Heinz Schumann

2 Formenkunde: Vom Würfel zum Parallelflach (Spat) – dynamisch

„Feldspat, Quarz und Glimmer,
die vergess ich nimmer.“

2.1 Einleitung

Zum Begriff „Prisma“ gehören u.a. die Unterbegriffe „Gerades Prisma“ und „Schiefes Prisma“. Die schiefen Prismen, also auch die schiefen Viereckprismen, sind heute im Allgemeinen nicht mehr Bestandteil von Bildungsplänen, so z.B. der des Landes Baden-Württemberg (1994) – obwohl ihre Form, Konstruktion und Berechnung durchaus im Rahmen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe I beherrscht werden können. Ursache dafür ist sicherlich das Problem der zeichnerischen Darstellung von schiefen Prismen und das Problem ihrer Volumenberechnung, da das Prinzip von Cavalieri im genannten Bildungsplan leider nicht mehr als (verbindlicher) Unterrichtsgegenstand ausgewiesen ist.

Bei der Erweiterung und Systematisierung des Viereckbegriffs in Klasse 7/8 bietet es sich an, auch mittels räumlicher Analogiebildung eine Erweiterung und Systematisierung des Begriffs „Viereckprisma“, der den Schülern von der Klasse 5/6 her untergeneralisiert in der Form des Würfels, der quadratischen Säule und des Quaders bekannt ist, vorzunehmen.

Die Entwicklung und das Üben der intellektuellen Techniken „Analogisieren“ und „Generalisieren“ (Wittmann 1974) steht dabei im Vordergrund. (Es sei angemerkt, dass die intelektuellen und heuristischen Techniken vor lauter Diskussion über „fundamentale“ bzw. „zentrale“ Ideen drohen in Vergessenheit zu geraten.)

Das „kleine“ Haus der Vierecke: Quadrat, Rechteck, Raute, Parallelogramm (vgl. Diagramm 2.1)

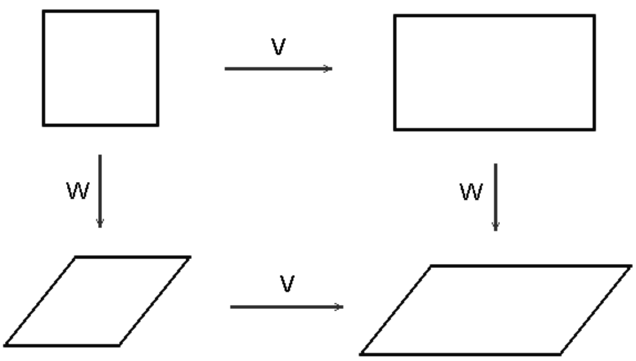

Diagramm 2.1

kann ausgehend vom Quadrat aus auf operative Weise folgendermaßen entwickelt werden: Gleichmäßige Verlängerung bzw. Verkürzung zweier paralleler Seiten (Operation V) führt vom Quadrat zum (nicht quadratischen) Rechteck und von der Raute zum (nicht rautenförmigen) Parallelogramm; Änderung der rechten Innenwinkel in spitze bzw. stumpfe unter Beibehaltung der Kongruenz und Parallelität der Seiten (Operation W) führt vom Quadrat zur (nicht quadratischen) Raute und vom Rechteck zum (nicht rautenförmigen und nicht rechteckigen) Parallelogramm.

Die Operation W ist gut vorstellbar und realisierbar, wenn Quadrat und Rechteck als Gelenkvierecke angesehen werden. Beide Operationen lassen sich auch schön im Zugmodus dynamischer Geometriesysteme simulieren (Schumann 1991); selbstverständlich kann man auch ein entsprechendes materiales Modell basteln.

Die generalisierenden Operationen V und W geben Anlass zu entsprechenden Invarianzuntersuchungen der Vierecke hinsichtlich der Eigenschaften ihrer Diagonalen, ihrer Symmetrie, ihrer Seitenmittenvierecke etc.

Wann man die diesen Viereckformen analogen Körperformen, ausgehend vom Würfel, in analoger Weise entwickeln will, steht man erst einmal vor dem Problem der Konstruktion und Darstellung der entsprechenden Körpervielfalt, das in adäquater Weise mit herkömmlichen Mitteln nur sehr aufwendig zu lösen ist. Hier kann nun mit dem dafür geeigneten Computerwerkzeug KÖRPERGEOMETRIE eine experimentelle Analogisierung und Generalisierung an Bildschirmdarstellungen entsprechender Körper erfolgreich im räumlichen Zugmodus durchgeführt werden.

2.2 Experimentelle Entdeckung der Parallelflach-Typen

In Analogie zu den „ebenen“ Operationen werden im Zugmodus am Würfel und seinen Derivaten die Operation V: gleichmäßige Verlängerung bzw. Verkürzung von vier parallelen Kanten und die Operation W: Veränderung rechter Flächenwinkel zu spitzen bzw. stumpfen Flächenwinkeln (unter Beibehaltung der Kongruenz und Parallelität der Körperkanten) ausgeführt.

Offene Aufgabe: Welche Typen von Körpern lassen sich nun mit diesen Operationen durch Verziehen von Ecken im virtuellen Raum konstruieren?

Um die Auswirkung des Verziehens zu kontrollieren, lassen wir uns das jeweilige Netz ausgeben; an diesem lesen wir die wahre Form der Seitenflächentypen der

Parallelflächner, bestehend aus sechs Flächen, ab. (Aus drucktechnischen Gründen kann hier nur die farblose Körper- und Netzdarstellung wiedergegeben werden; die unterschiedliche Färbung der Seitenflächen unterstützt effektiv die experimentelle Entdeckung der verschiedenen Körpertypen.) Zur weiteren Veranschaulichung benutzen wir die direkt-manipulativ ausgeführte Rotation mittels der wir die Parallelflächner von allen Seiten betrachten können; auch können wir uns die wahre Form von Seitenflächen durch automatische Rotation anzeigen lassen.

Für das Verziehen der Körper zu solchen mit rautenförmigen bzw. quadratischen Seitenflächen dient die Online-Meßoption für die Kantenlängen.

Die ausgedruckten Netze kann man auffalten und die entsprechenden Kanten mit Tesafilm fixieren, um so materiale Modelle neben den Bildschirmmodellen zu erhalten.

Wir starten mit dem Würfel (Abb. 2.1) und üben die Operation V verlängernd und verkürzend aus (Abb. 2.2/3: nicht würfelförmige quadratische Säulen). Anwendung von V auf horizontale Kanten generiert einen echten Quader (Abb. 2.4). (Während die vorausgehenden Tranformationsschritte naheliegen, sind die folgenden recht subjektiv gewählt.) Geeignete Operation W liefert aus dem Würfel ein Parallelflach mit zwei rautenförmigen Seitenflächen und sonst nur quadratischen Seitenflächen (Abb 2.5); anschließende Operation V macht aus der Raute ein echtes Parallelogramm, dabei werden zwei quadratische Gegenflächen zu Rechtecken (Abb. 2.6). Das restliche Quadratpaar wird auch noch rechteckig gemacht (Abb. 2.7); ein weiteres Rechteckpaar wird mittels der Operation W zu einem Parallelogrammpaar (Abb. 2.8). Jetzt verziehen wir so, dass eines der Rechteckpaare des Körpers in Abbildung 2.8 zu einem Quadratpaar wird (Abb. 2.9). Eines der Parallelogrammpaare des Körpers in Abbildung 2.8 machen wir zu einem Paar von Rauten (Abb. 2.10). Diesen Körper verändern wir so, dass aus dem zweiten Parallelogrammpaar auch ein Rautenpaar wird (Abb. 2.11); notwendigerweise wird dabei das Rechteckpaar zu einem Paar von Quadraten. Wir kehren zum Körper in Abbildung 2.5 zurück und verformen ihn so, dass ein Quadratpaar zu einem Paar von Rechtecken wird (Abb. 2.12) usw.

Die Ergebnisse der generalisierenden immer wieder auch spezialisierenden Körpertransformationen können durch Ausdruck der Netze dokumentiert und durch Abspeichern der Körper gesichert werden.

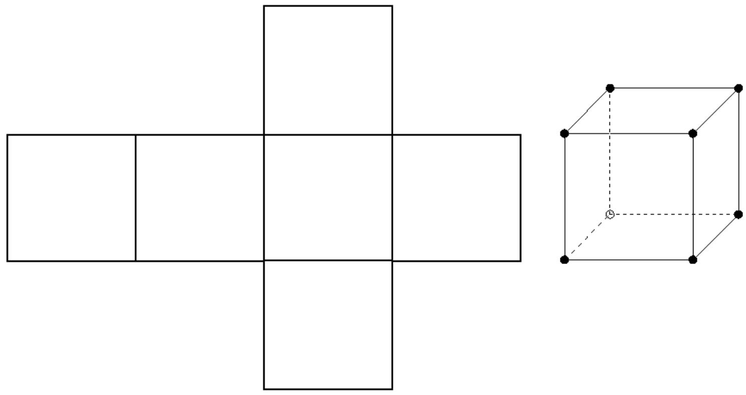

Abb. 2.1

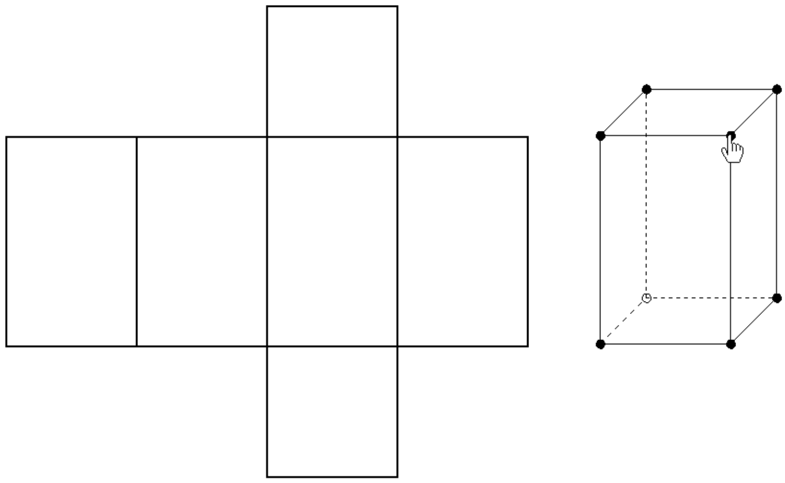

Abb. 2.2

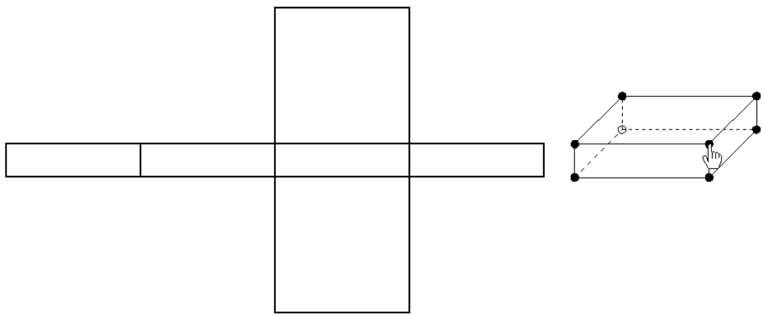

Abb. 2.3

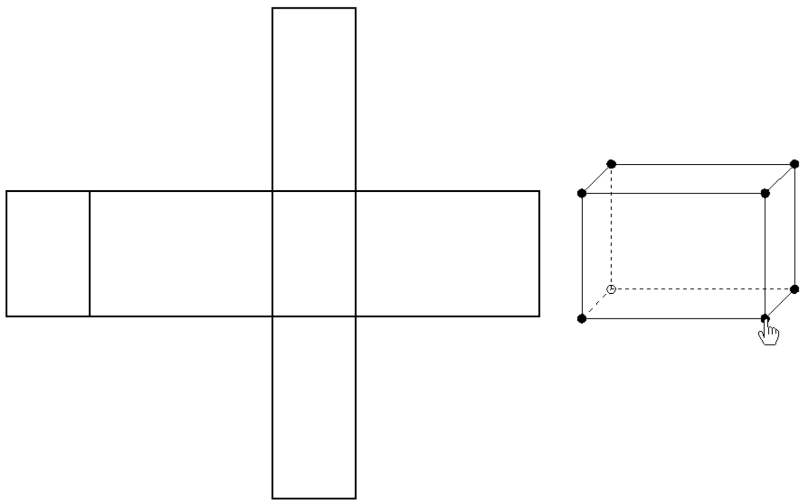

Abb. 2.4

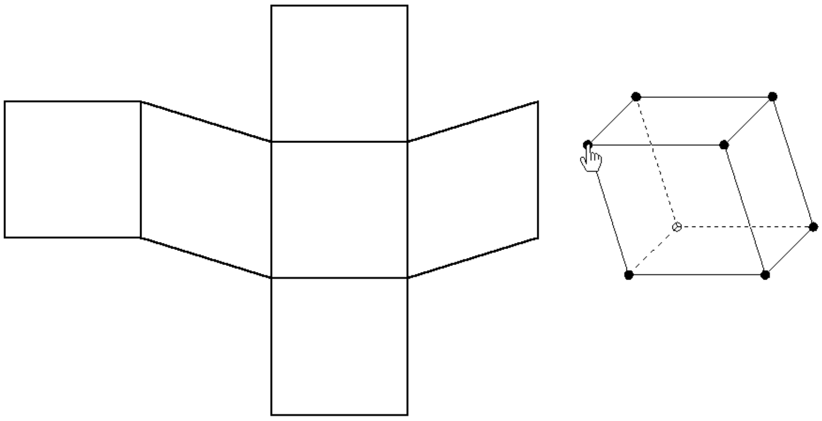

Abb. 2.5

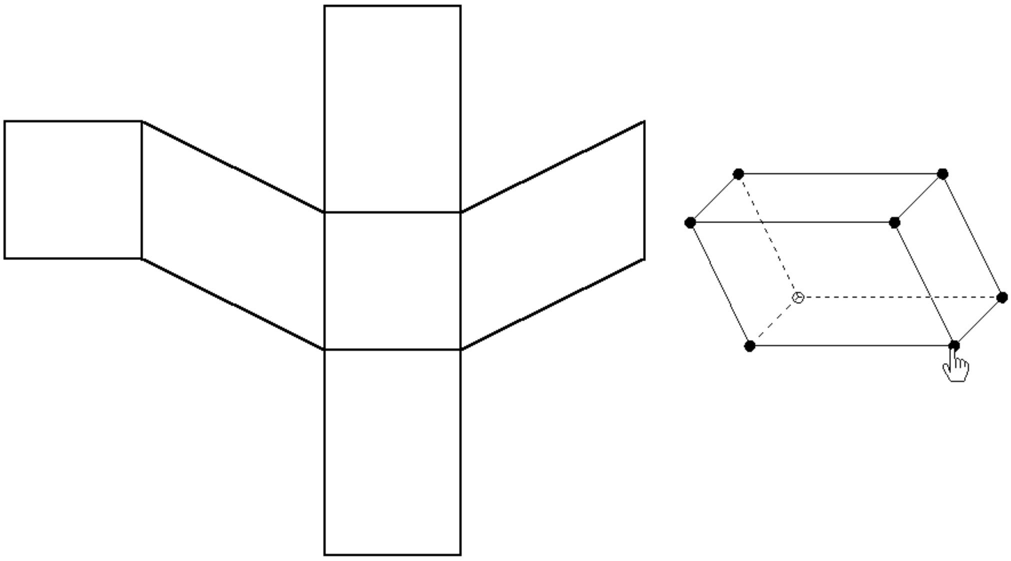

Abb. 2.6

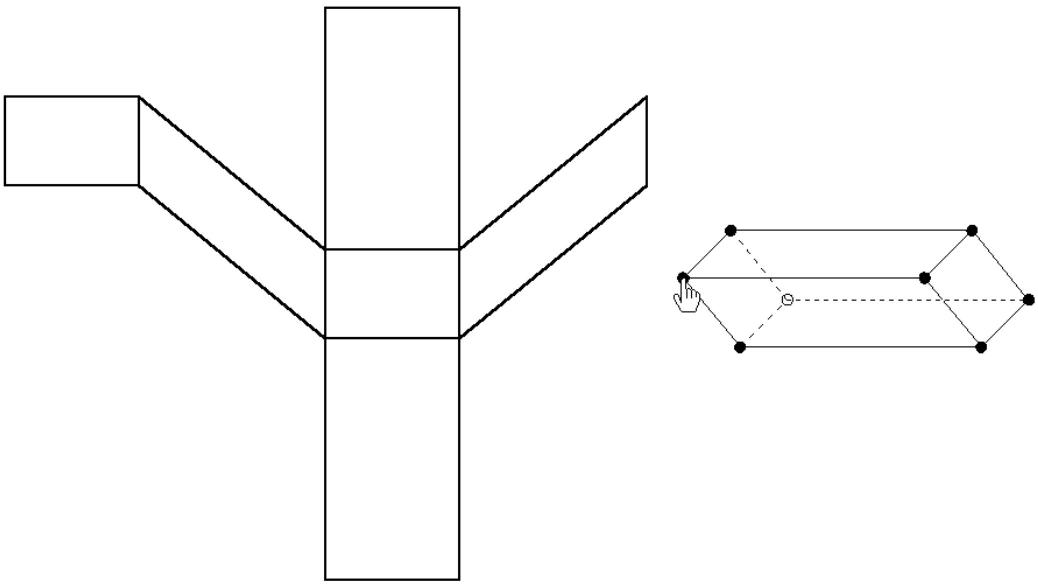

Abb. 2.7

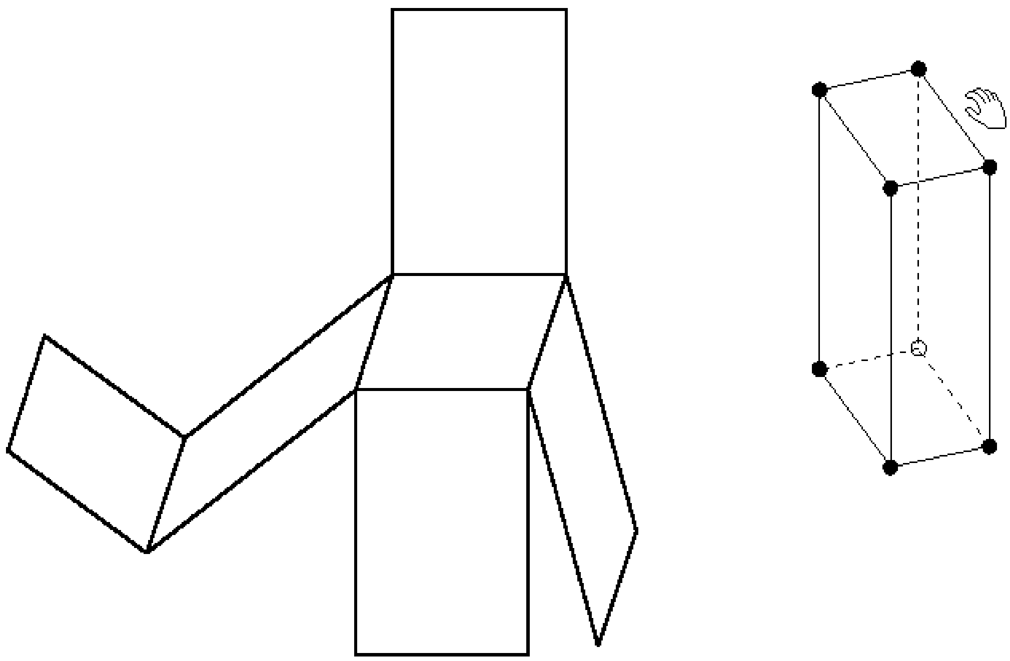

Abb. 2.8

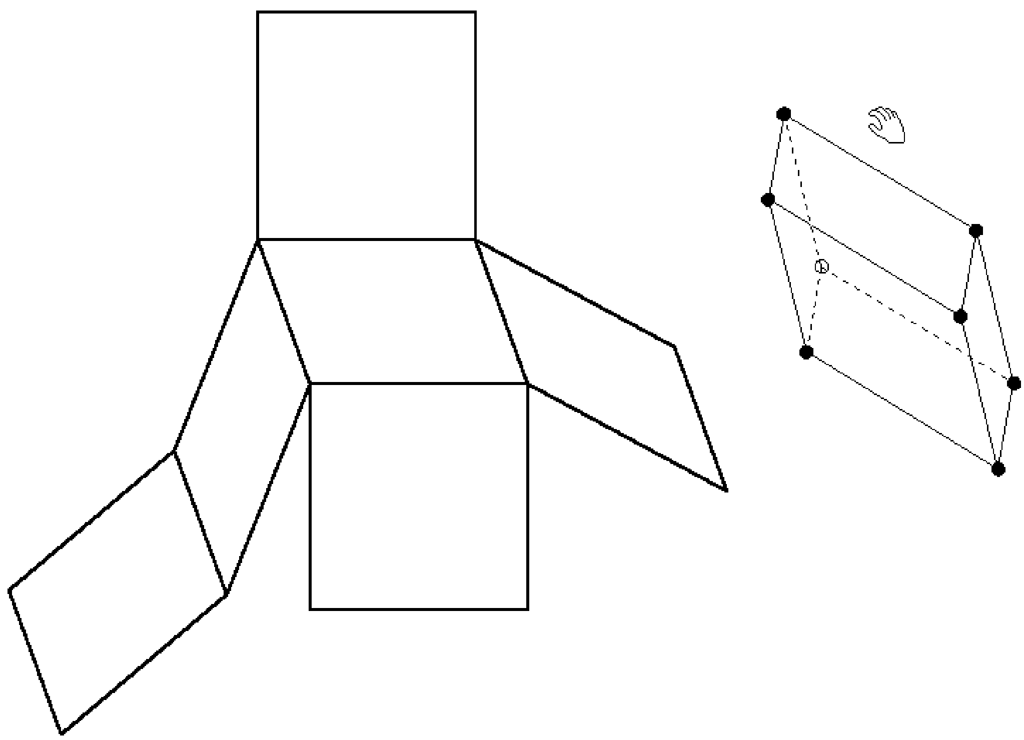

Abb. 2.9

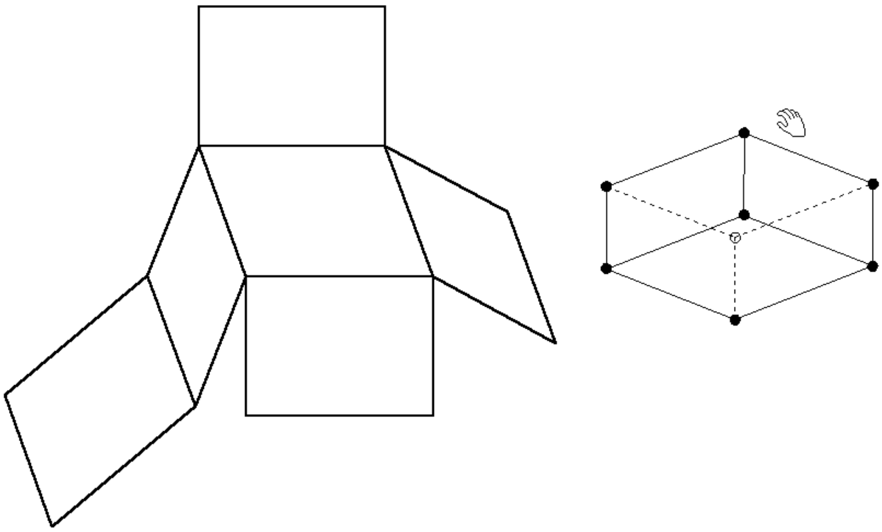

Abb. 2.10

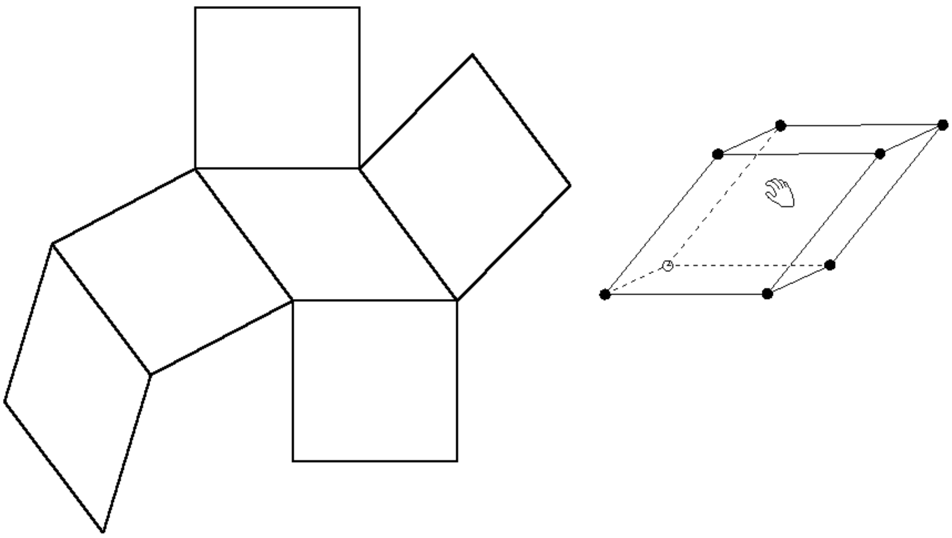

Abb. 2.11

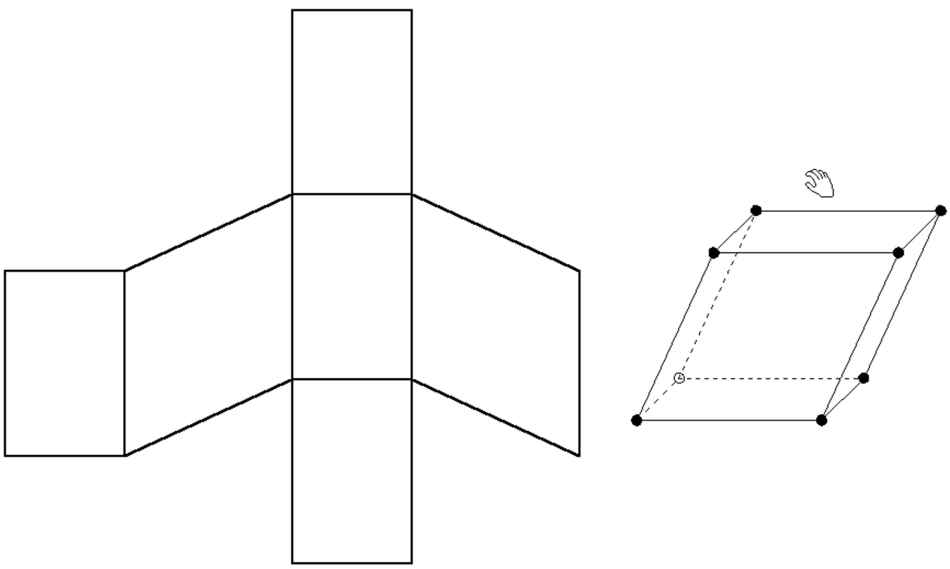

Abb. 2.12

Es gibt insgesamt 14 Parallelflachtypen (abgesehen von Untertypen, wie z.B. Parallelflächner, bei denen alle Rauten kongruent oder nur vier oder nur je zwei kongruent sind).

Das Gesamtergebnis der Entdeckung der Vielfalt an Körpertypen, deren experimentelle Existenz gesichert ist, kann in folgender Übersicht zusammengefasst und systematisiert werden (Diagramm 2.2). Dabei genügt es, die einzelnen Körpertypen durch Angabe der drei in einer Ecke zusammenstoßenden Flächentypen zu symbolisieren (Q steht für Quadrat; Ra für nicht quadratische Raute; Re für nicht quadratisches Rechteck und P für nicht rautenförmiges und nicht rechteckiges Parallelogramm. Typen wie RaRaP, QQRe können natürlich nicht existieren).

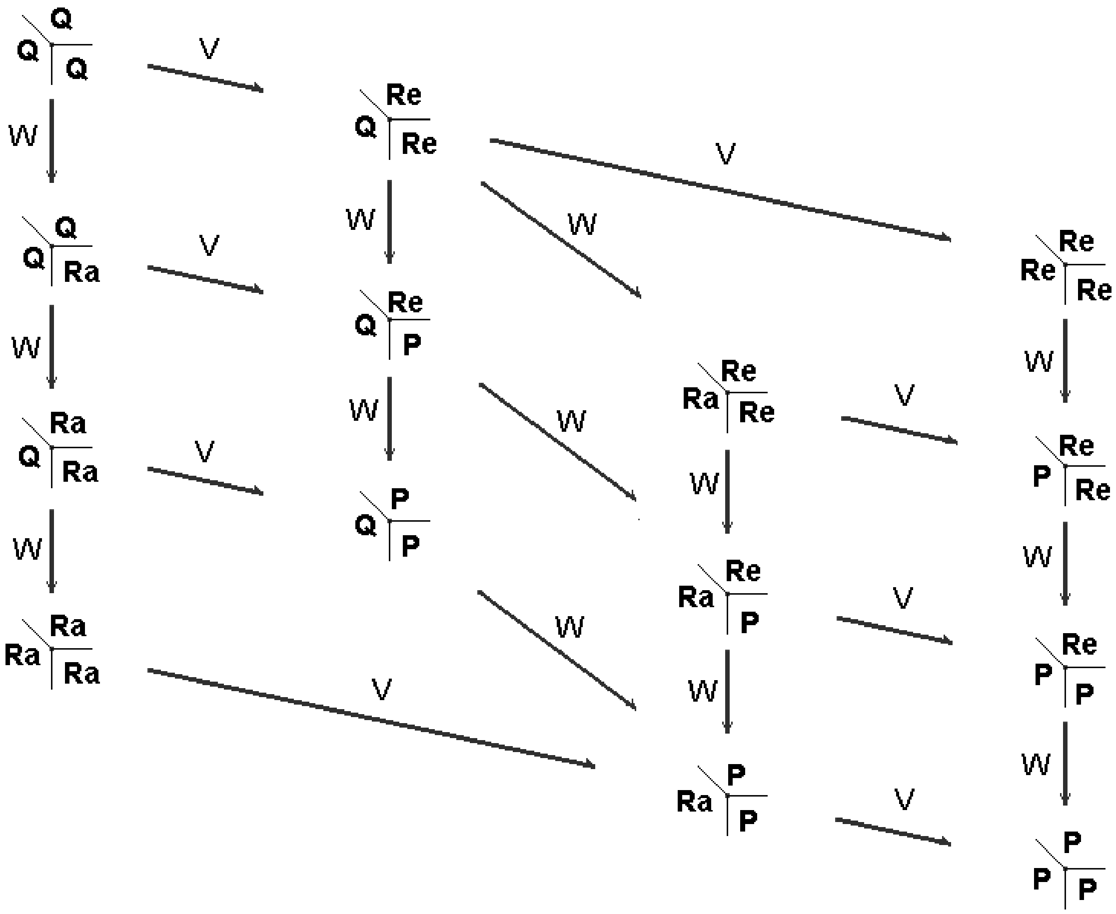

Diagramm 2.2

(Das Schema im Diagramm 2.2 stellt eine Gruppierung mit den Elementaroperationen V und W dar, deren Umkehroperationen und Verkettungen von Operationen und Umkehroperationen von jedem Körpertyp zu jedem anderen führen.)

Die herausgefundenen Parallelflächner können als besondere schiefe Viereckprismen noch zu schiefen Prismen mit konvexer Grundfläche jeglicher Art verallgemeinert werden. Die Abbildung 13 zeigt ein „allgemeines“ schiefes Viereckprisma.

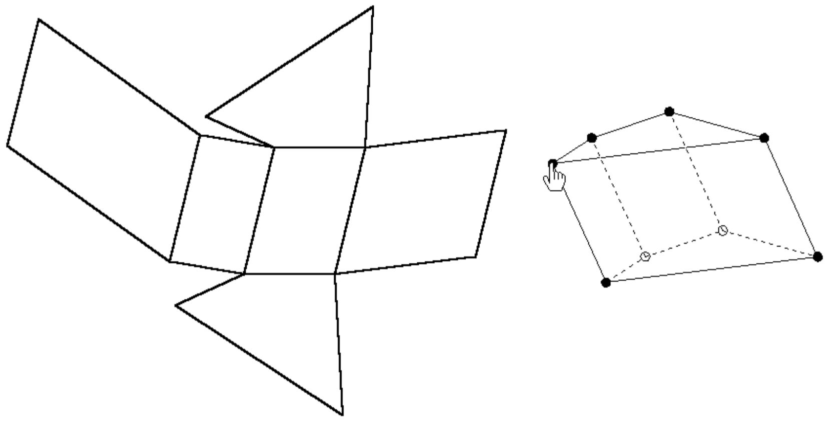

Abb. 2.13

2.3 Invarianzuntersuchungen (Ausblick)

In Analogie zu den Untersuchungen von Invarianzen bei den Operationen V und W in der Ebene:

- Welche Eigenschaften der Diagonalen des Quadrats bleiben erhalten (Diagramm 2.3a)?
- Welche Symmetrieeigenschaften des Quadrats bleiben erhalten (Diagramm 2.3b)?
- Welche Eigenschaften des Seitenmittenvierecks des Quadrats bleiben erhalten (Diagramm 2.3c)?

usw. können wir nun im virtuellen Raum ausgehend vom Würfel die entsprechenden Untersuchungen mittels des Computerwerkzeugs KÖRPERGEOMETRIE führen.

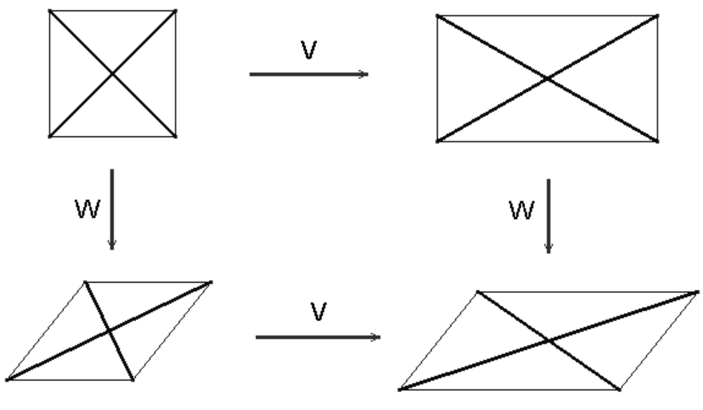

Diagramm 2.3a

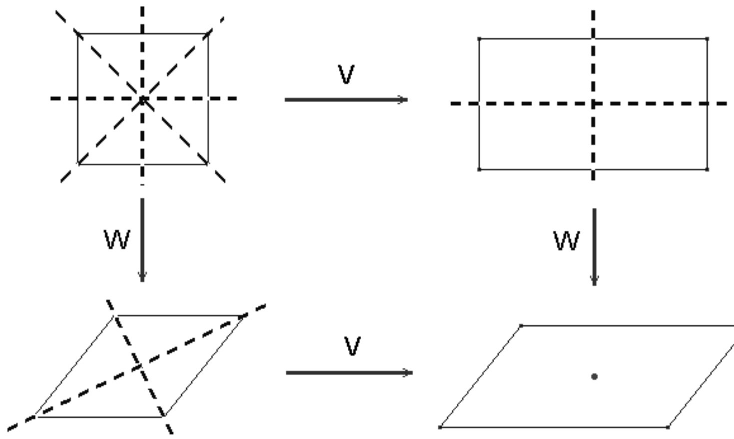

Diagramm 2.3b

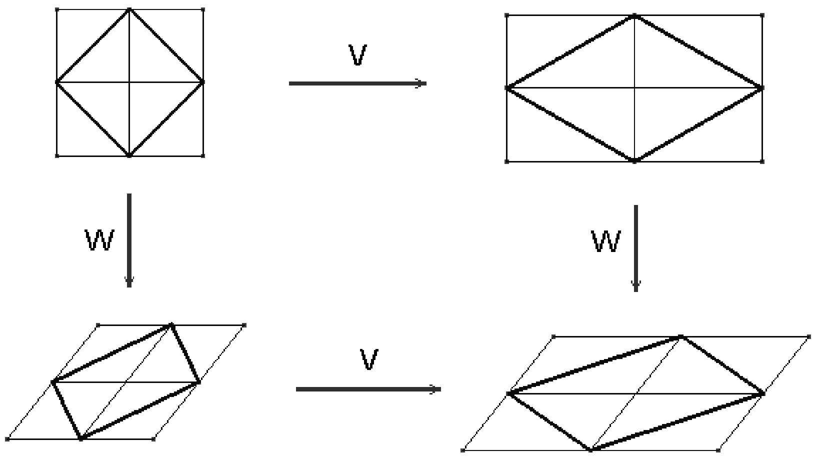

Diagramm 2.3c

Schlussbemerkung: Mit dem Computerwerkzeug KÖRPERGEOMETRIE lassen sich noch andere räumliche Analogisierungen vornehmen, so z.B. können besondere Zerlegungen des gleichseitigen Dreiecks zu entsprechenden Zerrlegungen des gleichkantigen Tetraeders analogisiert werden.

2.4 Literatur

Bauer, H., Freiberger, W., Kühlewind, G., Schumann, H. (1999): KÖRPERGEOMETRIE (Software mit Manual). Berlin: Cornelsen

Ministerium für Kultus und Sport B. – W. (Hrsg.) (1994): Bildungsplan für die Realschule. In: Kultus und Unterricht. Lehrplanheft 3, Bildungsplan für das Gymnasium. In: Kultus und Unterricht. Lehrplanheft 4

Schumann, H. (1991): Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer. Stuttgart: Teubner u. Metzler.

Wittmann, E. (1974): Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig: Vieweg