Heinz Schumann

7 Anwendungen des Prinzips von Cavalieri in computergrafischer Darstellung

7.1 Einleitung

Die Behandlung der „Körperberechnungen“ in den Klassenstufen 9/10 zeichnet sich zunehmend durch eine Vernachlässigung der mathematischen Herleitung der verwendeten Formeln ab. So steht im Bildungsplan für das Gymnasium Baden-Württemberg (1994): „Für die Herleitung der Formeln genügen durch Skizzen veranschaulichte Plausibilitätsbetrachtungen“. Z. B. werden die Volumenformel der Pyramide und die der Kugel in mathematischen Unterrichtswerken (u.a. in „Schnitt*punkt* 9“) nur aufgrund von Umfüllversuchen plausibel gemacht; dabei wird den Schülern suggeriert, dass man mittels eines physikalischen Experiments die Faktoren $\frac{1}{3}\cdot$..... bzw. $\frac{4}{3}\cdot$...... exakt messen könne.

Exkurs: Für die mathematische Herleitung der genannten Volumenformeln sind infinitesimale Prozesse unumgänglich. Das gilt insbesondere auch für die Pyramide, denn im Allgemeinen lässt sich eine Pyramide nicht so in endlich viele Teilkörper zerlegen, dass mit diesen ein Prisma zusammengesetzt werden kann.

Es sind nur wenige Pyramiden bekannt, die sich in einen Satz von Teilkörpern zerlegen lassen, mit denen ein Prisma von gleicher Grundfläche und von einer Höhe gleich einem Drittel der Pyramidenhöhe zusammengesetzt werden kann. Eine von diesem Typ ist von Hill (Hill 1896) gefunden worden. Wir verwenden das Werkzeug KÖRPERGEOMETRIE, um diese Pyramide aus einem Würfel herauszuschneiden (Abb. 7.1.1). Durch einen zur Standfläche parallelen Schnitt in einem Abstand von einem Drittel der Körperhöhe, einen vertikalen Schnitt durch Kantenmitten der abgeschnittenen Pyramide und einen weiteren Schnitt erhält man insgesamt vier Teilkörper (Abb. 7.1.2/3). Die drei kleineren Teilkörper können durch Drehungen so zusammengesetzt werden, dass sie den dreiseitigen Pyramidenstumpf zu einem dreiseitigen Prisma ergänzen (Abb. 7.1.4).

Den Nachweis, dass volumengleiche Polyeder, also auch Pyramiden mit gleicher Grundfläche und Höhe, existieren, die nicht „zerlegungsgleich“ sind, hat Dehn (Dehn 1900/1902) geführt. Einen Überblick über die Geschichte und die Lösung dieser Problematik gibt Schumann (1982); von Seebach (1983) stammt eine entsprechende didaktische Analyse.

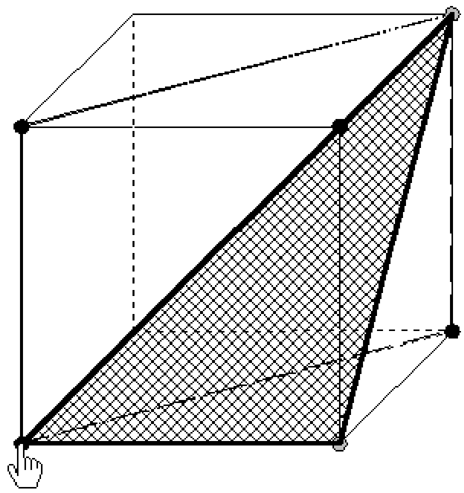


Abb. 7.1.1

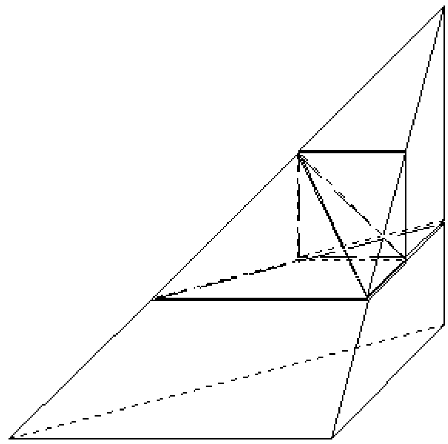


Abb. 7.1.2

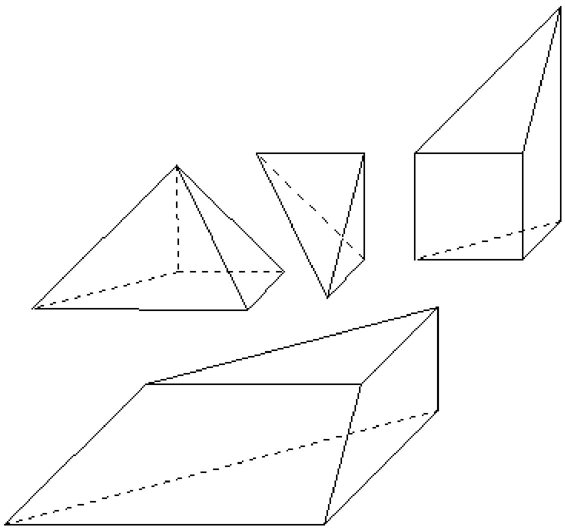


Abb. 7.1.3

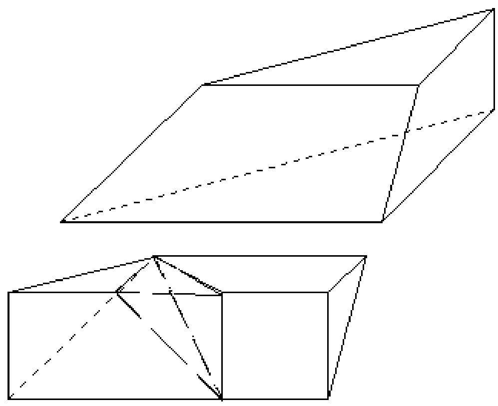


Abb. 7.1.4

Es ist mehr als problematisch, wenn ca. einhundert Jahre nach der Lösung eines tieferliegenden elementarmathematischen Problems, die traditionellen methodisch-didaktischen Folgerungen für die Inhaltslehre (vgl. u.a. Fricke 1983) ignoriert werden.

Welches sind nun die mathematischen Wege der Herleitung der adäquaten Volumenformeln in der Sekundarstufe I ?

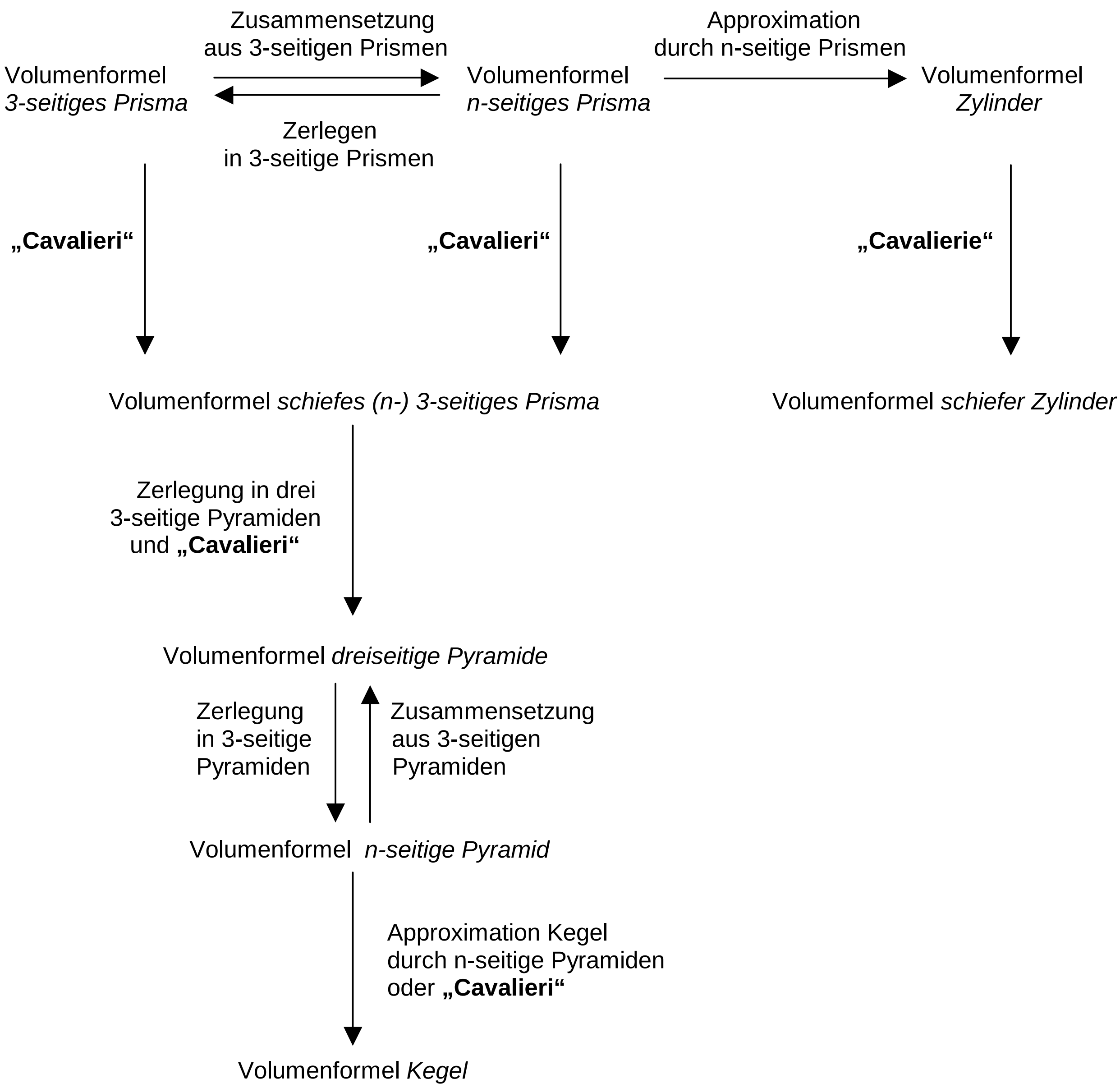
Der eine, zeitlich aufwendigere und mathematisch anspruchsvollere Weg, ist der über das Ein- und Umbeschreiben von Treppenkörpern aus Prismen bzw. Zylindern, die den betreffenden Körper und damit sein Volumen approximieren, wenn die Höhen dieser Prismen bzw. Zylinder gleichmäßig verkleinert werden. Im Grenzfall erhalten wir die exakte Volumenformel. Der andere Weg besteht in der schlagkräftigen Anwendung des Prinzips von Cavalieri, in dem bereits der Grenzprozess versteckt worden ist, das aber bündige Herleitungen von Volumenformeln erlaubt.

Prinzip von Cavalieri (1598? –1647):

Wenn zwei Körper von jeder zur Standebene parallelen Ebene in inhaltsgleichen Flächen geschnitten werden, so haben sie gleiches Volumen.

Die Geschicht seiner Entstehung wird u.a. beschrieben von Tobies (1998).

Folgende Schritte für die Herleitung der Volumenformel des Zylinders, der Pyramide und des Kegels sind bei Verwendung des Cavalierischen Prinzips sinnvoll:



Die Schwierigkeit bei der Herleitung der Volumenformel für die Kugel und für andere Körper mittels des Prinzips von Cavalieri besteht in der Konstruktion von entsprechenden Vergleichskörpern, deren Volumina aufgrund bekannter Volumenformeln bestimmt werden kann.

Sowohl bei der „Treppenkörpermethode“ als auch bei der „Cavalieri-Methode“ treten erhebliche Schwierigkeiten bei der Visualisierung des raumgeometrischen Sachverhalts auf, die nur unzureichend mit Zeichnungen oder materialen Modellen überwunden werden können. Durch die Benutzung geeigneter Visualisierungswerkzeuge lassen sich die Darstellungsprobleme besser bewältigen, selbst wenn die verfügbare Software nicht für alle Herleitungsschritte gleichermaßen Veranschaulichungshilfen bietet. Im folgenden skizzieren wir Anwendungen der Cavalieri-Methode mit den durch das Programm „CAVALIER“ (Andraschko, Rechberger 1997) gegebenen Visualisierungsmöglichkeiten. –Die Treppenkörpermethode ist im Rahmen tutorieller Software behandelt worden (Fraunholz 1995/1998).

7.2 Anwendung des Prinzips von Cavalieri

Wir scheren ein 3-seitiges Prisma (Abb. 7.2.1), indem wir seine Deckfläche in der festgelegten Deckflächenebene verschieben. Eine zur Standebene verziehbare parallele Ebene schneidet aus dem geraden und dem schiefen Prisma einander kongruente Dreiecksflächen heraus (Abb. 7.2.2). Die Prismen sind nach dem Prinzip des Cavalieri volumengleich. Das kann auch so eingesehen werden: Denkt man sich das gerade Prisma in lauter einander kongruente prismatische Scheiben zerlegt (Abb. 7.3.1, links), so ändert sich beim Verziehen zu einem schiefen Prisma das Volumen der Scheiben nicht (Abb. 7.3.1, rechts). In materialer Vorstellung: ein „Turm“ aus Bierfilzen behält sein Volumen, wenn der Turm verzogen wird. – In Abbildung 7.3.2 ist die Höhe der prismatischen Schichten weiter verkleinert. Die Schichten werden unteilbar (indivisibel), wenn ihre Höhe gegen Null geht. Das Volumen des schiefen dreiseitigen Prisma stimmt also mit dem des geraden dreiseitigen Prisma überein; somit überträgt sich die Volumenformel $V = G \cdot h$. – Durch Zerlegung von n-seitigen Prismen in dreiseitige überträgt sich diese Formel auch auf n-seitige Prismen. Die klassische Zerlegung des (schiefen) 3-seitigen Prisma in drei 3-seitige Pyramiden bewerk-stelligen wir mit dem Werkzeug KÖRPERGEOMETRIE(Abb. 7.4.1-3). Je zwei der Pyramiden haben kongruente Grundfläche und Höhe, wie die in Abbildung 7.5.1.

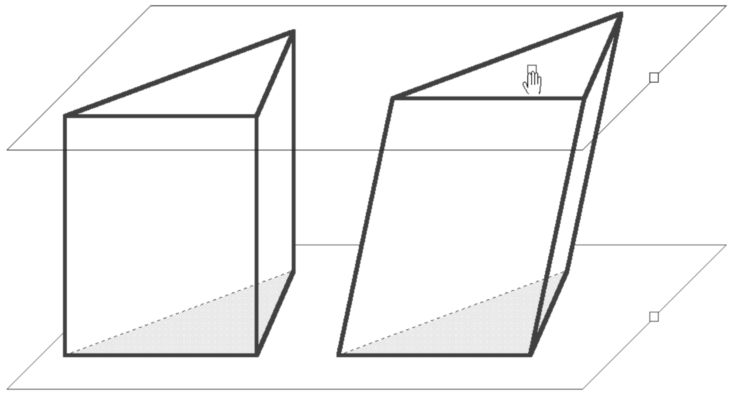


Abb. 7.2.1

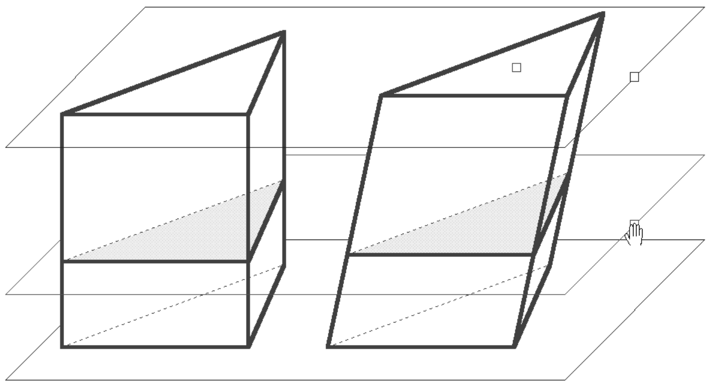


Abb. 7.2.2

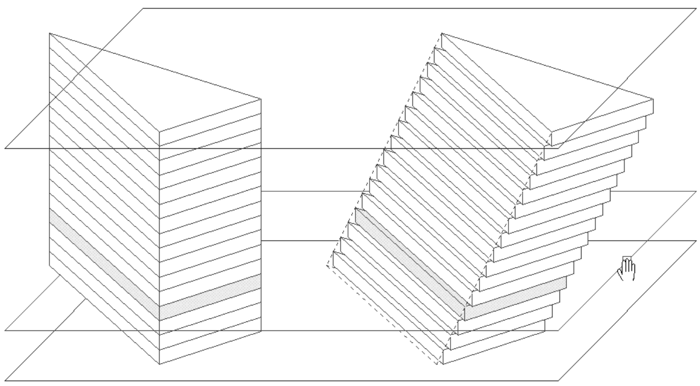


Abb. 7.3.1

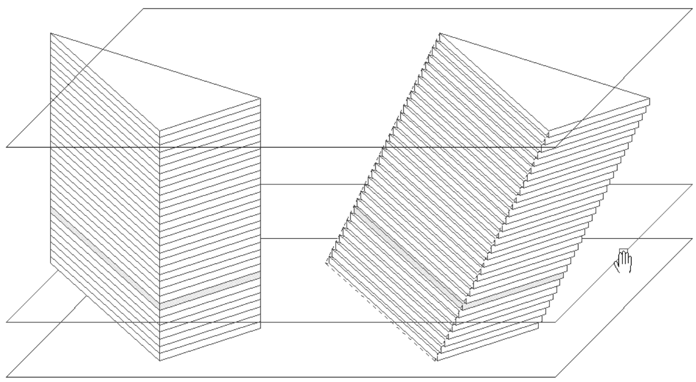


Abb. 7.3.2

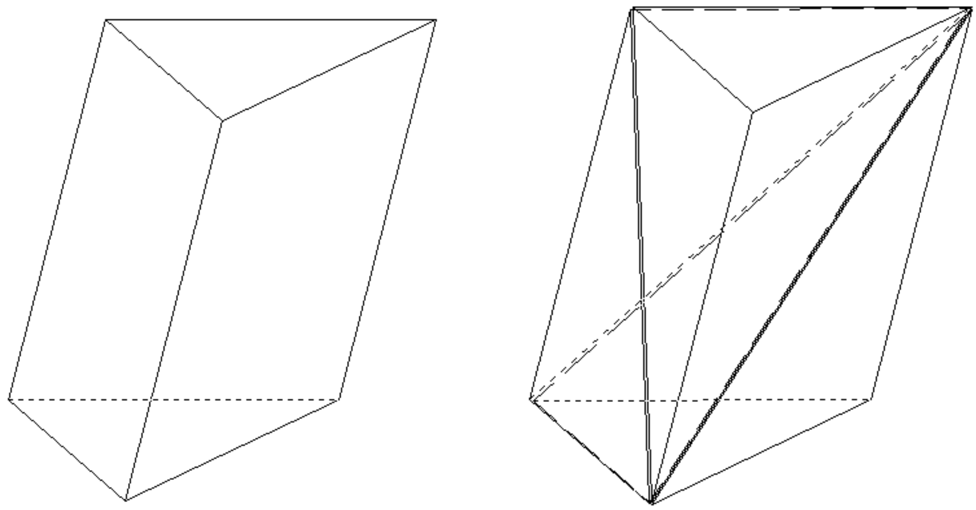


Abb. 7.4.1/2

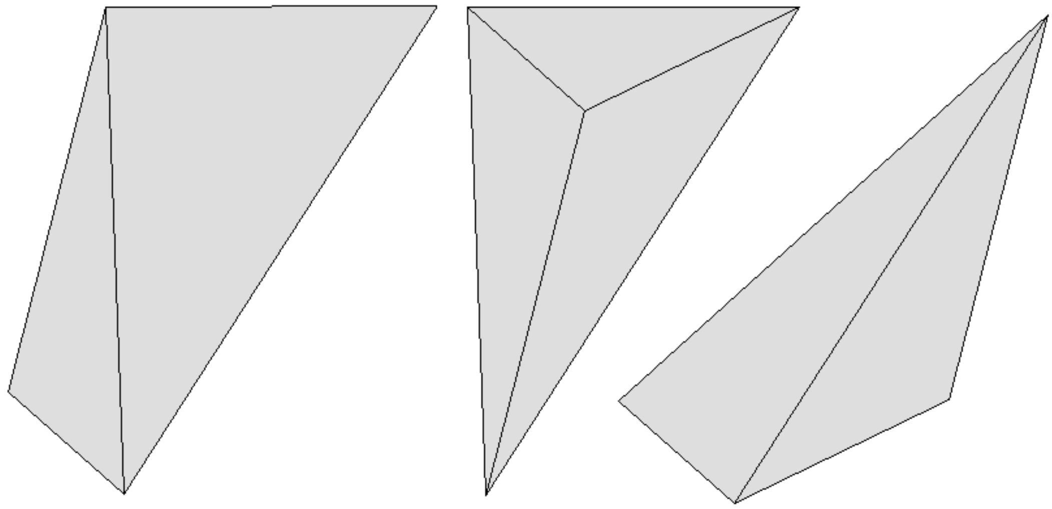


Abb. 7.4.3

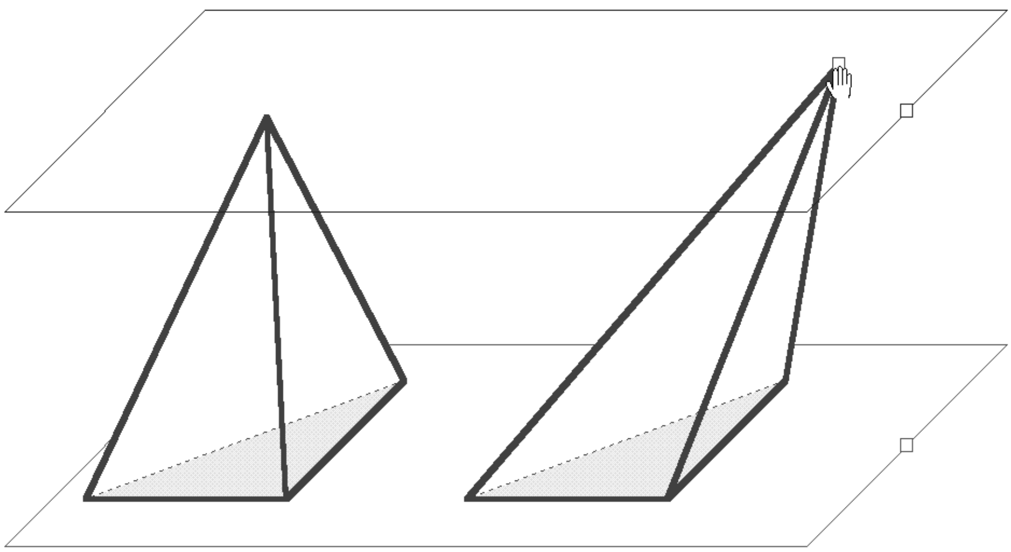


Abb. 7.5.1

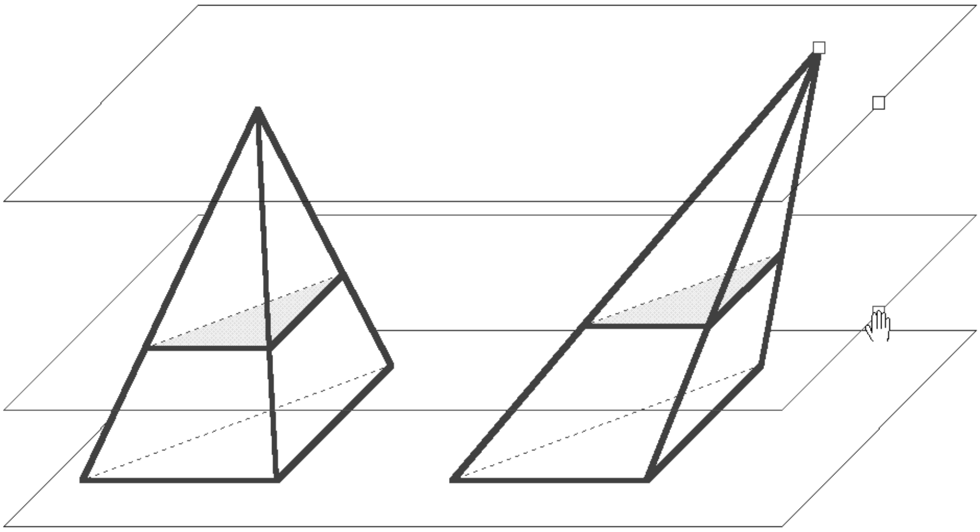


Abb. 7.5.2

Die beiden dreieckigen Schnittflächen (Abb. 7.5.2), die durch jede zur Standebene parallele Ebene erzeugt werden, sind kongruent (Begründung?). Also sind beide Pyramiden volumengleich. Das kann man, wie schon beim Prisma, mit der „infinitesimalen Überlegung“ einsehen (Abb. 7.6). Die Volumina der drei Teilpyramiden (Abb. 7.4.3) sind dementsprechend von gleichem Volumen V_P ; wegen $3V_P = G \cdot h$ folgt für das Volumen einer 3-seitigen Pyramide $V_P = \frac{1}{3} G \cdot h$.

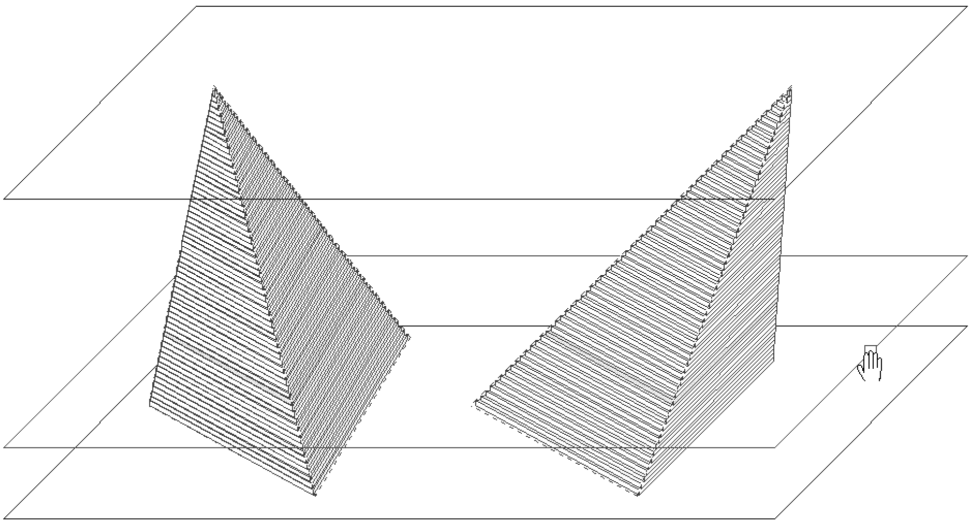


Abb. 7.6

Durch Zerlegung von n-seitigen Pyramiden in dreiseitige überträgt sich diese Formel auch auf beliebige Pyramiden.

Als Vorbereitung für die Herleitung der Kugelvolumenformel mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri verwenden wir folgendes Beispiel, das der Volumenbestimmung eines Keils dient (Abb. 7.7.1 links, mit eingeblendeten Schnittflächen, die wegen des zu kleinen Bildschirms auf linear halbe Größe verkleinert werden müssen). -Das

Volumen kann auch einfacher z.B. mittels Zerlegung des Keils in einen halben Würfel und eine dreiseitige Pyramide bestimmt werden.- Als Vergleichskörper fungiert hier ein Würfel, aus dem eine umgestülpte quadratische Pyramide herausgeschnitten worden ist (Abb. 7.7.1, rechts). Der Nachweis der Gleichheit der Schnittflächen in beliebiger Höhe x wird mit Hilfe des 2. Strahlensatzes geführt und durch Einblenden der entsprechenden Flächenformeln kontrolliert (Abb. 7.7.2). Das Volumen des Keils ist also gleich $a^3 - \frac{1}{3}a^2 \cdot a = \frac{2}{3}a^3$.

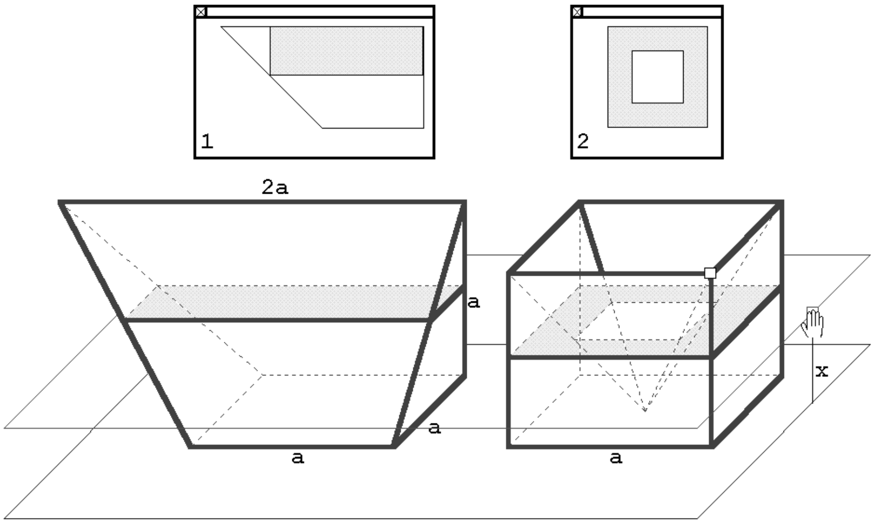


Abb. 7.7.1

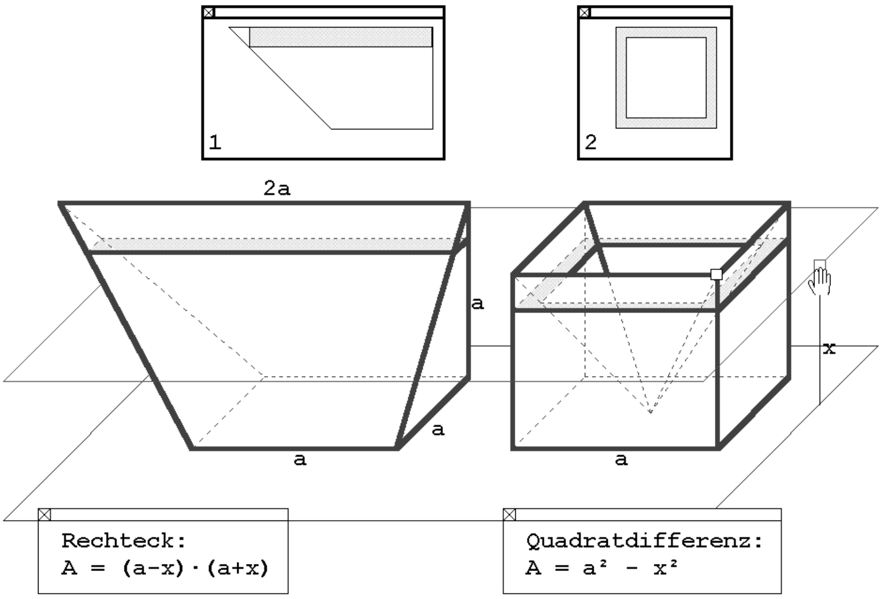


Abb. 7.7.2

Nun zur Bestimmung des Kugelvolumens.

Konstruktion des Vergleichskörpers für die Halbkugel: Aus einem Zylinder von gleichem Radius und gleicher Höhe wie die Halbkugel, wird ein umgestülpter Kegel, der in Radius und Höhe mit dem Zylinder übereinstimmt, herausgenommen (Abb. 7.8.1/2). Zur besseren Veranschaulichung kann man beide Körper nach vorn kippen und in das kegelförmige Loch hineinschauen (Abb. 7.8.3).

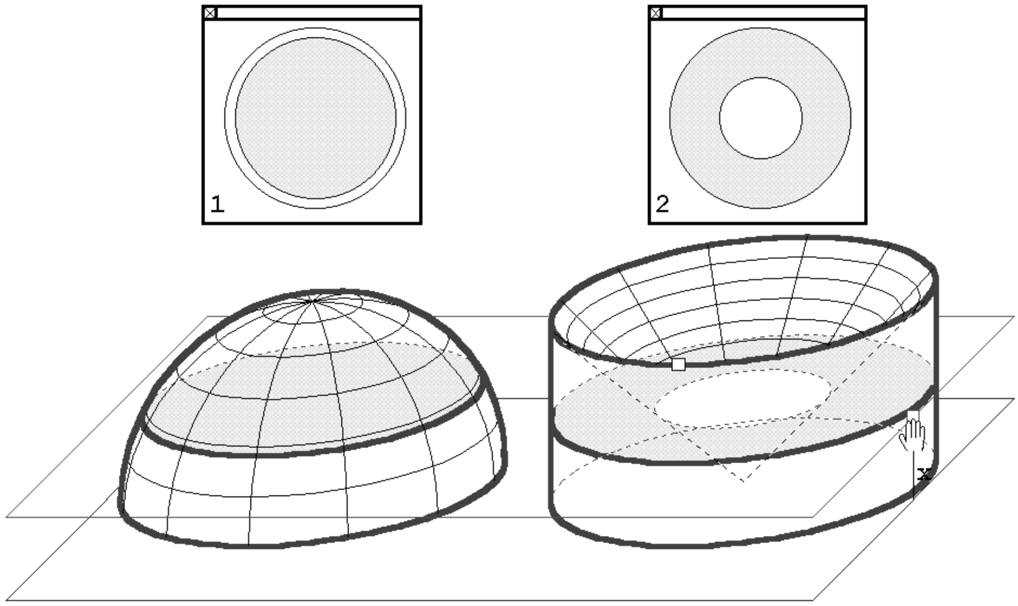


Abb. 7.8.1

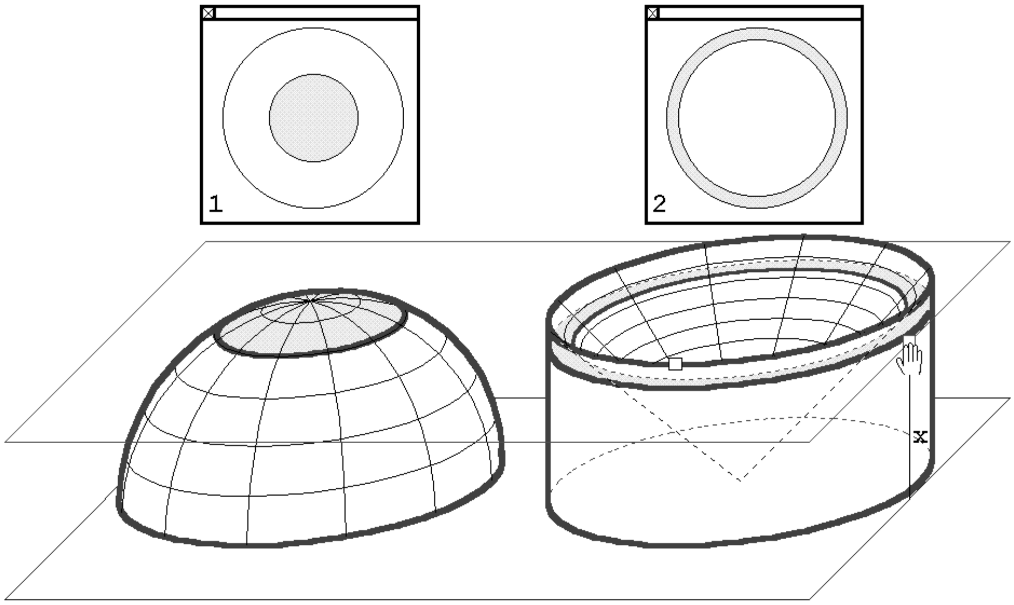


Abb. 7.8.2

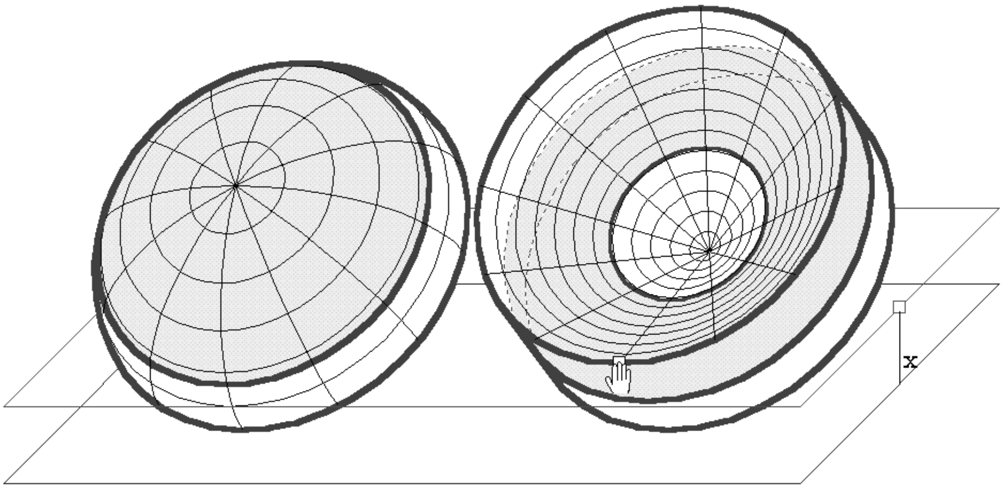


Abb. 7.8.3

Bei Anwendung des Pythagoras-Satzes erhält man für die kreisförmige Schnittfläche der Halbkugel vom Radius r in Höhe x: $(r^2 - x^2) \cdot \pi$ und für die Schnittfläche im Vergleichskörper, die die Form eines Kreisrings hat, ebenfalls $(r^2 - x^2) \cdot \pi$, wobei man ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck zur Radiusberechnung (Radius und Höhe des Zylinders sind gleich !) benutzt. Das Halbkugelvolumen ist also $\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot r^3$.

Ebenso wie beim vorausgegangenen Beispiel können auch hier Ausdrucke zum Einzeichnen von Hilfslinien und -größen für die Berechnungen gemacht werden.

Die Schlagkraft des Prinzips von Cavalieri erproben wir noch an zwei weiteren Beispielen. Zuerst bestimmen wir das Kegelvolumen mit Hilfe einer Rechteckpyramide als Vergleichskörper (Abb. 7.9).

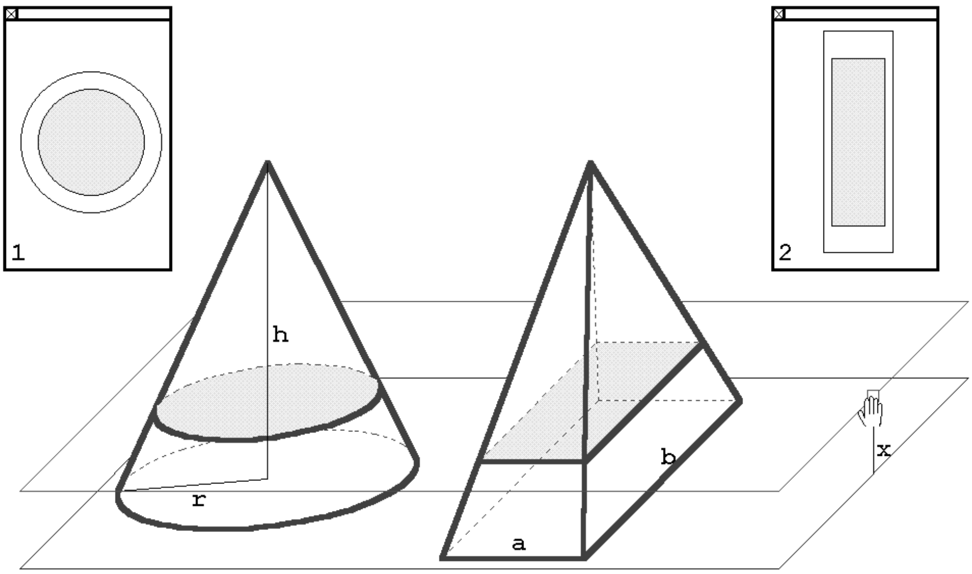


Abb. 7.9

Mit dem Streckfaktor $\frac{h-x}{h}$ ergibt sich in Höhe x für die Schnittfläche des Kegels $\left[\frac{h-x}{h}\right]^2 \pi r^2$ und für die Schnittfläche der Rechteckpyramide $\left[\frac{h-x}{h}\right]^2 \cdot a \cdot b$. Bei vorgegebenem a muss $b = \pi r^2/a$ gesetzt werden, damit beide Schnittflächen gleich sind. Mit der Volumenformel für Pyramiden ergibt sich für das Kegelvolumen:

$\frac{1}{3}\, a \cdot b \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h.$

Ein abschließendes Beispiel:

Lässt man eine Parabel mit der Gleichung $y = ax^2$ um die auf einer Ebene lotrecht stehende y-Achse rotieren, so entsteht ein sogenanntes Paraboloid (Abb. 7.10, links), dessen Volumen bis zur Höhe h zu bestimmen ist. Als Vergleichskörper zu diesem Rotationskörper verwendet man eine quadratische Säule mit der Grunkante h (Abb. 7.10, rechts), deren Höhe b so zu bestimmen ist, dass die Schnittflächen beider Körper in Höhe y gleich sind. Für die Schnittfläche im Paraboloid gilt $\pi \cdot x^2$, mit $y = a \cdot x^2$ ergibt sich daraus $\pi \cdot \frac{y}{a}$. Im Term für den Inhalt der rechteckigen Schnittfläche $y \cdot b$ muss also $b = \pi \cdot \frac{1}{a}$ gesetzt werden, damit beide Schnittflächen gleich sind. Als Paraboloid-Volumen ergibt sich: $\pi \cdot \frac{h^2}{2a}$.

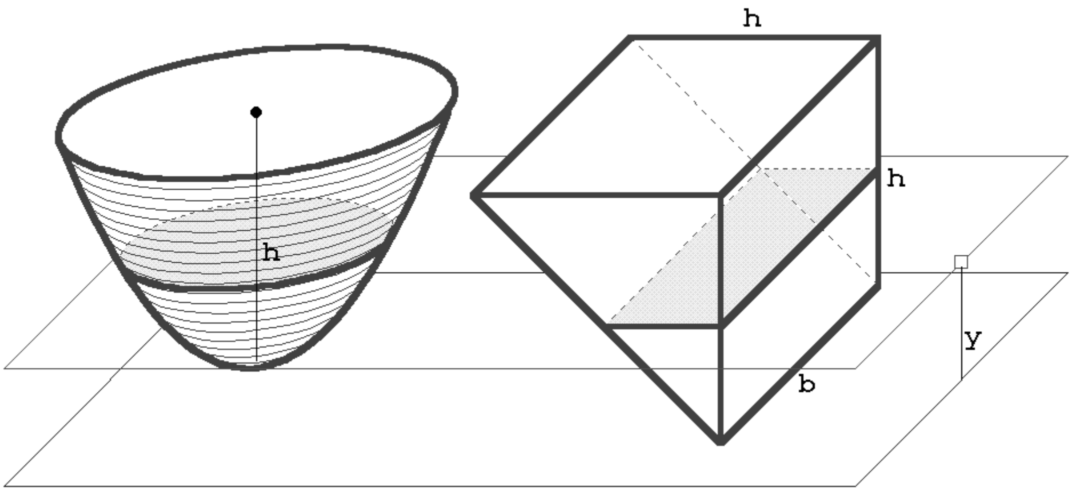


Abb. 7.10

7.3 Literatur

Andraschko, H. und Rechberger, K. (1997): CAVALIER (Software). Augsburg: Zentralstelle für Computer im Unterricht

Dehn, M. (1900): Über raumgleiche Polyeder. In: Göttinger Gesammelte wissenschaftliche Nachrichten, S. 345 – 354

Dehn, M. (1902) : Über den Rauminhalt. In: Mathematische Annalen (55) 1902, S. 465 – 478

Fraunholz, W. et al.(1995): Telekolleg Mathematik – Lernsoftware zu Folgen und Grenzwerten, Version 1.0. München: TR-Verlagsunion

Fraunholz, W. et al.(1998): Telekolleg Mathematik – Lernsoftware zur Analysis – Integralrechnung, Version 1.0. München: TR-Verlagsunion

Fricke, A. (1983): Didaktik der Inhaltslehre. Stuttgart: Klett

Hill, M.J.M. (1896): On the Volumes of Certain Species of Tetrahedra without Employment of the Methods of Limits. Proceedings of the London Mathematical Society (27), p. 39 – 53

Käßmann, D.; Maroska, R. et al. (1995): Schnittpunkt 9. Mathematik für Realschulen Baden – Württemberg. Stuttgart: Klett

Ministerium für Kultus und Sport Baden-Württemberg (Hrsg.) (1994): Bildungsplan für das Gymnasium. In: Kultus und Unterricht. Lehrplanheft 4

Schumann, H. (1982): Zur Geschichte der Rauminhaltslehre dreidimensionaler Polyeder. In: mathematica didactica (5), Heft 3, S. 155 – 162

Seebach, K. (1983): Didaktische Überlegungen zum Satz von Dehn. In: Didaktik der Mathematik (11), Heft 1, S. 1 – 13

Tobies, R. (1998): Bedeutende Mathematiker. Bonventura Cavalieri (um 1598 bis 1647) – zum 400. Geburtstag. In: Mathematik in der Schule (36), Heft 1, S. 44 - 47