbereich "konvexe Körper" auf, die adäquat mit dem Werkzeug SCHNITTE oder dem Werkzeug KÖRPER(GEOMETRIE) bearbeitet werden können. Zur allgemeinbildenden Bedeutung des Zerschneidens von Körpern vergl. Schumann 1995.

Aufgabe Nr. 1 **"Schnittflächen am Würfel"**

Ein Würfel kann auf verschiedene Weise von einer Ebene geschnitten werden. Untersuche, welche Schnittflächen entstehen und protokolliere deine Ergebnisse und benenne die Flächenformen.

Beschreibe und ordne deine Ergebnisse nach der Eckenanzahl und den Symmetrieeigenschaften der vieleckigen Schnittfläche.

Überlege dir auch, wie die Schnittflächen systematisch herauszufinden sind, so dass du es anderen erklären kannst.

Lösung der Aufgabe Nr. 1:

Dreiecke (nur spitzwinklige):

Gleichseitige Dreiecke (3-fach achsensymmetrisch)

Gleichschenklige Dreiecke (einfach achsensymmetrisch)

Dreiecke (nicht achsensymmetrisch)

Vierecke (wenigstens 2 Seiten parallel):

Trapeze, achsensymmetrisch (gleichschenklige)

Trapeze, nicht achsensymmetrisch (nicht gleichschenklige)

Parallelogramme

Rauten

Rechtecke

Quadrat

Fünfecke (immer 2x2 Seiten parallel)

einfach achsensymmetrisch

nicht achsensymmetrisch

Sechsecke (immer 3x2 Seiten parallel)

einfach achsensymmetrisch

2-fach achsensymmetrisch

3-fach achsensymmetrisch

6-fach achsensymmetrisch (regelmäßig)

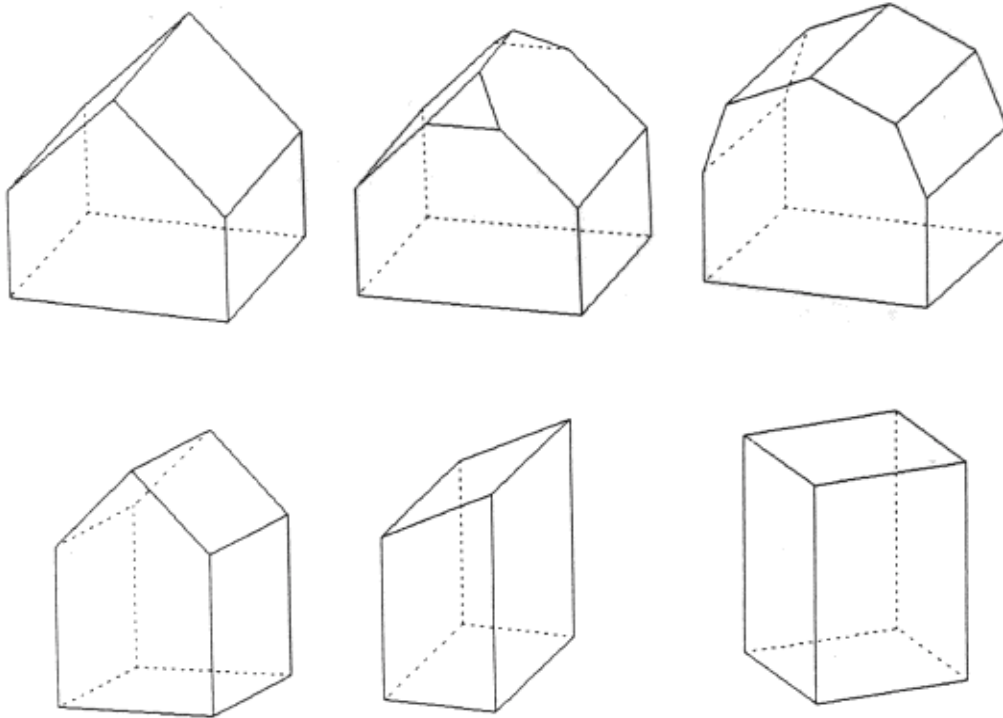
nur punktsymmetrisch

nicht punktsymmetrisch.

Aufgabe Nr. 2 "Schnittkörper des Würfels"

Schneide aus einem Würfel die abgebildeten Körper heraus, und erzeuge weitere Schnittkörper nach der eigenen Phantasie. Gib den Schnittkörpern Namen.

Drucke auch Netze dieser Körper aus, schneide sie aus und falte sie auf.



Aufgabe Nr. 3 "Würfelhalbierungen"

1) Lege Schnitte so in den Würfel, dass dieser halbiert wird und die Schnittfläche die Form

- eines Quadrats
- eines größtmöglichen Rechtecks
- einer größtmöglichen Raute
- eines regelmäßigen Sechsecks

hat. Speichere den Würfel mit den jeweiligen Schnittlinien ab.

2) Kannst du noch andere würfelhalbierende Schnitte finden?

- 3) Prüfe folgende Aussage nach: Jeder den Würfel halbierende Schnitt halbiert auch seine Oberfläche.
- 4) Lasse Netze der Würfel mit den Schnittformen aus Aufgabe 1) bilden und ausdrucken. Schneide die Würfelnetze aus, und falte sie zu Flächenmodellen auf.
- 5) Berechne aus der Kantenlänge a des Würfels die Größe der jeweiligen Schnittfläche aus Aufgabe 1) .

Aufgabe Nr. 4 **"Würfelpuzzles"**

Was ist ein Puzzle?

Einzelteile sind (nach bestimmten Regeln) zu einem Ganzen zusammzusetzen. Was ist hier ein Ganzes? - Ein Körper, z.B. ein Würfel, ein Tetraeder, eine quadratische Pyramide, ein Quader, ein Zylinder. Wie erhalten wir die Einzelteile? - Dazu zerschneiden wir ein Körpermodell in Teile, aus denen dann der Körper wieder zusammgebaut werden kann. Auf dem Bildschirm können wir das Zerlegen eines Körpers mit dem Werkzeug KÖRPER auf recht beliebige oder auf regelhafte Weise durchführen - ohne Angst vor einem Verschnitt!

Körperpuzzles können aus mehr oder weniger Teilen bestehen. Die Teilkörper können 'unregelmäßig' oder auch 'schön symmetrisch' sein.

- 1) Zerlege einen Würfel in vier Teilkörper gleicher Form, die aber keine Würfel sein sollen.
- 2) Zerlege einen Würfel in fünf unregelmäßige Teilkörper.
- 3) Zerlege einen Würfel in sechs symmetrische Teilkörper.
- 4) Zerlege ein Tetraeder in zwei gleichförmige Teile, die keine Pyramiden sind.
- 5) Lade einen Körper deiner Wahl und zerlege diesen nach deiner Phantasie.

Die Netze der Teilkörper sind auszudrucken, auszuschneiden, zu Flächenmodellen aufzufalten und zusammenzukleben. Jetzt kann das materiale Puzzle ausprobiert werden. Im übrigen: Verfasse Ausschneidebögen für deine Puzzles.

Aufgabe Nr. 5 **"Vom Tetraeder zu den Hexaedern"**

- 1) Lege Schnitte in das Tetraeder so, dass nach Schnittausführung neue Körpertypen entstehen. Welche Typen sind das? Stelle aus den Netzausdrucken Körpermodelle her. Beschreibe die Körper mit ihren jeweiligen Flächen-, Ecken und Kantenanzahlen.

- 2) a) Lege Schnitte in eine vierseitige Pyramide so, dass nach Schnittausführung neue Körpertypen entstehen.

- b) Lege Schnitte in einen dreiseitigen Pyramidenstumpf so, dass nach Schnittausführung neue Körpertypen entstehen.

Drucke die Schrägbilder aller von dir gefundenen neuen Körpertypen aus. Reicht die Angabe der Flächen-, Ecken- und Kantenzahl noch aus, um die Körpertypen zu beschreiben? Welche Kennzahlen mußt du noch hinzunehmen?

- 3) Schneide auf verschiedene Art zwei dreikantige Ecken einer vierseitigen Pyramide ab. du erhältst Siebenflächner. Lassen sich diese Siebenflächner durch die in Aufgabe 2) dort zur Beschreibung von Körpern ausreichenden Kennzahlen unterscheiden?

Aufgabe Nr. 6 **"Von den Platonischen zu Archimedischen Körpern"**

Verwende die entsprechenden Dateien für das regelmäßige Tetraeder (Vierflächner aus vier gleichseitigen Dreiecken), den Würfel (Hexaeder), das regelmäßige Oktaeder (gleichkantige quadratische Doppelpyramide), das regelmäßige Dodekaeder (Zwölfflächner aus regelmäßigen Fünfecken) , das regelmäßige Ikosaeder (Zwanzigflächner aus gleichseitigen Dreiecken).

Verschaffe dir beim Legen der Schnitte Übersicht, in dem du dir dein Arbeitsfeld durch Vergrößern und Drehen des Körpers entsprechend einrichtest.

1) Kantenhalbierendes Eckenabschneiden

- a) Setze auf allen Kanten des Tetraeders, Würfels (Hexaeders), Oktaeders, Dodekaeders und des Ikosaeders den Kantenmittelpunkt. Schneide kantenhalbierend alle Ecken ab. Wie ändert sich die Flächen-, Ecken- und Kantenanzahl des ursprünglichen Körpers?

Beschreibe die neuen Körper.

Drucke die Schrägbilder der neuen Körper aus und falte die Netzausdrucke zu Flächenmodellen auf.

- b) Die unter 1a) erzeugten neuen Körper werden Kuboktaeder und Ikosidodekaeder genannt. Führe an diesen Körpern erneut kantenhalbierendes Eckenabschneiden durch. Du erhältst zwei neue Körpertypen: das (nicht gleichkantige) Rhombenkuboktaeder und das (nicht gleichkantige) Rhombenikosidodekaeder. Beschreibe diese neuen Körper.

2) Kantendrittelndes Eckenabschneiden

Setze auf allen Kanten die zwei Punkte, die die Kante 'dritteln'. Schneide 'kantendrittelnd' alle Ecken des Tetraeders, Oktaeders und des Ikosaeders ab. Du erhältst drei neue Körper. Beschreibe diese, wie ändern sich die Flächen-, Ecken- und Kantenanzahlen? Die drei Körper heißen: abgestumpftes Tetraeder, abgestumpftes Oktaeder, abgestumpftes Ikosaeder ('Fernsehfußball').

1.4 Offene Fragen und Ausblick

Wie muß sich unter dem Einfluß von Raumgeometrie-Software der heutige Unterricht in Raumgeometrie in der Sekundarstufe I hinsichtlich seiner Zielsetzung, seiner Inhalte und Methoden ändern?

Was kann die (computerrepräsentierte) Raumgeometrie aus der Sicht der Schüler und Schülerinnen der Sekundarstufe I für das Verstehen unserer Welt, für das private Leben und für die berufliche Zukunft leisten?

Der Raumgeometrie-Unterricht könnte z.B. die Verbindung zu den zahlreichen 3D-Computer-Grafik-Anwendungen herstellen, die in Form von ästhetischen Animationen, 3D-Spielen, vielseitigen 3D-CAD-Werkzeugen (z.B. für die Raumplanung) und Virtual-Reality-Anwendungen dem naiven User zunehmend vertraut werden. In diesem Zusammenhang erhebt sich die noch im allgemeinen und im besonderen zu beantwortende Forschungsfrage: Wie kann durch die Benutzung von Raumgeometrie-Software das "Raumvorstellungsvermögen" entwickelt und trainiert werden? Denn Entwicklung und Training des Raumvorstellungsvermögens, einem wesentlichen Intelligenzfaktor, ist eine originäre Aufgabe des Raumgeometrie-Unterrichts!

Wie könnte das computerunterstützte Lernen von Raumgeometrie in nicht allzu ferner Zukunft aussehen?

Raumgeometrielernen in Virtuellen „Wirklichkeiten“:

Bei der Nutzung der heutigen Raumgeometrieprogramme bleiben Mensch und Computersystem noch getrennt: Der Mensch kann nur mittelbar mit dem Computer interagieren, indem er z.B. das Grafikeingabegerät 'Maus' bedient; seine kinästhetischen Empfindungen und Erfahrungen sind deshalb sehr eingeschränkt; er läßt Kommandos ausführen und beobachtet das (räumliche) Ergebnis auf einem planaren Bildschirm; die räumliche Interpretation kann allenfalls durch stereografische Darstellungen und die Benutzung einer Rot-Grün-Brille verbessert werden. Die Computergenerierung sogenannter virtueller Wirklichkeiten hebt die Grenzen zwischen den Systemen Mensch und Computer partiell auf: Mittels einer geeigneten Schnittstelle, dem Eye Phone, einer elektronischen Brille, ausgerüstet mit stereografisch arbeitenden Bildschirmen und Stereolautsprechern, aus visueller und akustischer Schnittstelle und einem elektronischen Handschuh (Data Glove) als taktiler Schnittstelle ist es möglich, dass der Mensch die (illusionäre) Empfindung hat, sich in einer simulierten dreidimensionalen Welt (Cyberspace) ganzkörperlich zu bewegen und zu bestätigen, indem er z.B. Operationen an Objekten der virtuellen Realität vornimmt. Obwohl zur Zeit die Personalcomputer sich noch nicht für eine Echtzeit-Verarbeitung der bei solchen Simulationen anfallenden Datenmengen eignen, so ist doch folgendes Szenarium für ein zukünftiges Geometrielernen denkbar: Der Geometrielerner agiert als Cybernaut in einer dreidimensionalen geometrischen Welt der Formen z.B. in einer zum Erforschen von Polyedern. Er geht

zwischen den Körpern spazieren, betrachtet diese aus der Frosch- oder der Vogelperspektive, klettert auf den Körpern herum, spürt die spitzen Ecken und die scharfen Kanten, rutscht die glatten Körperflächen herunter, dringt in die Körper ein und betrachtet sie von innen; er bewegt die Körper, baut sie zusammen, entfaltet sie in die Ebene, verändert ihre Größe, deformiert sie nach Belieben und nimmt an ihnen Operationen vor, z.B. Schnittoperationen oder er 'spielt' selbst einen Körper und 'erlebt' z.B. das Rollen desselben usw.

Wie wird eine derart computerrepräsentierte Raumgeometrie das 'Bild' von Geometrie bei den Schülern und Schülerinnen prägen? Wie wird sich ihre Beziehung zu der sie umgebenden nicht virtuellen dreidimensionalen Welt verändern?

1.5 Literatur

- Bauer, H., Freiberger, U., Kühlewind, G., Schumann, H. (1998): KÖRPER. Zentrastelle für Computer im Unterricht; Augsburg.
- Bauer, H.: Freiberger, U.; Kühlewind, G.; Schumann, H.: KÖRPERGEOMETRIE (Software mit Manual). Berlin: Cornelsen, 1999.
- Becker, J. P. & Shimada, S. (1997): "The Open-ended Approach" - A New Proposal for Teaching Mathematics. Reston VA: NCTM
- Chen, M. et al. (1988): A Study in Interactive 3-D Rotation Using 2-D Control Devices. In: Computer Graphics, v. 22, no. 4, p.121-129
- Dörfler, W. (1990): Der Computer als kognitives Werkzeug und kognitives Medium. In: Dörfler, W. et al. (Hrsg.): Computer – Mensch – Mathematik, Teubner:Stuttgart, S.51-75
- Klemenz, Heinz (1994-1999): 3D - Geometer (Software mit Manual für Macintosh). Kantonsschule Wetzikon
- Quasem, S.; Laborde, J.-M. (1996): La représentation dans un micromonde de la géométrie dans l'espace: Le cas de Cabri-3D (Arbeitspapier des Laboratoire Leibniz, Université Joseph Fourier; Grenoble)
- Schumann, H. (1995): Körperschnitte - Raumgeometrie interaktiv mit dem Computer. Dümmlers: Bonn
- Schumann, H. (1996): Zum Entwicklungsstand geometrischer Unterrichtsoftware. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1996. Franzbecker; Hildesheim