

3 Automatisches Verräumlichen ebener Figuren

3.1 Einleitung

Dem Modus des „Verräumlichen“ oder „Dreidimensional-Machens“ kommt im Raumgeometrie-Unterricht eine wichtige Brückenfunktion zwischen ebener und räumlicher Geometrie zu, die sowohl in der Anwendung, Übertragung und Analogisierung ebener geometrischer Sachverhalte als auch in der Entwicklung und Übung räumlichen Vorstellungsvermögens begründet ist.

Das Verräumlichen ebener Figuren als eine manipulative Tätigkeit bleibt im herkömmlichen Raumgeometrie-Unterricht im wesentlichen beschränkt auf das Erzeugen von Körpermodellen aus materialisierten Kanten oder Flächenelementen (z.B. solchen polygonaler Form) oder aus elementaren Raumformen (z.B. würfelförmigen) nach vorgegebenem Dreitafelbild. (Das Generieren von Polyedermodellen oder anderen räumlichen Formen als Flechtwerke etc. ist eher von marginaler Bedeutung.)

Das Verräumlichen als eine manipulative Schülertätigkeit erfordert einen nicht unerheblichen Material- und Zeitaufwand – mit dem Vorteil ganzheitlicher Wahrnehmung. In tutoriellen Lernumgebungen können die manipulativen Tätigkeiten mehr oder weniger effizient computergrafisch simuliert werden. So lässt sich das Auffalten

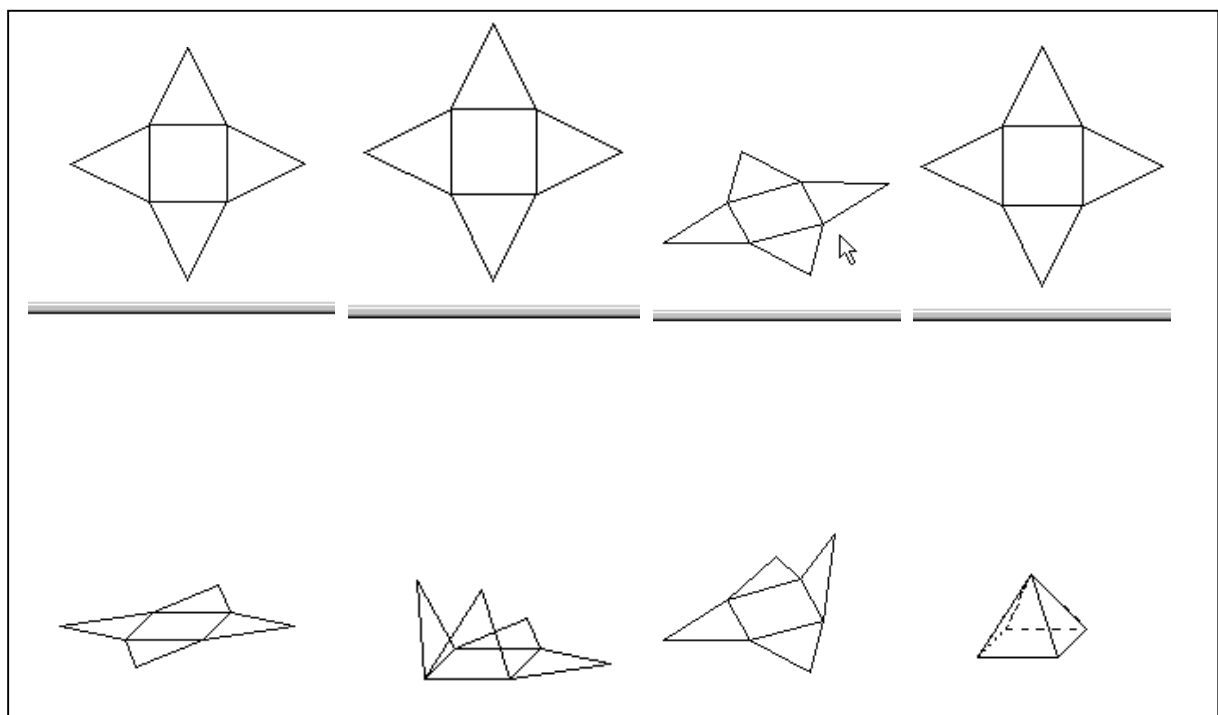


Abb. 3.1.1- 4

materialer Körpernetze, das als ein taktiler Vorgang zum klassischen Standard des Verräumlichens gehört, durchaus computergrafisch darstellen und bei festgewählter Standfläche im Programm NETS interaktiv steuern und visualisieren (Abb. 3.6.1-4, für ein besonderes Netz der quadratischen Pyramide). Eine solche computerisierte Lernumgebung kann aber nicht mit einer entsprechend materialisierten konkurrieren. Effektiver ist die computergrafische Simulation des Körperbauens nach vorgegebenem Dreitafelbild (Abb. 3.2.1) mit entsprechender Kontrolle in BAUWAS. Nach Kontrolle des Bauergebnisses (Abb. 3.2.2) lassen wir den Körper drehen, um ihn von allen Seiten zu betrachten (Abb. 3.2.3).

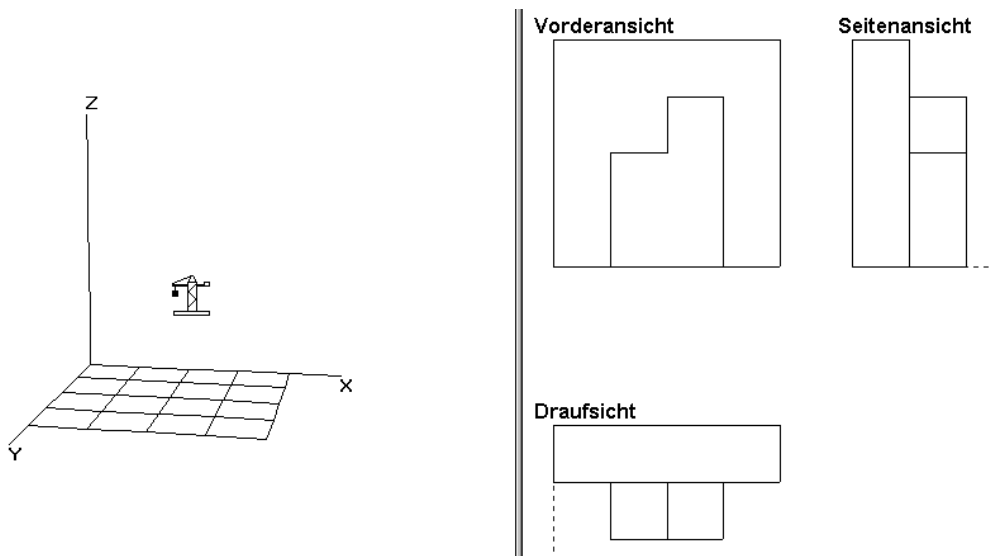


Abb. 3.2.1

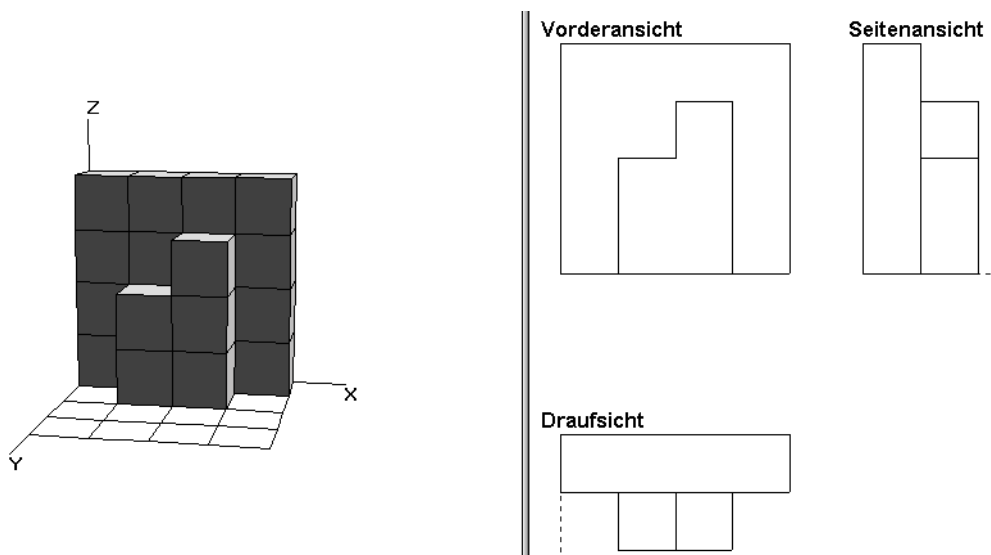


Abb. 3.2.2

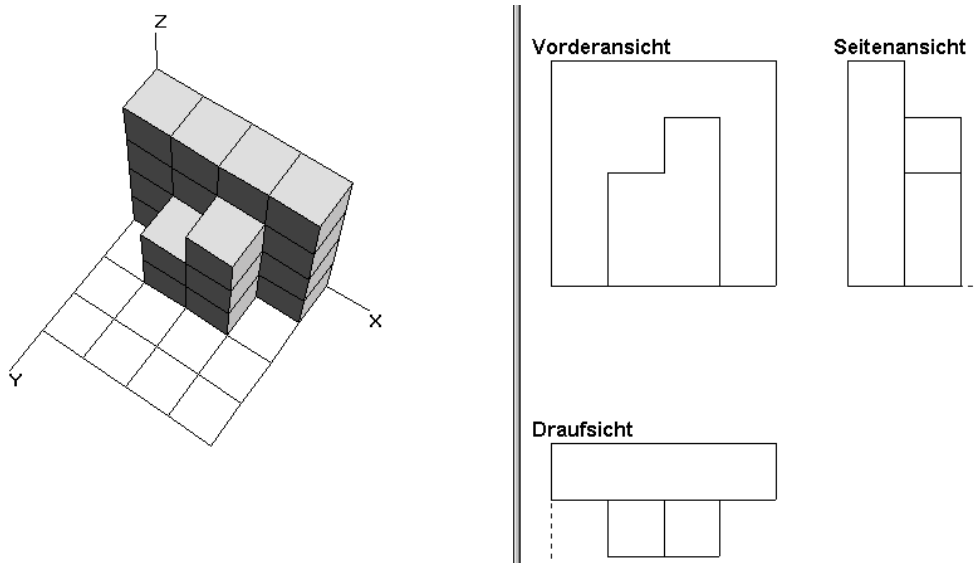


Abb. 3.2.3

Das Veranschaulichen von z.B. Rotationskörpern durch Rotierenlassen von ebenen Profilen um „Stricknadelachsen“ oder durch Aufblättern von Heften mit dem Hefrücken als „Rotationsachse“ führt nicht auf Körpermodelle, allenfalls werden gewisse Vorstellungen von solchen Körpern und ihrer Entstehung geweckt.

Mit der Nutzung entsprechender computergrafischer Werkzeuge können wir die Möglichkeiten des Erzeugens von Körpern aus ebenen Figuren im Raumgeometrie-Unterricht erweitern oder auch wirksamer gestalten. (Das gilt ebenso für das „Verebenen“ als Umkehrung des „Verräumlichen“.) Die computerunterstützten Generierungsmöglichkeiten sind, inhaltlich gesehen, nicht neu; sie sind immer schon in Gestalt mentaler Vorstellungen angestrebt worden. Computergrafik liefert jetzt die adäquaten Visualisierungen im virtuellen Raum des Bildschirms. Da diese Art des Verräumlichen im Allgemeinen per Knopfdruck erfolgt, nennen wir sie „automatisch“.

Im folgenden zeigen wir an verschiedenen Beispielen automatisches computerunterstütztes Verräumlichen.

3.2 Beispiele für automatisches Verräumlichen

3.2.1 Vom Profil zum Rotationskörper

Die Abbildung 3.3.1 zeigt ein kreisförmiges Profil mit einer Rotationsachse, das wir automatisch Verräumlichen oder direkt-manipulative zu einem facettierten Torus

aufziehen (Abb. 3.3.2), um diesen (Abb. 3.3.3) dann von allen Seiten anzuschauen (Abb. 3.3.4). Das geht mit dem Werkzeug KÖRPERGEOMETRIE entsprechend für alle in der schulischen Raumgeometrie vorkommenden Rotationskörper.

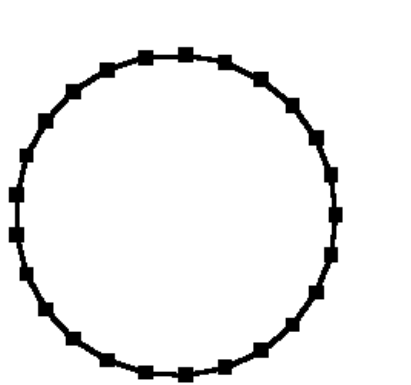


Abb. 3.3.1

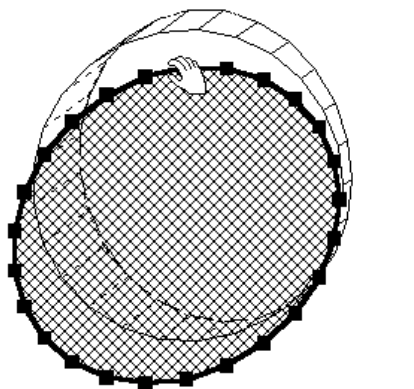


Abb. 3.3.2

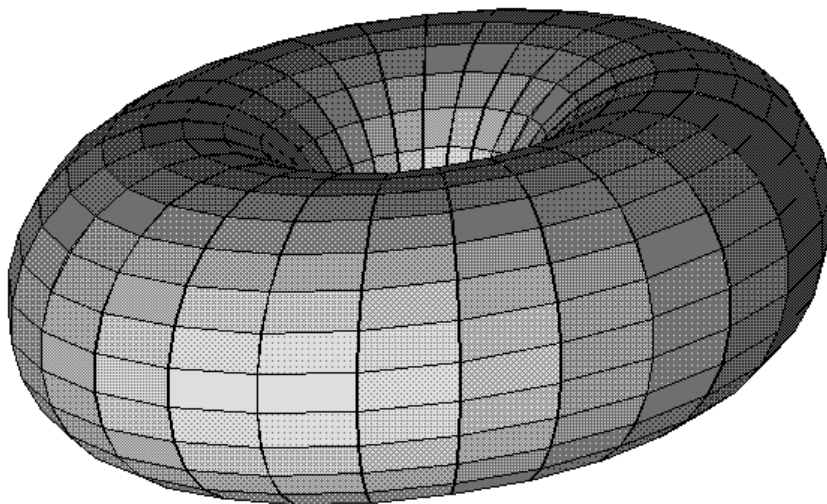


Abb. 3.3.3

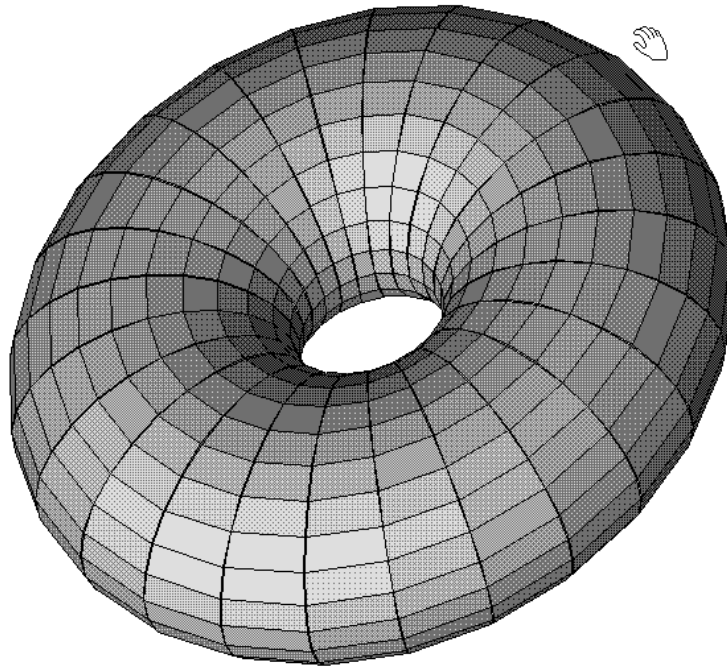


Abb. 3.3.4

3.2.2 Vom Vieleck zum Prisma

Wir zeichnen mit einem Low-Cost-3CAD-System (CAD3-D) ein ebenes Polygon (Abb. 3.4.1; ein nicht konvexes Sechseck in zentral-projektiver Darstellung) und Verziehen (Extrudieren) dieses in den Raum zu einem geraden Prisma (in Abb. 3.4.2 noch als Draht- bzw. Kantenmodell; in Abb. 3.4.3 als durch Beleuchtungseffekte plastisch wirkendes Körpermodell), das durch Drehen von allen Seiten betrachtet werden kann (Abb. 3.4.4).

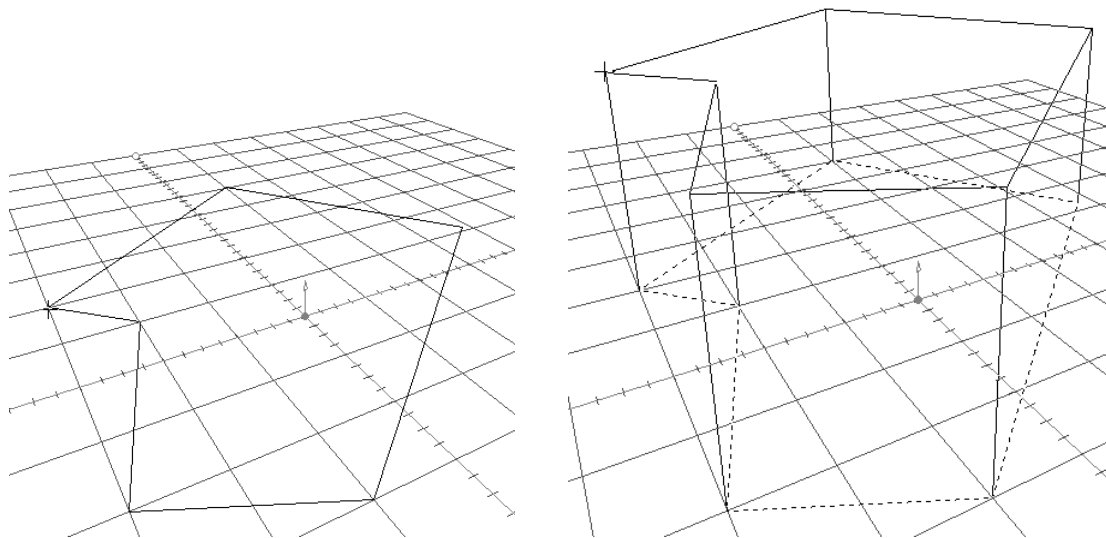


Abb. 3.4.1/2

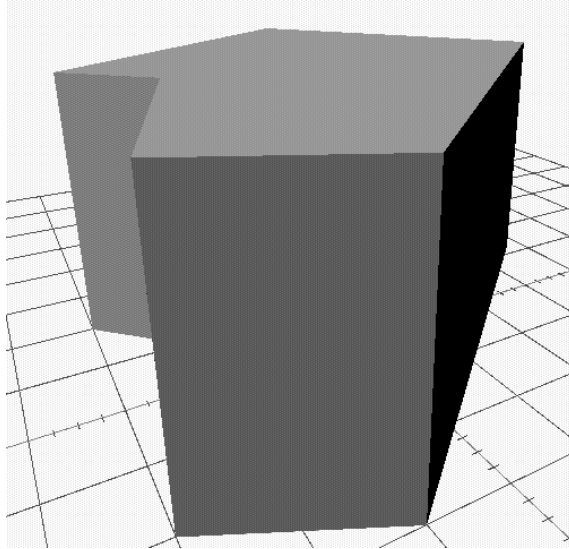


Abb. 3.4.3

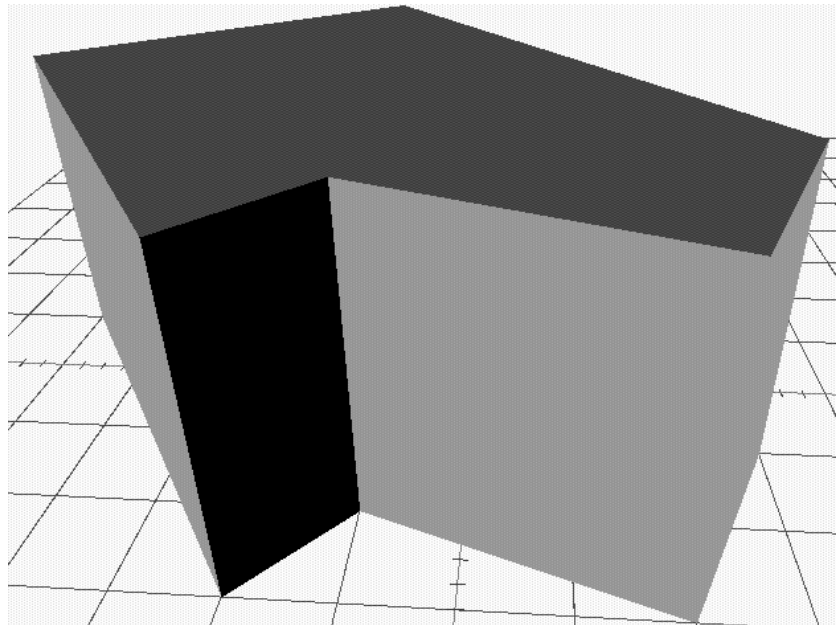


Abb. 3.4.4

3.2.3 Vom Grundriss zum Labyrinth

Wir zeichnen den Grundriss eines Labyrinths mit einem sogenannten Homedesigner (Home Design 3D) wie in Abbildung 3.5.1; lassen diesen automatisch extrudieren, um es dann von oben im „Rundflug“ zu betrachten (Abb. 3.5.2/3) und begehen es anschließend (Abb. 3.5.4).

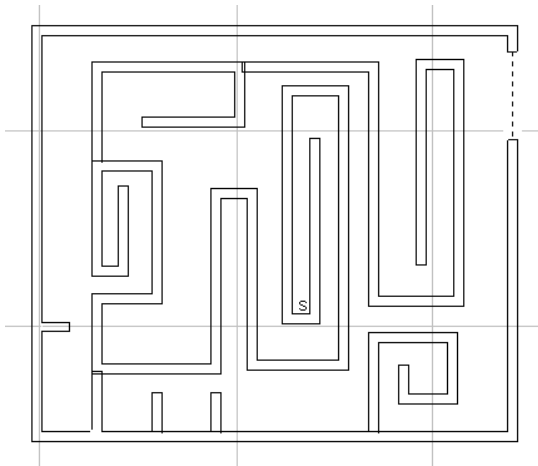


Abb. 3.5.1

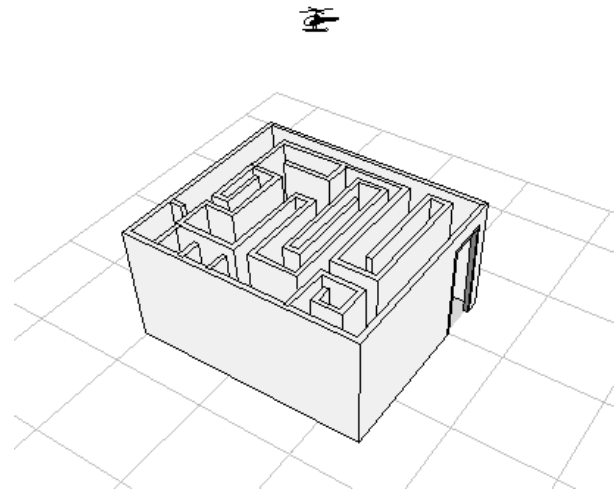


Abb. 3.5.2

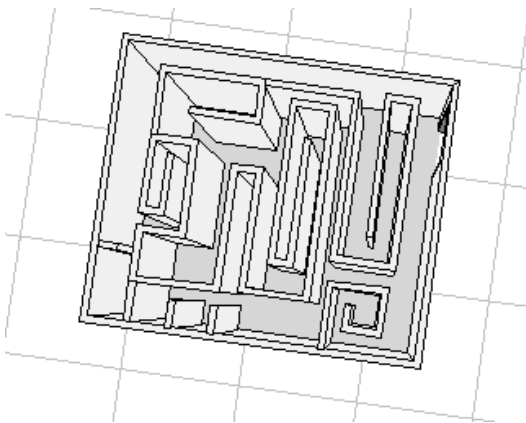


Abb. 3.5.3

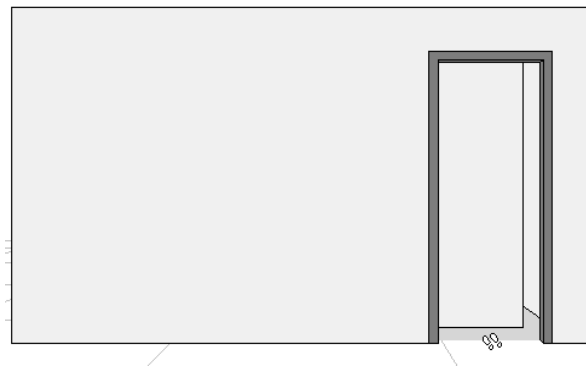


Abb. 3.5.4

3.2.4 Vom Dreitafelbild zum Körper

Zur Generierung z.B. eines Quaders gehen wir in CAD-3D folgendermaßen vor: Im Grundriss (G) wird ein Rechteck selbst zu wählender Dimensionierung aufgezogen (Abb. 3.6.1), danach entsprechend der Aufriss (A) des Quaders (Abb. 3.6.2); dabei wird der Seitenriss automatisch festgelegt. Man gewinnt den referenzierbaren Quader in parallelprojektiver Darstellung (3.6.3). Durch Einzeichnen weiterer Risse erzeugt man weitere Quader, die mit der booleschen Operation des Vereinigens aus Quadern zusammengesetzte Körper ergeben (Abb. 3.6.4)

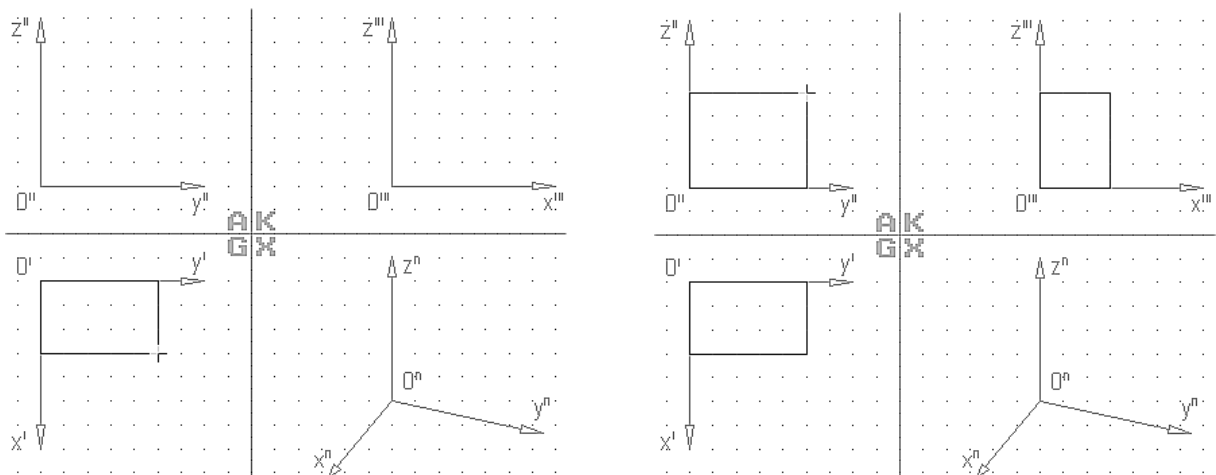


Abb. 3.6.1/2

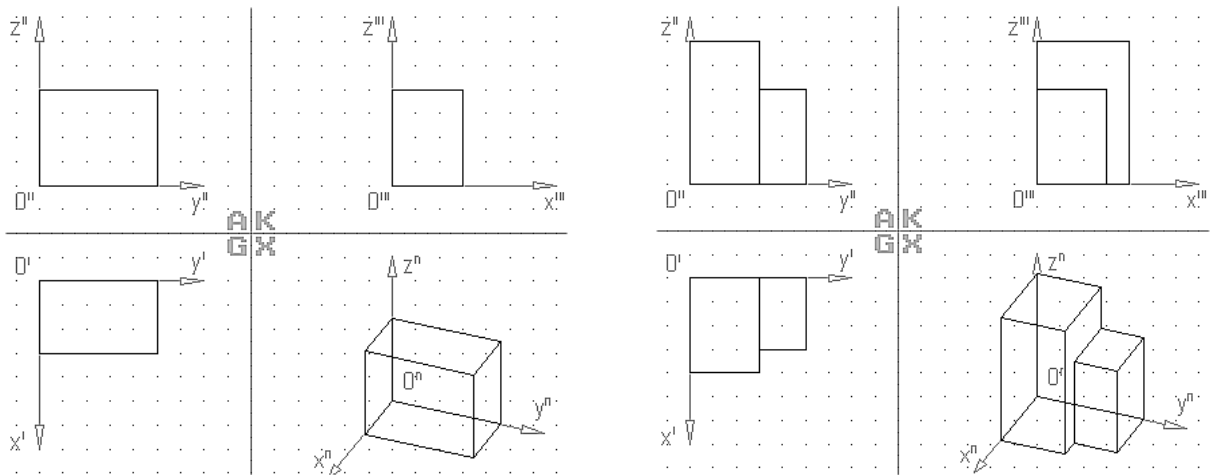


Abb. 3.6.3/4

3.2.5 Vom ebenen Dreieck zum Kugeldreieck

Wir benutzen das plattformunabhängige geometrische Konstruktionswerkzeug CINDERELLA, um Konfigurationen der (reellen) euklidischen Ebene automatisch auf die Kugeloberfläche zu transformieren: In Abbildung 3.7.1 wird ein Dreieck ABC mit seinen Trägergeraden und eine Gerade g mit den linear geordneten Punkten Q, P, R auf die Kugel abgebildet. Das Dreieck geht in ein Kugeldreieck über, das von Großkreisen (das sind Kreise, deren Mittelpunkte mit dem Kugelmittelpunkt übereinstimmen) getragen werden; die Gerade wird in einen Großkreis übergeführt (Großkreise auf der Kugel entsprechen also den Geraden in der Ebene); die lineare Ordnung der

Geradenpunkte geht verloren (so liegt jetzt z.B. P sowohl zwischen Q und R als auch zwischen R und Q).

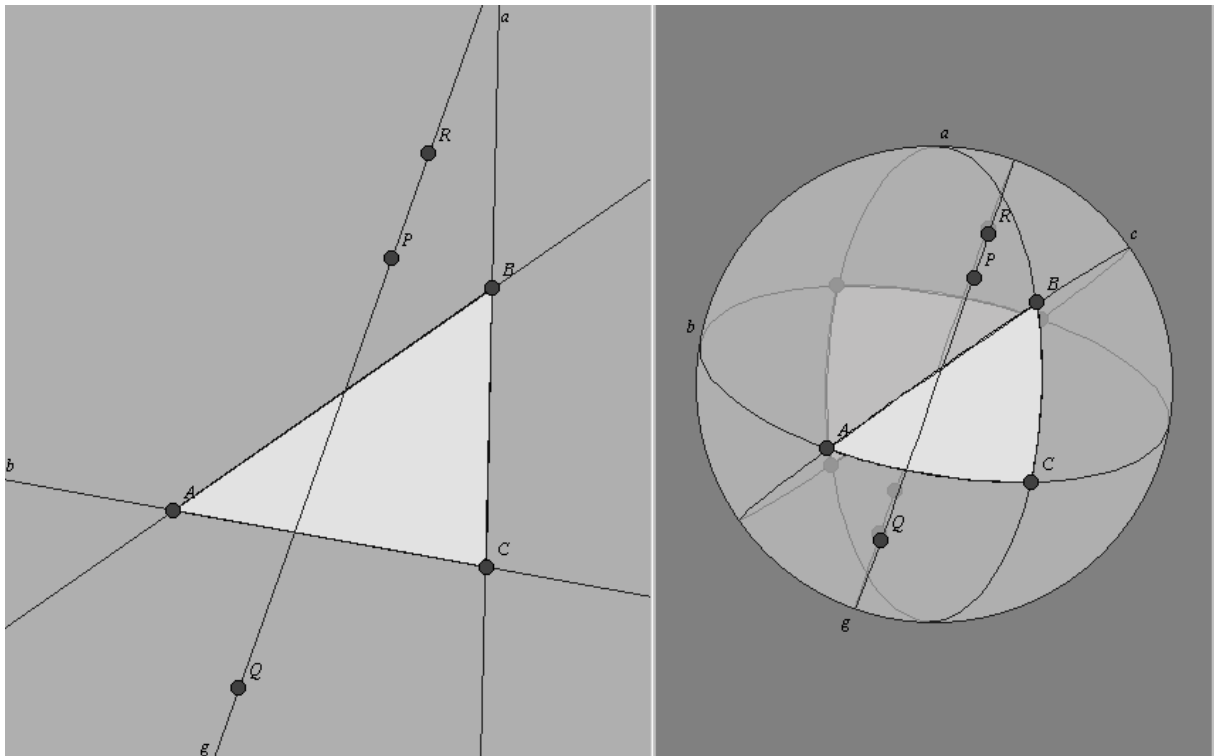


Abb. 3.7.1

Der Schnittpunkt S zweier Geraden wird zum Schnittpunkt zweier „Großkreisgeraden“ (Abb. 3.7.2).

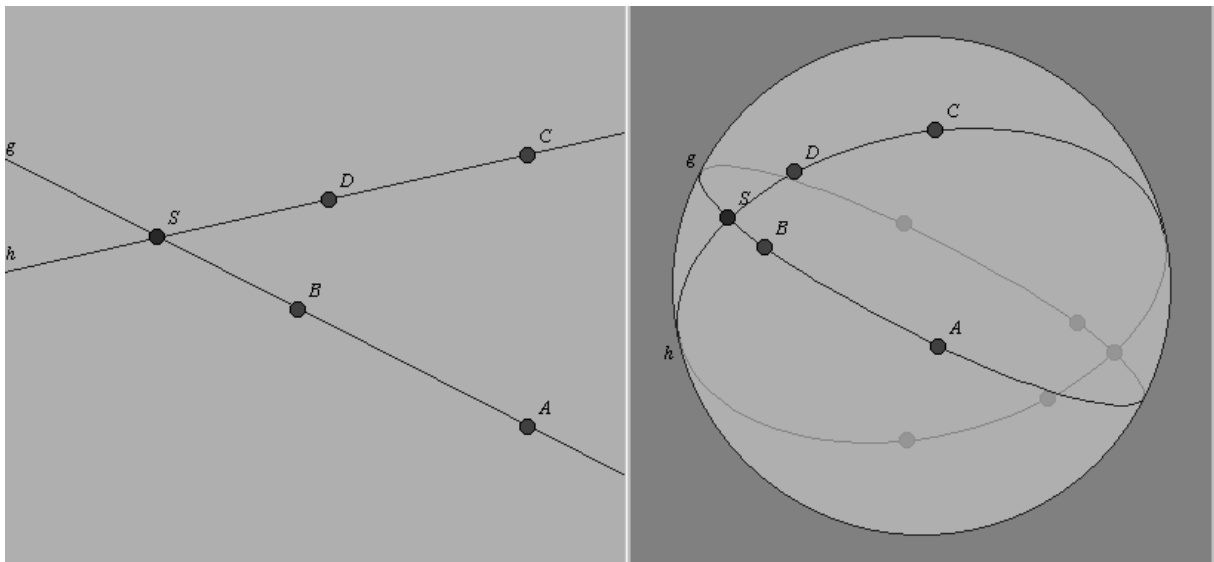


Abb. 3.7.2

Zwei verschiedene parallele Geraden ergeben Großkreise, die einander schneiden (Abb. 3.7.3) – das war zu erwarten, denn zwei verschiedene Großkreise schneiden sich immer. Auf der Kugel gibt es also keine Parallelität von Großkreisgeraden.

Folglich existiert keine Parallelverschiebung, Punktspiegelung, Schubspiegelung und zentrische Streckung; es gibt keine (inkongruenten) ähnlichen Dreiecke und natürlich keine Ähnlichkeitsgeometrie.

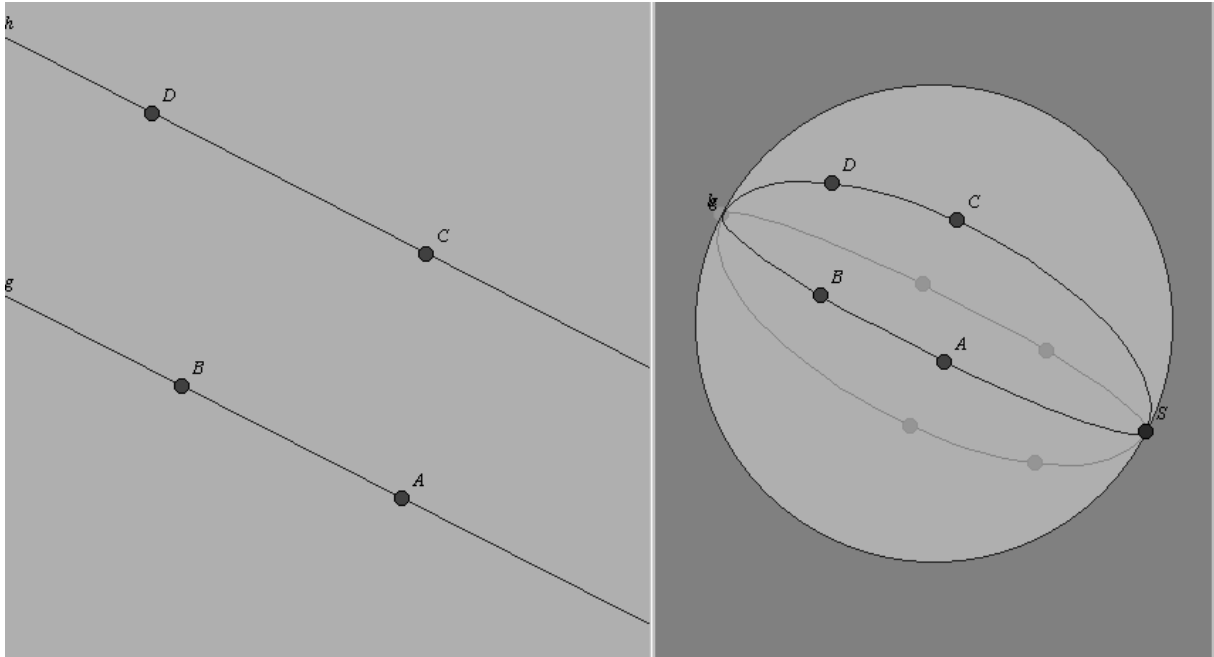


Abb. 3.7.3

Die Kongruenzgeometrie als Spiegelungsgeometrie mit dem „Dreispiegelungssatz“ kann aber voll entwickelt werden. Die Abbildung 3.7.4 zeigt die Analogie zwischen Geraden- und Großkreisspiegelung.

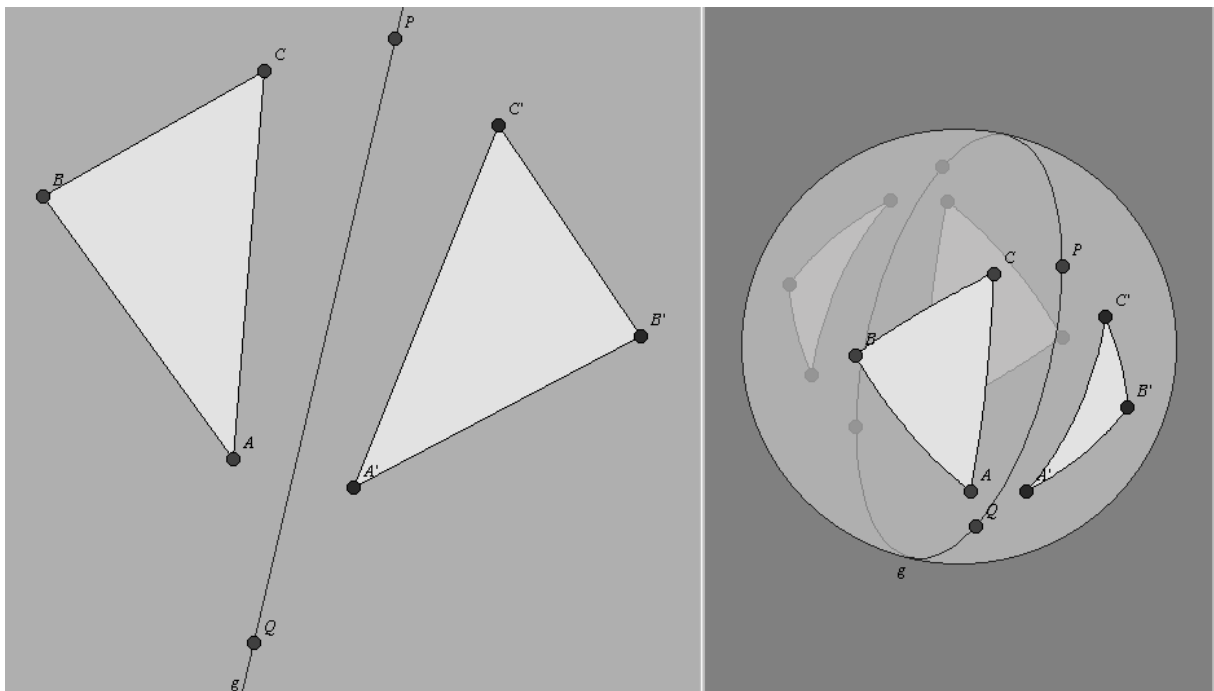


Abb. 3.7.5

Die Hintereinanderausführung zweier Großkreisspiegelungen ist stets eine Drehung (Abb. 3.7.5).

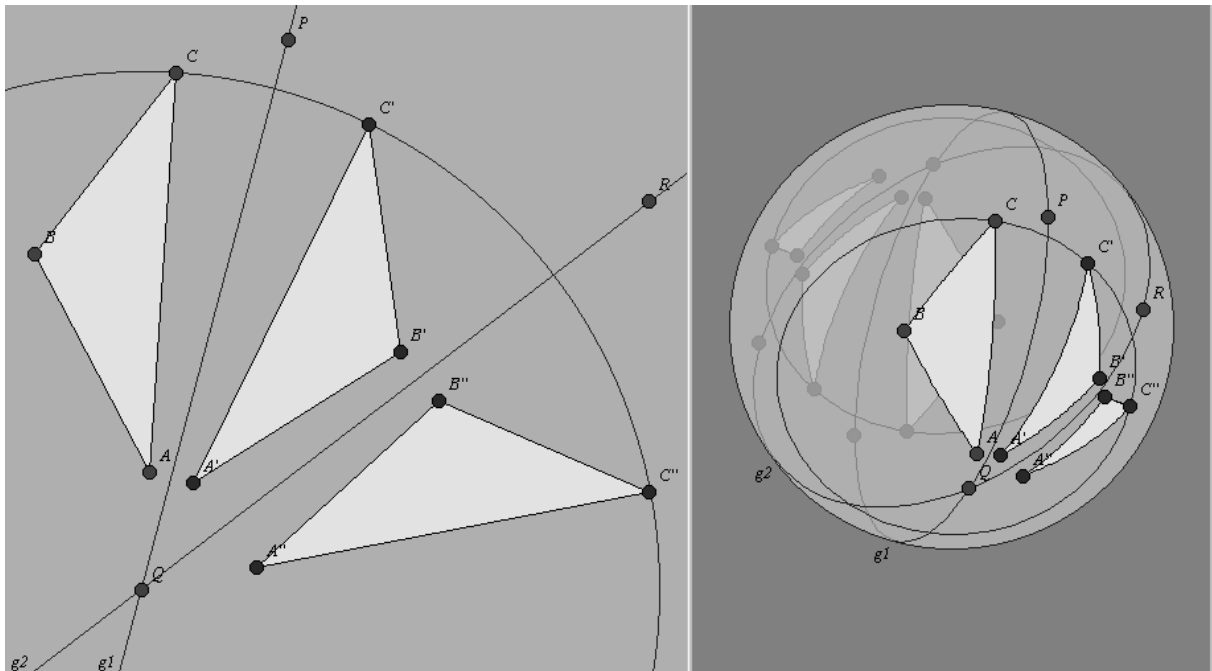


Abb. 3.7.5

In der Abbildung 3.7.6 ist einer der Fälle des Dreispiegelungssatzes illustriert.

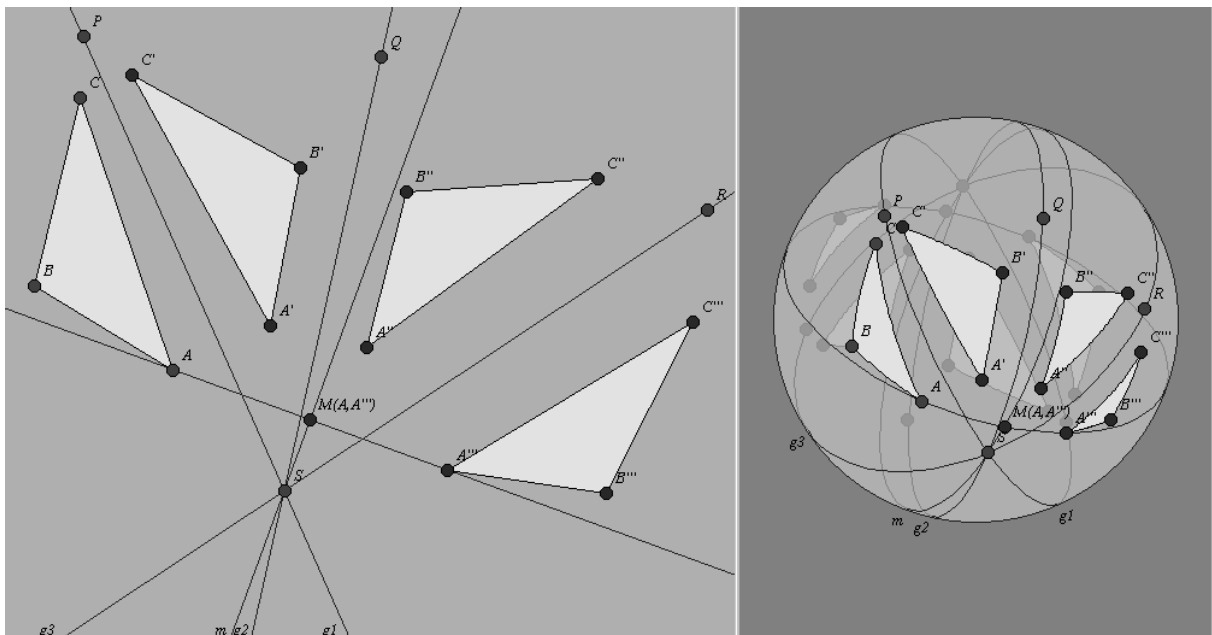


Abb. 3.7.6

Die in der (reellen) euklidischen Ebene konstruierten Schnittpunktfigurationen am Dreieck, z.B. die Mittelsenkrechten-, Winkelhalbierenden- und Höhenschnittpunktfigur, lassen sich automatisch auf die Kugel übertragen (Abb. 3.7.7-9).

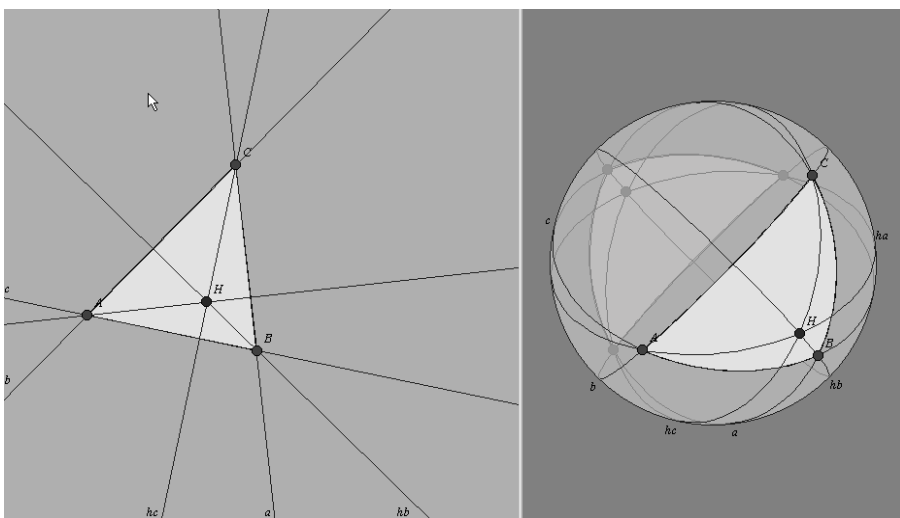
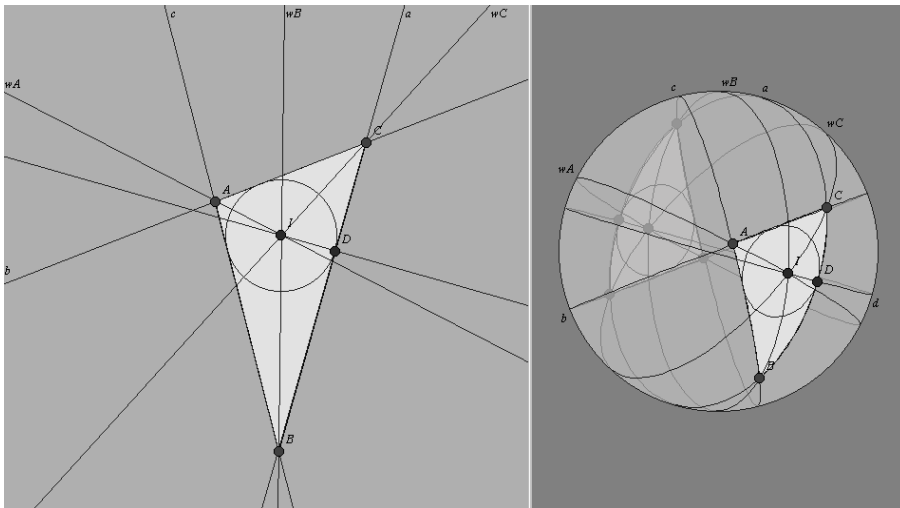
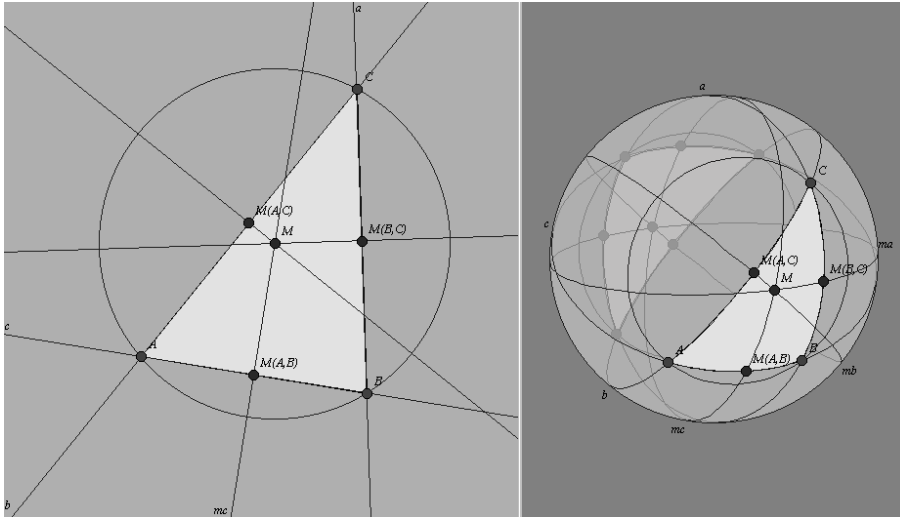


Abb. 3.7.7- 9

Durch Variation der Lage der Eckpunkte A,B,C auf der Kugel variieren wir die sphärischen Konfigurationen.

Bei der Transformation eines Dreiecks wird seine Innenwinkelsumme größer als 180° ; sie liegt immer zwischen 180° und 540° . – Zu den vier Dreieckskonstruktionen aus Dreiecksseiten und Innenwinkeln treten auf der Kugel die Konstruktion aus drei Winkeln und die Konstruktion aus zwei Winkeln mit einer Gegenseite hinzu...

3.3 Schlussbemerkung

Es ist wünschenswert, dass verschiedene Möglichkeiten des computerunterstützten Verräumlichens als Modul in einem Software-Werkzeug zusammengefasst werden.

3.4 Verwendete Programme

BAUWAS 3.0 (Konstruktionsprogramm zur Entwicklung von Raumvorstellung)
Autoren: Meschenmoser et al.; MACH MIT e.V.

CAD-3D 2.0 (CAD-System für Geometrisches Zeichnen)
Autor: Stachel, H.; TU Wien 1994

CAD3-D 1.0 (Low-Cost-CAD-System)
Autoren: Davis, S. et al.; Smart Software Inc. 1996

CINDERELLA 1.0 (Interaktive Geometrie-Software)
Autoren: Richter-Gebert, J. u. Kortenkamp, U.; Heureka-Klett, 1999

Home Design 3D 3.0 (Programm für die Haus- und Wohnraumplanung)
Autoren: Davis, S. et al.; Smart Software Inc. 1995

KÖRPERGEOMETRIE 1.0 (Visualisierungs- und Konstruktionswerkzeug)
Autoren: Bauer, H. et al.; Cornelsen Software, 1999

NETS 1.0 (Experimentelle Software zur interaktiven Behandlung von Netzen)
Autoren: Schumann, H. u. Alavidze, T. ; PH Weingarten 1997

Vom Polarkoordinaten-Gitter zum Gradnetz auf der Kugel

