Hans Andraschko

DreiDGeo – ein Programm zur Veranschaulichung der analytischen Geometrie im IE³

Das räumliche Vorstellungsvermögen – eine wichtige Fähigkeit in unserer Zeit

Das räumliche Vorstellungsvermögen des Menschen wird in unserer komplizierter werdenden Welt immer wichtiger. Einige Beispiele sollen das verdeutlichen:

- Für Konstruktionen von Gebäuden und Maschinen werden heutzutage dreidimensionale Computerprogramme effektiv eingesetzt.
- In der Halbleitertechnik stehen wir vor dem Übergang ebener Strukturen zu dreidimensionalen, in die Tiefe der Halbleiterkristalle reichenden Konstruktionen.
- In der Chemie werden Makromoleküle mit komplizierten räumlichen Strukturen gezielt synthetisiert, damit Materialien mit neuen Eigenschaften entstehen. In der Biologie ist z. B. das Erfassen der in der Doppelhelix räumlich angeordneten Erbinformationen von großer Bedeutung.
- In der Medizin werden vermehrt Darstellungsverfahren des menschlichen Körpers eingesetzt, die ein dreidimensionales Abbild zur Diagnose, aber auch zur Führung bei operativen Eingriffen liefern.

Das räumliche Vorstellungsvermögen muss also frühzeitig erworben und trainiert werden. In der Schule wird die Grundlegung dieses Vorstellungsvermögens in erster Linie vom Mathematikunterricht erwartet, wenn sicher auch andere Fächer, wie z. B. der Sport- oder der Kunstunterricht, dazu beitragen können.

Das räumliche Vorstellungsvermögen im Mathematikunterricht

Der Mathematikunterricht führt an mehreren Stellen in die Geometrie des Raumes ein:

- In der Unter- und Mittelstufe bei der Berechnung von Körpern wie Quader, Prisma, Zylinder, Kegel und Kugel. Hierzu wurden für den Schuleinsatz die Programme „Körper“ und „Cavalieri“ entwickelt. Zum reinen Training des räumlichen Vorstellungsvermögens stehen die Programme „VirtUeb“ und „AnaGlyph“ den Schulen zur Verfügung. (Bezugsquellen im Anhang)
- In der Jahrgangsstufe 11 bei der Behandlung der sphärischen Trigonometrie (Unterstützung durch das Programm „Kugel“).
- In der Kollegstufe im Rahmen der linearen analytischen Geometrie.

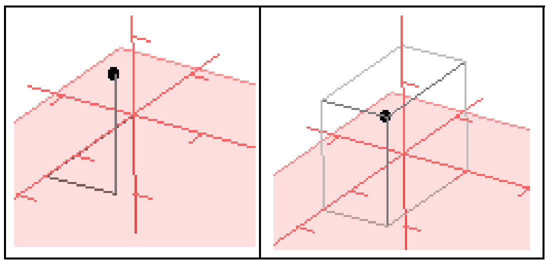
Welcher Mathematiklehrer hätte sich beim Unterrichten im Grund- oder Leistungskurs nicht schon immer gewünscht, dass neben den abstrakten mathematischen Ausdrücken sogleich eine konkrete Veranschaulichung der angeschriebenen Formeln stattfindet. Viele Lehrer wandern mit Platten (für die Ebenen) und Stäben (für die Geraden) durch das Schulhaus und sind letztlich enttäuscht, wenn die Veranschaulichung trotz erheblicher „Verrenkungen“ nur mühsam gelingt. Diese didaktische Lücke soll das Programm DreiD-Geo füllen. Es stellt die Elemente der linearen analytischen Geometrie im R^3, also Punkte Geraden und Ebenen, sofort dreidimensional dar und erlaubt auf diese Weise, die räumlichen Beziehungen der Elemente untereinander anschaulich zu erkennen.

Selbständiges Arbeiten, kumulatives Lernen

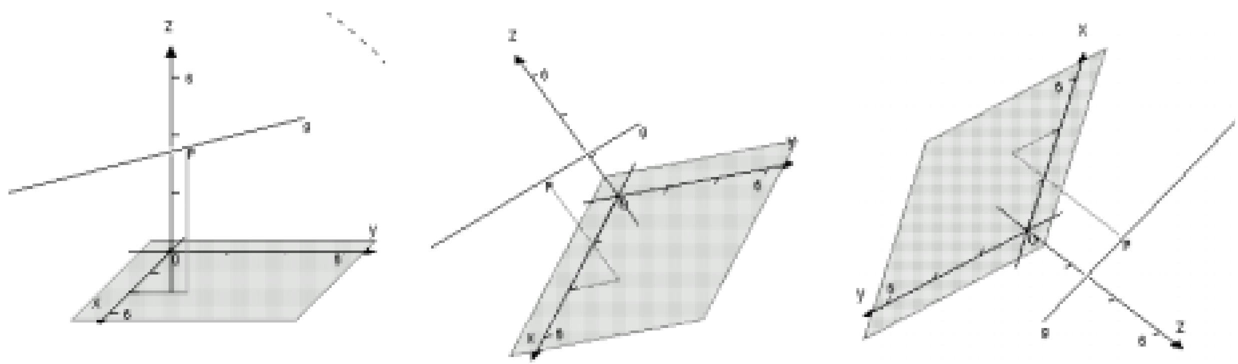
Das Programm DreiDGeo leistet dabei aber auch noch ein weiteres: Die Schülerinnen und Schüler erfahren bei der Benutzung des Programmes, dass sie selbst es sind, die sich etwas Neues beibringen. Durch interaktives Hantieren mit der gläsernen Sphäre, zunächst ungeschickt, später immer gezielter, schulen sie ohne Zutun des Lehrers ihr Vorstellungsvermögen, solange, bis sie in der Lage sind, brauchbare Aussagen über eine räumliche Szene zu machen. Die mathematische Verifizierung ist dann nur noch ein „notwendiges Übel“. Der Lernzuwachs wird für die Schüler unmittelbar erfahrbar gemacht.

Die gläserne Sphäre – eine Visualisierungshilfe

Das Problem bei der Darstellung einfacher räumlicher Elemente, wie Punkte, Geraden oder Ebenen auf dem (flachen) Bildschirm ist, dass man stets nur ein zweidimensionales „flaches“ Abbild der räumlichen geometrischen Objekte erhält. Bei ausgedehnten Körpern kann man durch Perspektive, Beleuchtungsart, Schattierung und ähnlichem den gewünschten räumlichen Eindruck erzielen. Bei den einfachen, mehr abstrakten geometrischen Gebilden dagegen wie Punkten, Geraden oder Ebenen steht diese Möglichkeit nicht oder nur sehr begrenzt zur Verfügung.



Das Programm DreiDGeo setzt zur Erzeugung des räumlichen Eindrucks zwei verschiedene Strategien ein: Zum einen verdeutlichen verschiedenartige Hilfslinien die Lage der Punkte im Raum (siehe z. B. rechts) und zum anderen lässt das Bewegen der kompletten Szene (zusammen mit allen Hilfslinien) die Objekte gleichsam „räumlich lebendig werden“. Die geometrischen Gebilde werden dabei sozusagen innerhalb einer Glaskugel aufgebaut. Der Benutzer kann dann diese Glaskugel jederzeit interaktiv in alle Himmelsrichtungen drehen und so die aufgebaute Szene von allen



Seiten anschauen. Die unten stehenden Abbildungen zeigen drei verschiedene Ansichten derselben geometrischen Szene.
Es ist ganz erstaunlich, wie auch bei Schülern mit räumlichen Vorstellungsschwierigkeiten durch das eigenständige Hantieren mit der Grafik das korrekte Erkennen räumlicher Beziehungen in kürzester Zeit stark verbessert wird. Die statischen Abbildungen in diesem Artikel lassen nur sehr beschränkt ahnen, welche wesentliche Verbesserung der dynamische Aspekt für die Gewinnung des räumlichen Eindrucks ist.

Didaktische Aspekte

Durch das Hantieren mit der gläsernen Sphäre erfahren die Schülerinnen und Schüler beim Suchen nach einer geeigneten Ansicht der geometrischen Szene sehr bald, dass es ganz bestimmte Blickrichtungen gibt, in denen gewisse Aspekte besonders deutlich hervortreten.

- Der Abstand einer zu einer Ebene parallelen Geraden wird sichtbar, wenn man die Ebene als gerade Linie oder die Gerade als Punkt erblickt. Das Gleiche gilt für den Abstand eines Punktes von einer Ebene.
- Die wahre Länge einer Strecke kann man sehen, wenn eine Lotebene zur Strecke nur noch eine gerade Linie ist.
- Die wahre Größe einer ebenen Figur wird sichtbar, wenn ein Lot auf die Ebene als Punkt erscheint.
- Auch für windschiefe Geraden gibt es besondere Lagen, in denen z. B. der kürzeste Abstand oder das gemeinsame Lot gut erkennbar sind.

Die rechnerische Lösung der angesprochenen Probleme kann dann vom Schüler wesentlich leichter selbst gefunden werden. Nicht selten finden die Schüler sogar ganz überraschende Lösungen, die stark von der Anschauung und weniger vom mathematischen Algorithmus hergeleitet werden.

Wegen der einfachen Bedienbarkeit kann das Programm ggf. bereits bei der Behandlung von Bereichen der darstellenden Geometrie gewinnbringend zur Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens eingesetzt werden. Die Schüler können förmlich erleben, wie Schnittpunkte von Geraden „Schatten“ in den Projektionsebenen hinterlassen oder wie Ebenen entstehen

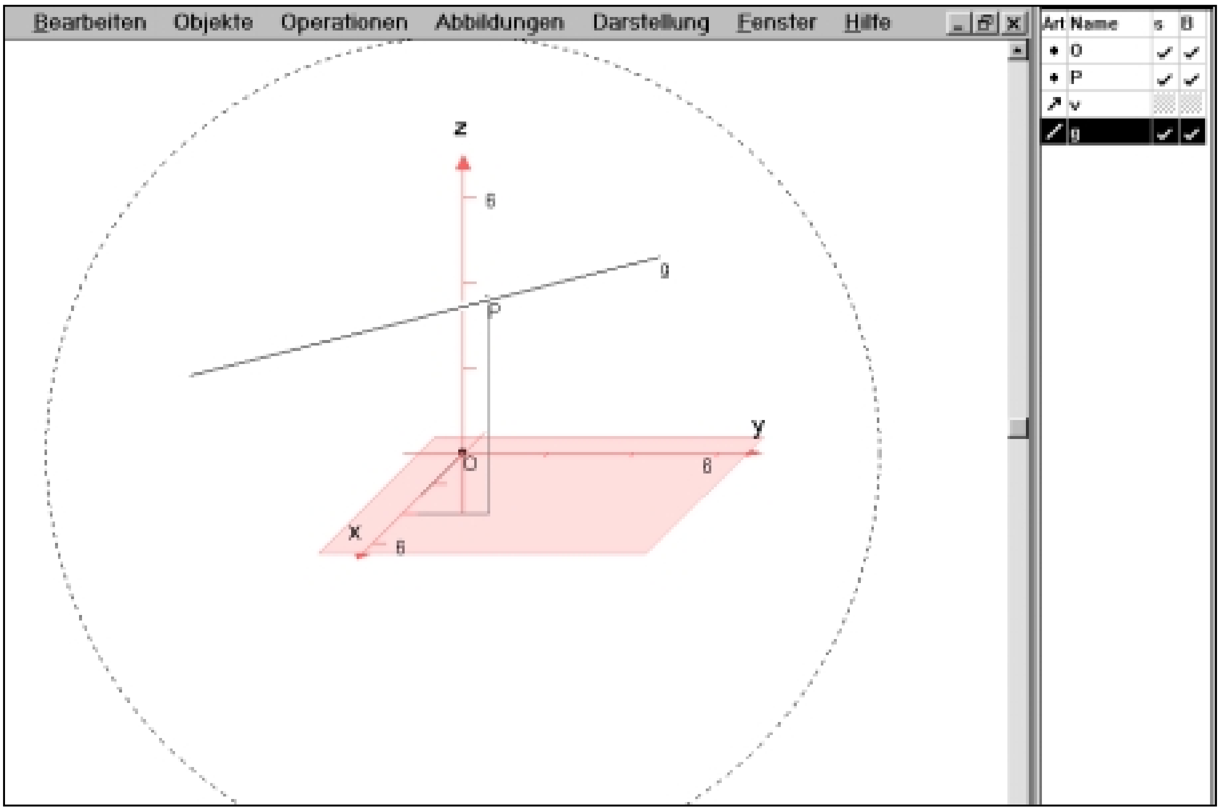
Das Arbeiten mit DreiDGeo

Man gibt die Gleichung einer Ebene E ein (z. B.: $3x + 2y - z + 1 = 0$) und schon sieht man die Ebene im räumlichen karthesischen Koordinatensystem. Dabei können die Koordinatenebenen und Koordinatenachsen wahlweise angezeigt oder weggelassen werden. Die Ebene kann undurchsichtig oder transparent und natürlich auch in verschiedenen Farben dargestellt werden.

Man legt einen Punkt, z. B. P (4 | 2 | 5), und einen Vektor, z. B. $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$**,** fest und bildet aus beiden die Gerade g durch P mit $\vec{v}$ als Richtungsvektor. Der Punkt P und die Gerade g wird sofort gezeichnet. Siehe nachstehendes Bild!

In einer Tabelle am rechten Rand des Bildschirms werden die bisher festgelegten (oder aus einer Datei eingelesenen) geometrischen Elemente aufgelistet. Die übrige Fläche des Bildschirms dient zur raumgeometrischen Darstellung der festgelegten Elemente.

Jedes Element kann durch Anklicken in der Objektliste aus- oder wieder eingeblendet werden. Ebenso kann eine Beschriftung der geometrischen Objekte zu- und abgeschaltet werden. Ein Doppelklick auf ein Element in der Liste oder auf den Graphen hat zur Folge, dass die Eigenschaften und Attribute dieses Elements in einem Dialogfenster eingesehen oder editiert werden können.



Funktionsumfang des Programms DreiDGeo

Festlegung von geometrischen Grundelementen

Zu Beginn der Arbeit müssen erst einmal die benötigten geometrischen Elemente festgelegt werden. Dies geschieht durch Eingabe mit der Tastatur oder durch Einlesen aus einer Datei.

Das Programm stellt die folgenden Grundelemente zur Verfügung: Punkt, Gerade und Strecke, Vektor und Pfeil, Ebene, Dreieck und Pyramide. Diese Elemente können auf alle in der Mathematik üblichen Arten definiert werden. Eine Ebene kann z. B. durch die übliche Parameterform oder die Normalenform (auch Koordinatenform genannt) festgelegt werden. Ebenso können drei die Ebene bestimmende Punkte, zwei Geraden, ein Punkt und eine Gerade, ein Punkt und zwei Vektoren und schließlich auch ein Punkt und ein Normalvektor zur Festlegung der Ebene eingegeben werden.

Erzeugung von geometrischen Elementen:

Es ist aber auch möglich, aus bereits definierten Elementen neue Elemente zu erzeugen. Dazu werden zuerst die erzeugenden Elemente markiert (in der Objektliste oder in der Grafik) und dann wird im Menü ausgewählt, welches neue Element gebildet werden soll. Hat man z. B. drei Punkte markiert, dann kann man damit ein Dreieck oder aber auch eine Ebene erzeugen.

Geometrische Operationen:

Im Programm sind folgende Operationen mit zuvor markierten Elementen vorgesehen: Inzidenzuntersuchungen, Bilden eines Lotes (Lotvektor, Lotgerade, Lotebene) und Ermitteln der Mitte (Mittelpunkt, Schwerpunkt, Winkelhalbierende). Mit Vektoren können Operationen wie Bilden des Gegenvektors, Vektoraddition oder Vektorprodukt vorgenommen werden. Ein Beispiel dazu: Eine Gerade und ein Punkt wurden markiert, dann kann man z. B. untersuchen, ob der Punkt auf der Gerade liegt, man kann aber auch das Lot vom Punkt auf die Gerade fällen, wobei man dann die Lotgerade als neues, weiter verwendbares Objekt erhält.

Geometrische Abbildungen:

Folgende Abbildungen sind vorgesehen: Spiegelung (an einem Punkt, an einer Geraden oder an einer Ebene), zentrische Streckung und Projektion (Orthogonal- oder beliebige Parallelprojektion).

Dazu wird zunächst durch Markieren der die Abbildung bestimmenden Stücke die Abbildung festgelegt. Z. B. wird durch Markierung eines Punktes und Wahl des entsprechenden Menüpunktes eine Punktspiegelung definiert. Anschließend werden die Elemente markiert, die abgebildet werden sollen, und die Abbildung wird durchgeführt.

Koordinatensystem:

Darstellungsbereich, Skalierung und Beschriftung des Koordinatensystems kann beliebig gewählt werden. Achsen und Koordinatenebenen können ein- oder ausgeblendet werden. Auch Vergrößern und Verkleinern des Darstellungsbereichs (Zoomen) sind vorgesehen.

Dateiverarbeitung:

Selbstverständlich kann man fertige raumgeometrische Szenen speichern und laden. Häufig benötigte Grundelemente können nachträglich importiert werden. Die am Bildschirm dargestellten Grafiken können ausgedruckt oder als Dateien exportiert werden. Die exportierten Grafiken können auch in andere Dokumente wie z. B. in Word-Texte eingebunden werden.

Überbick über die zulässigen Operationen

Um die Fülle der Möglichkeiten anzudeuten, die das Programm dem Anwender bietet, wird im Folgenden ein kurzer Überblick gegeben. Mit Schülerinnen und Schülern der Oberstufe wird man dem Unterrichtsfortgang entsprechend das Anwendungsrepertoir stetig erweitern.

Wenn mit vorhandenen Objekten irgendwelche Operationen durchgeführt werden sollen, müssen diese Objekte zunächst markiert werden. Das Markieren geschieht durch Anklikken des betreffenden Objektes in der Grafik mit der Maus. Alternativ dazu kann das Objekt auch in der Objektliste markiert werden. Zum Markieren mehrerer Objekte verwendet man zusätzlich die Taste Strg (Control).
Nach dem Markieren muß man aus dem Hauptmenü die entsprechende Operation auswählen. Dazu gibt es fünf Möglichkeiten.

1. Festlegen neuer Objekte mit Hilfe der markierten Objekten.
2. Konstruieren neuer Objekte mit Hilfe der markierten Objekte.
3. Festlegen einer Abbildung durch ein oder zwei markierte Objekte.
4. Abbilden der markierten Objekte.

5. Messungen an den markierten Objekten vornehmen.
In jedem der fünf Fälle werden in den Untermenüs nur die Operationen angeboten, die auf Grund der markierten Objekte sinnvollerweise möglich sind. Im Folgenden werden alle Fälle aufgelistet, die im Programm vorgesehen sind:

1. Festlegen neuer Objekte mit Hilfe markierter Objekten

Markierte Objekte	Neu gebildetes Objekt
2 Punkte	Ein Gerade Eine Strecke Eine Pfeil Ein Vektor
3 Punkte	Eine Ebene Ein Dreieck
1 Punkt, 1 Vektor	Ein Punkt (Endpunkt des zugehörigen Pfeils) Eine Gerade Eine Ebene (aus Normalvektor und Punkt) Ein Pfeil
1 Punkt, 2 Vektoren	Eine Ebene
1 Gerade	Ein Vektor (Richtungsvektor der Geraden)
2 Geraden	Eine Ebene
1 Punkt, 1 Gerade	Eine Ebene
1 Ebene	Ein Vektor (Normalvektor der Ebene)
1 Punkt, 1 Dreieck	Eine Pyramide

2. Konstruieren von Objekten mit Hilfe markierter Objekte

Markierte Objekte	Konstruierte Objekte
2 Punkte	Der Mittelpunkt
3 Punkte	Der Schwerpunkt
1 Punkt, 1 Gerade	Untersuchen auf Inzidenz Das Lot vom Punkt auf die Gerade
1 Punkt, 1 Ebene	Untersuchen auf Inzidenz Das Lot vom Punkt auf die Ebene
1 Punkt, 1 Dreieck	Untersuchen auf Inzidenz
2 Geraden	Der Schnittpunkt Die gemeinsame Lotgerade Die winkelhalbierende Gerade (Mittelgerade)
2 Ebenen	Die Schnittgerade Die winkelhalbierende Ebene (Mittelebene)
1 Gerade, 1 Ebene	Der Schnittpunkt
1 Vektor	Der Gegenvektor
2 Vektoren	Die Vektorsumme Das Vektorprodukt
3 Vektoren	Die Vektorsumme
1 Punkt, 2 Vektoren	Ein Repräsentant (Pfeil) der Vektorsumme
1 Punkt, 3 Vektoren	Ein Repräsentant (Pfeil) der Vektorsumme

3. Festlegen einer Abbildung durch markierte Objekte

Markierte Objekte	Definierte Abbildung
1 Punkt	Eine Punktspiegelung Eine Zentrische Streckung
1 Gerade	Eine Geradenspiegelung
1 Ebene	Eine Ebenenspiegelung Eine Orthogonalprojektion auf die Ebene
1 Vektor, 1 Ebene	Eine Parallelprojektion in Vektorrichtung auf die Ebene

4. Abbilden von markierten Objekten

Mit den festgelegten Abbildungen können dann alle markierten Objekte abgebildet, also gespiegelt oder projeziert, werden.

5. Messungen an den markierten Objekten vornehmen

Markierte Objekte	Messung
2 Punkte	Abstand der beiden Punkte
3 Punkte	Fläche des Dreiecks
4 Punkte	Volumen der Pyramide
1 Punkt, 1 Gerade	Abstand des Punktes von der Geraden
1 Punkt, 1 Ebene	Abstand des Punktes von der Ebene
1 Punkt, 1 Dreieck	Volumen der Pyramide
1 Vektor	Betrag des Vektors
2 Vektoren	Skalarprodukt Winkel zwischen den beiden Richtungen
3 Vektoren	Determinante (Spatvolumen) Volumen der zugehörigen Pyramide
2 Geraden	Winkel zwischen den Geraden Abstand der beiden Geraden
1 Gerade, 1 Ebene	Winkel zwischen Gerade und Ebene
2 Ebenen	Winkel zwischen den Ebenen
1 Strecke	Länge der Strecke
1 Dreieck	Fläche des Dreiecks
1 Pyramide	Volumen der Pyramide

Anwendung des Programms DreiDGeo

Das Programm kann auf vielfältige Weise eingesetzt werden. Einige der Möglichkeiten sind im folgenden angegeben.

Für Lehrer:

- Erstellung von ordentlichen Zeichnungen im Unterricht.
- Zeitersparnis beim Darstellen umfangreicher räumlicher Szenen.
- Ausnutzung der Dynamik zur schnellen Veranschaulichung von räumlichen Szenen im Unterricht; Visualisierungshilfe.
- Hilfe bei Unterrichtsvorbereitung. Es werden Fehler vermieden und man erhält schnelle Übersicht über die Zusammenhänge.
- Ermittlung des günstigsten Blickwinkels auf die räumlichen Objete für den Ausdruck von Arbeitsblättern oder Folien.
- Bei Erstellung von Aufgaben läuft das Programm im Hintergrund um günstige Konstellationen zu realisieren.
- Eingehen auf Schülervorschläge wegen der schnellen Verfügbarkeit der Zeichnungen

Für Schülerinnen und Schüler

- Finden und Nachprüfen von Lösungswegen.

- Rückkopplung von Aufgabenlösung mit der Anschauung.
- Fehlerbereinigung durch Prüfen der rechnerischen Ergebnisse
- Kontrolle der Hausaufgaben in der Schule oder daheim
- Schulung der eigenen räumlichen Vorstellungskraft
- Eigenständiges Arbeiten

Das folgende Beispiel kann natürlich nicht alle Aspekte und Fähigkeiten des Programms demonstrieren. Es zeigt jedoch einige der didaktischen Möglichkeiten, die typischerweise bei intensiver Verwendung des Programms hervortreten.
- Variabilität im Denken, weil verschiedene Lösungswege schnell durchgespielt werden können.
- Befriedigung, wenn Rechnung und Anschauung übereinstimmen, wenn verschiedene Lösungsstrategien zum gleichen Ergebnis führen.
- Bereitschaft des öfteren, wegen der leichten Verfügbarkeit, Zeichnungen zu erstellen.
- Gewinnung des individuell durchaus unterschiedlichen optimalen Blickwinkels auf die räumliche Szene.
- Freude an schön gelungenen Zeichnungen.
- Förderung der Kreativität durch Nutzung der durch das Programm vorgegebenen Optionen.

Beispiel aus der 12. Jahrgangsstufe der Fachoberschule (FOS)

Das folgende Beispiel ist eine Prüfungsaufgabe aus der FOS. Dieses Beispiel zeigt, dass das Programm DreiDGeo nicht das Denken ersetzt. Manchmal ist es eher so, dass man sich den geometrischen Sachverhalt sehr genau überlegen muss, um mit den Mitteln des Programms eine befriedigende Lösung zu finden. Überraschenderweise werden von den Schülerinnen und Schülern häufig ganz unterschiedliche Lösungswege gefunden.

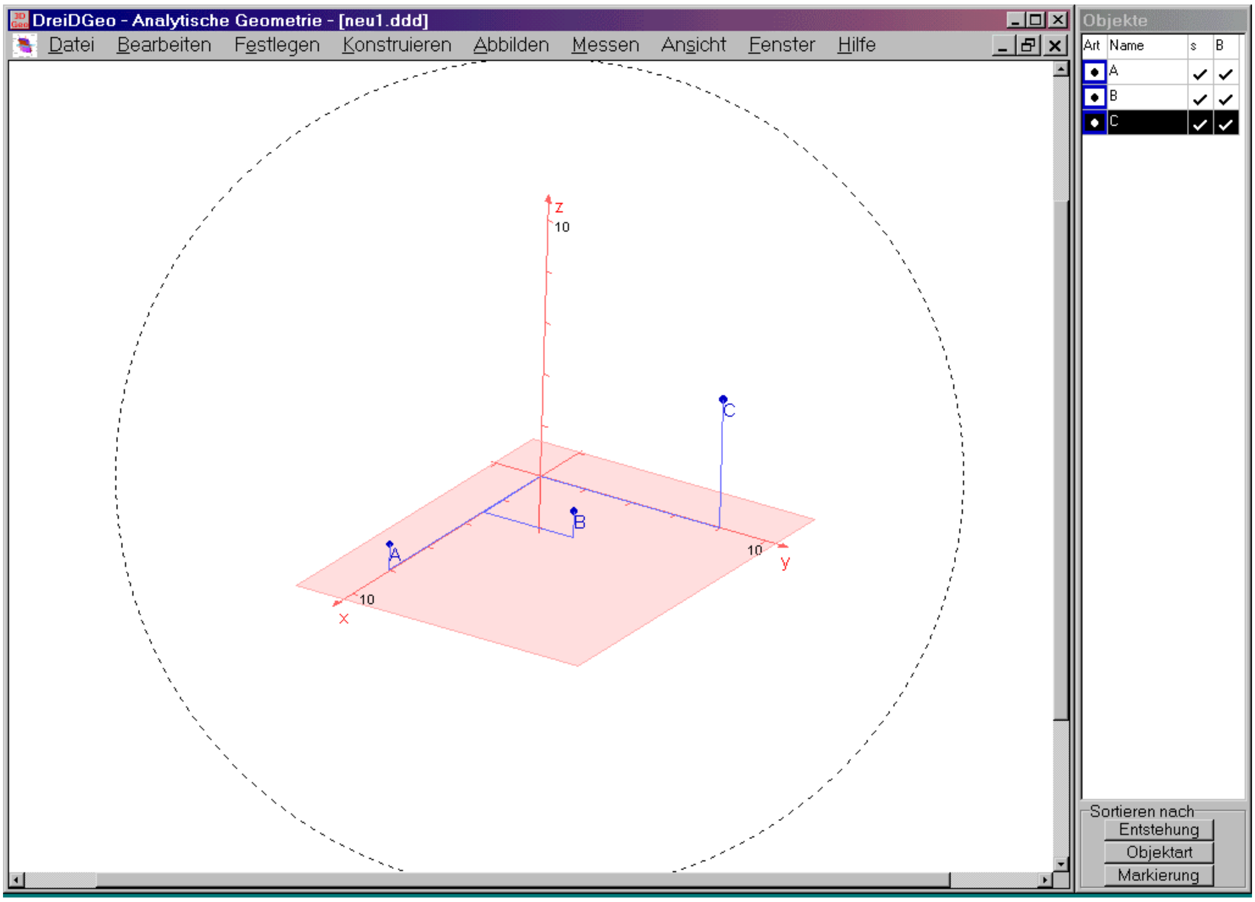
Aufgabe

Gegeben sind die Punkte A(8|0|1), B(3|4|1) und C(0|8|5)

sowie die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \Re$.

1. a) Bestimme eine Ebene E, die B enthält und senkrecht auf AC steht.
   b) Zeige, dass C Spiegelpunkt von A bezüglich E ist.
   c) Berechne den Schnittpunkt D von g mit E und den Winkel zwischen g und E.
   d) Berechne die zwei Punkte P und Q auf g, die von E den Abstand 9 haben.
2. Gegeben sind ferner die Geraden $ha: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $a, \mu \in \Re$.
   a) Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden g und ha. Bestimme gegebenenfalls den gemeinsamen Punkt S von g und ha.
   b) Ermittle eine Ebene F, die g enthält und parallel zu ha ist.
   c) Alle Geraden ha liegen in einer Ebene H. Bestimme diese!
   d) Zeige, dass die Normalvektoren von E, F und H eine Basis des R^3 bilden, und stelle den Richtungsvektor der Geraden g mit dieser Basis dar.

Lösung:
Eingabe der gegebenen Objekte:
Nach dem Start des Programms bringt man das Grafikfenster auf volle Größe (rechts oben das entsprechende Symbol anklicken). Außerdem empfiehlt es sich, die Schieber in den Laufleisten unten und rechts auf Mitte zu stellen.
Danach wählt man den Menüpunkt *Festlegen / durch Neueingabe / Punkt* . In dem Dialogfenster Festlegen eines Punktes gibt man zuerst bei Namen den Buchstaben A und dann bei Koordinaten die Zahlen 8,0 und 1 ein. Mit der Schaltfläche Übernehmen wird der Punkt A gezeichnet. Ebenso gibt man dann die Punkte B und C ein und schließt mit der Schaltfläche OK ab.
Ob man den Punkt allein, oder auch die den Punkt bestimmenden Koordinaten sehen soll, kann durch das Register Eigenschaften im Dialogfenster Festlegen eines Punktes angegeben werden.
In nachfolgender Abbildung ist die Darstellungsart „Zickzack“ gewählt worden.
Jetzt sieht man die drei Punkte A,B und C sowohl im Grafikfenster als auch in der Objektliste am rechten Rand des Bildschirms.

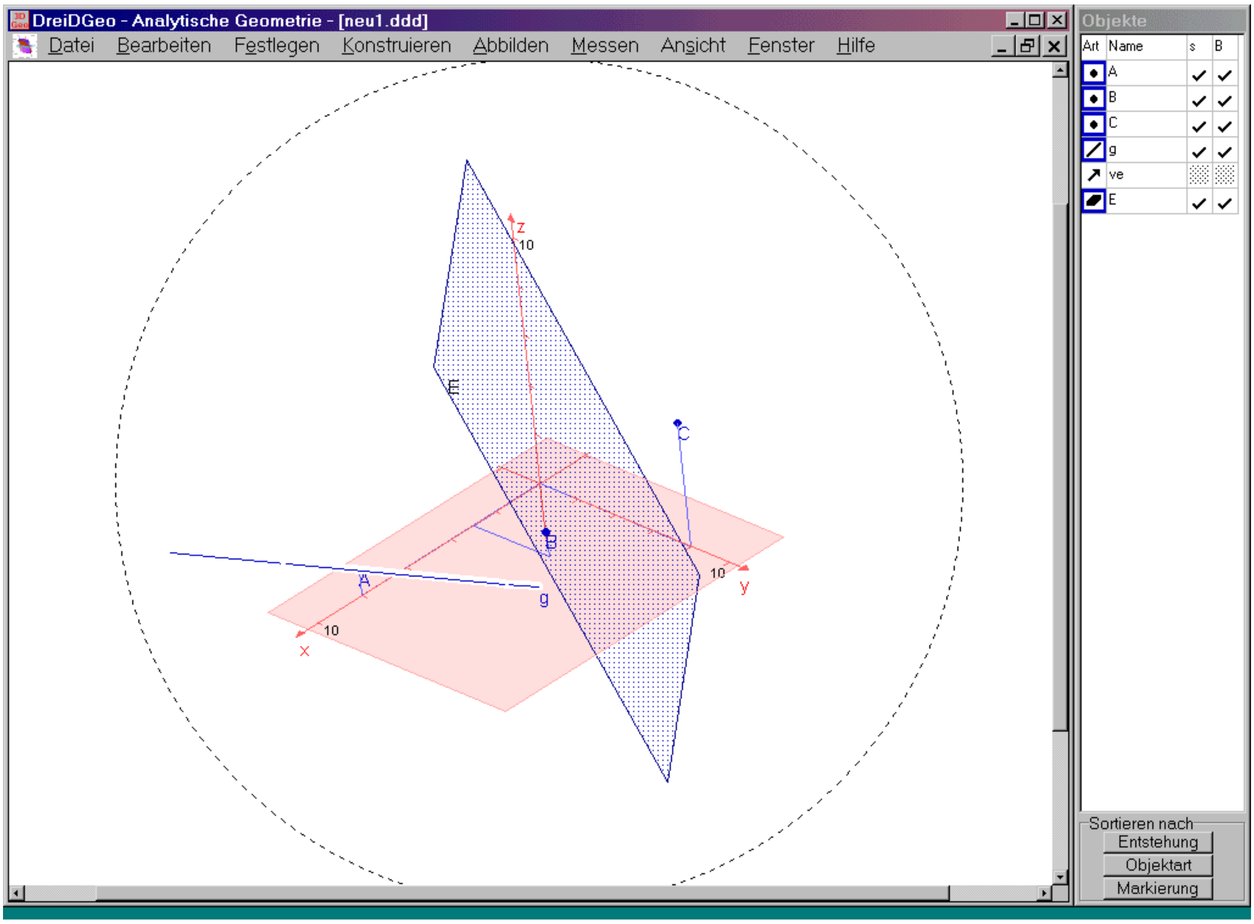


Ebenso gibt man durch Wahl des Menüpunktes *Festlegen / durch Neueingabe / Gerade* im Dialogfenster Festlegen einer Gerade die Gerade g ein.

1a) Bestimme eine Ebene E, die B enthält und senkrecht auf AC steht.
Als erstes wird mit Hilfe der Punkte A und C ein Normalvektor ve der Ebene E festgelegt. Dazu markiert man durch einfaches Anklicken von A und C (in der Grafik oder in der Objektliste) die beiden Punkte. Damit beim zweiten Anklicken die erste Markierung nicht wieder verschwindet, muss man gleichzeitig die Taste Strg (Steuerungstaste oder Controltaste) drücken. Nach dem Markieren wählt man den Menüpunkt *Festlegen*

/ durch markierte Objekte / Vektor und bekommt sofort in der Objektliste einen neuen Vektor v1. Durch Doppelklick auf diesen Vektor v1 in der Objektliste erscheint das Dialogfenster <u>Festlegen eines Vektors</u>. Hier kann man den Namen v1 des Vektors in ve umändern. Auch die Komponenten des Vektors $ve = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ kann man hier ablesen.

Als zweites markiert man den Vektor ve und den Punkt B. Danach wählt man den Menüpunkt *Festlegen / durch markierte Objekte / Ebene* und erhält sofort eine Ebene E1, sowohl im Grafikfenster wie in der Objektliste. Durch Doppelklick auf E1 kommt man in das Dialogfenster <u>Festlegen einer Ebene</u>. Hier sollte man E1 in E umbenennen. Zur Kontrolle kann man sich in diesem Dialogfenster auch die Normalform von E anzeigen lassen. E: 2x – 2y –z + 3 = 0.
Außerdem ist es zweckmäßig, die Transparenz auf den Wert 2 oder 3 einzustellen. Das geschieht im Dialog <u>Festlegen einer Ebene</u> durch Wahl des Registers <u>Eigenschaften</u>.



1b) Zeige, dass C Spiegelpunkt von A bezüglich E ist.

Bei dieser Teilaufgabe haben die Schülerinnen und Schüler drei verschiedene Lösungswege vorgeschlagen. Alle drei wurden realisiert und ihre Gleichwertigkeit wurde nachgewiesen.

1. Möglichkeit

Da AC senkrecht zu E ist, genügt es zu zeigen, dass der Mittelpunkt M von der Strecke [AC] auf der Ebene E liegt. Dazu markiert man zuerst die Punkt A und C. Dann wählt man den Menüpunkt *Konstruieren / Mittelpunkt bilden* und bekommt den Punkt P1(4|4|3), den man sofort in M(4|4|3) umbenennt. Nun wird M und E markiert und der

Menüpunkt *Konstruieren / auf Inzidenz untersuchen* aufgerufen. Als Ergebnis bekommt man die erfreuliche Meldung: Das Objekt M liegt in E !

2. Möglichkeit

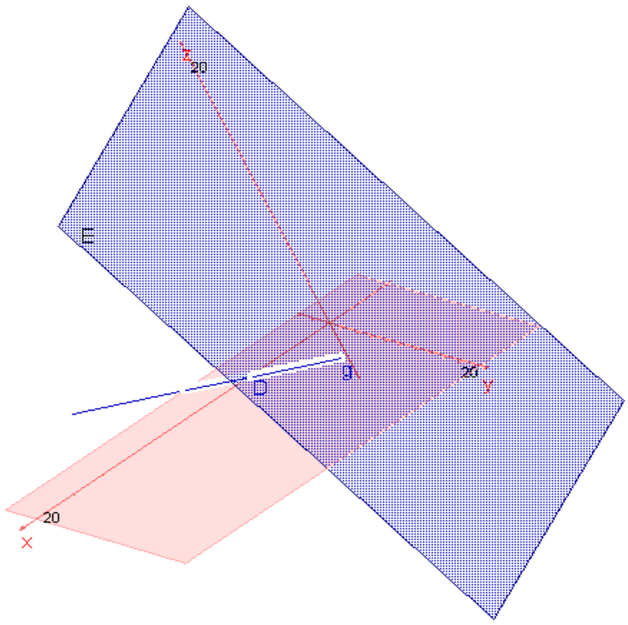
Eine weitere Möglichkeit zur Lösung dieser Teilaufgabe wäre folgende. Man berechnet den Abstand des Punktes A von der Ebene E sowie den Abstand des Punktes C von der Ebene E und stellt fest, dass beide gleich sind. Zur Abstandsbestimmung wird A und E markiert und der Menüpunkt *Messen / Abstand* aufgerufen. Das Ergebnis ist 6 LE.

3. Möglichkeit

Eine dritte Möglichkeit besteht im Spiegeln des Punktes A an der Ebene E. Dazu legt man zuerst die Ebenenspiegelung fest. Man markiert E und wählt den Menüpunkt *Abbilden / Ebenenspiegelung festlegen*. Zur Kontrolle erhält man in der Objektliste ein (S) hinter dem Namen der Ebene E, das bedeutet: es wurde eine Spiegelung an E definiert. Nun markiert man den Punkt A und wählt den Menüpunkt *Abbilden / Ebenenspiegelung an E*. In der Objektliste erscheint der Punkt A‘. Durch Doppelklick auf A‘ bekommt man die Koordinaten A‘(0|8|5). Somit ist A‘ = C. Damit die Bezeichner der Punkte A‘ und C nicht übereinander liegen, blendet man den Namen des Punktes C einfach weg. Dazu muss man in der Objektliste beim Punkt C in Spalte B (Bezeichnung) das Häkchen durch Anklicken entfernen.

1c) Berechne den Schnittpunkt D von g mit E und den Winkel zwischen g und E.

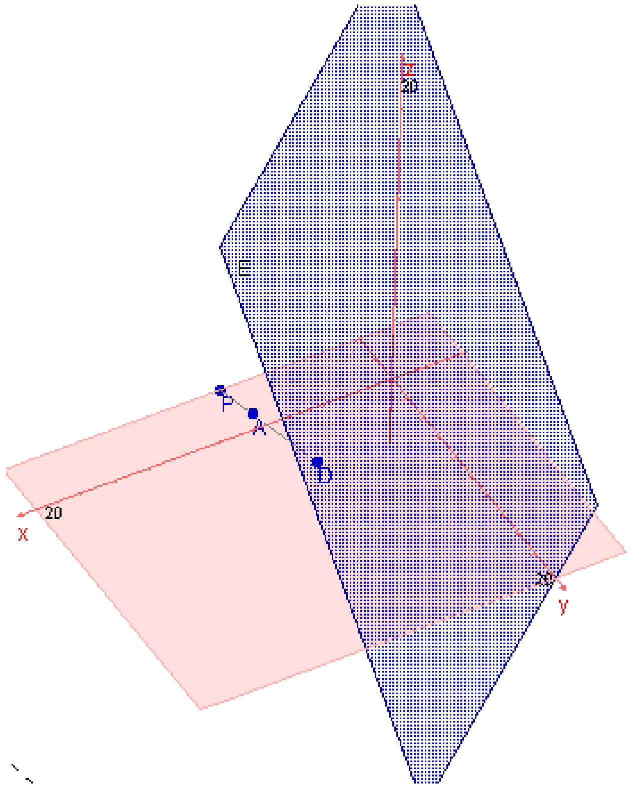
Zur Bestimmung des Schnittpunktes D der Geraden g mit der Ebene E markiert man g und E. Dann wählt man den Menüpunkt *Konstruieren / Schnittpunkt bilden* und einen Punkt P1, den man mit Hilfe eines Doppelklicks auf P1 sofort in D(8|8|3) umbenennt. In der Grafik ist allerdings nicht zu sehen, dass der Punkt D auf der Ebene E liegt. Das erkennt man am besten, wenn man genau in Richtung der Geraden g blickt, die Gerade also als Punkt erscheint.



Nun wird man den Darstellungsbereich der gestellten Aufgabe anpassen. Dazu wählt man mehrfach den Menüpunkt *Ansicht / Darstellungsbereich vergrößern*. Die Beschriftung auf den Koordinatenachsen geht jetzt nicht mehr nur von 0 bis 10, sondern nach zweimaligem Vergrößern von 0 bis 14 und nach viermaligen Vergrößern von 0 bis 20. Nun kann man sehen, dass der Punkt D auch auf der Ebene E liegt.

Zur Bestimmung des Winkels zwischen g und E markiert man die Gerade g und die Ebene E. Dann wählt man *Messen / Winkel* und erhält Winkel(g,E)=46,69°.

1d) Berechne die zwei Punkte P und Q auf g, die von E den Abstand 9 haben.
Diese Aufgabe zu lösen, bedarf einiger Überlegung. Ein Werkzeug wie DreiDGeo kann natürlich nicht für alle Probleme fertige Lösungen habe, vielmehr muss man sich durch geeignete Strategien mit den vorhandenen Möglichkeiten des Programms den Lösungsweg erarbeiten. Aber gerade das fördert, wie sich im Unterricht gezeigt hat, die Diskussion über mögliche Lösungswege. Um einen Hinweis auf das Menü Abbilden und die dort angebotenen Menüpunkte wird man meist wohl nicht herumkommen. In unserem Fall erinnert man sich an 1b) , wo man festgestellt hatte, dass der Punkt A auf der Geraden g von der Ebene E den Abstand 6 hat. Eine zentrische Streckung mit dem Zentrum D und dem Streckungsfaktor m=9/6 bildet dann den Punkt A auf den gesuchten Punkt P ab. Man markiert also zuerst D, wählt *Abbilden / Streckung festlegen* und kommt in das Dialogfenster Streckungsfaktor festlegen. Hier gibt man den Wert 9/6 ein (Die Brucheingabe mit einem schrägen Bruchstrich ist möglich). Man verläßt den Dialog mit OK. Es erscheint hinter dem Punkt D in der Objektliste ein (Z), das bedeutet D ist das Zentrum einer Streckung. Anschließend wird A markiert und mit *Abbilden / Streckung an D* nach A‘ gestreckt. A‘ wird sofort in P(8|-4|0) umbenannt.



Um Q zu bekommen muss man P an D spiegeln. Dazu markiert man D und wählt den Menüpunkt *Abbilden / Punktspiegelung festlegen*. Es erscheint hinter dem Punkt D in der Objektliste ein (S), das bedeutet D ist Fixpunkt einer Punktspiegeling. Anschließend wird P mar kiert und mit *Abbilden / Punktspiegelung an D* nach P‘ gespiegelt. P‘ wird sofort in Q(8|20|6) umbenannt.

2. Gegeben sind ferner die Geraden $\mathbf{ha}: \vec{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{2a} \\ \mathbf{-a} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$ **mit a,μ∈ℜ.**

Damit nicht zuviele Objekte sichtbar sind, empfiehlt es sich durch Entfernen der Häkchen in Spalte s (sichtbar) der Objektliste folgende Objekte unsichtbar zu machen: A, B, C, D, M, E, P und Q. Auch die x-y-Koordinatenebene kann man mit Hilfe des Menüpunktes *Ansicht / Koordinatenebenen* wegblenden.

Man zeichnet zunächst die Geraden $ha: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ für a = 0, 1, 2

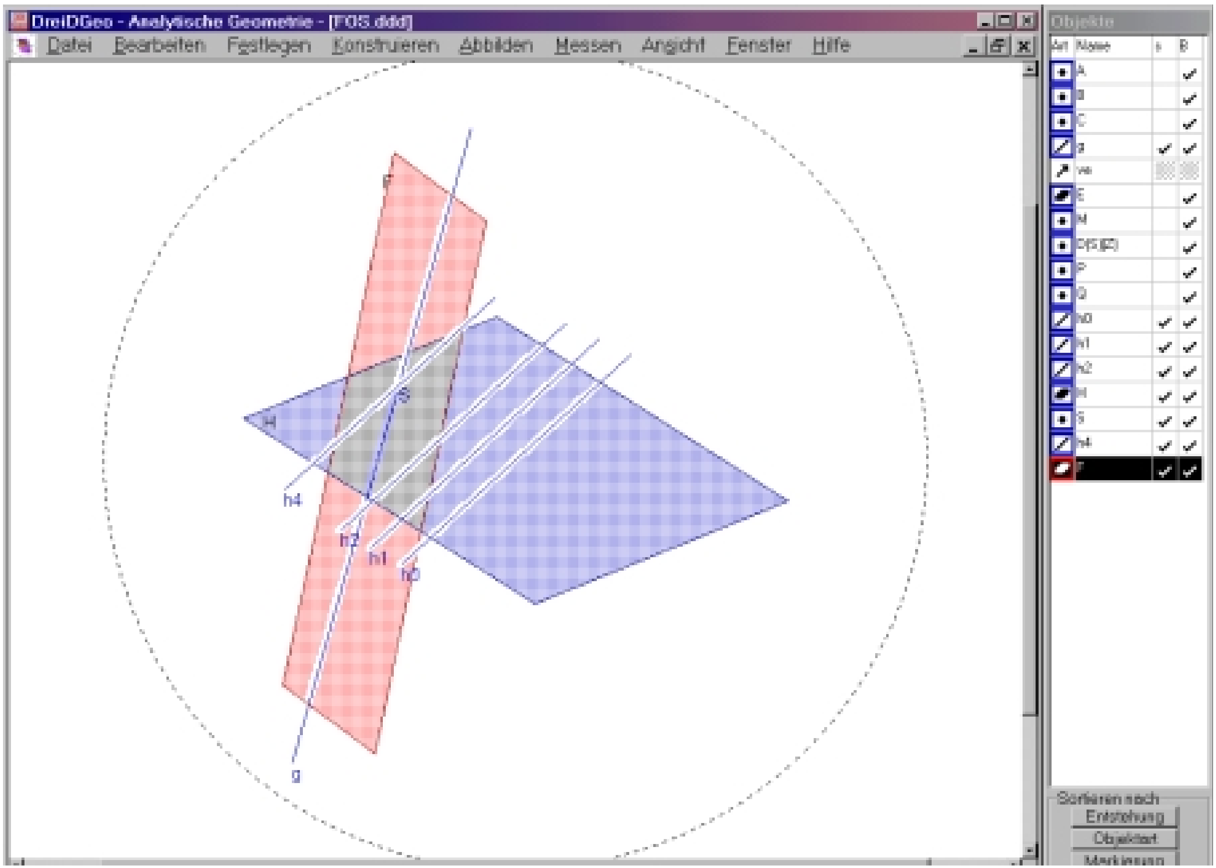
$h0: \vec{x} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $h1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

und erkennt, dass es sich um eine Parallelschar von Geraden handelt.

2a) Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden g und ha. Bestimme gegebenenfalls den gemeinsamen Punkt S von g und ha.

Dann markiert man h0 und h1, wählt *Festlegen / durch markierte Objekte / Ebene*, und nennt die neue Ebene H. Als Ergebnis bekommt man H : x + 2y - z = 0.
Nun markiert man g und H, wählt *Konstruieren / Schnittpunkt bilden*, nennt den Schnittpunkt S und liest die Koordinaten S(8|-4|0) ab.
Im allgemeinen sind g und ha windschief. Wegen 2a = 8 schneiden sich g und ha nur für a=4. Zur Kontrolle zeichnet man noch $h4: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein. Man sieht, dass h4 in H liegt und durch S geht.

2b) Ermittle eine Ebene F, die g enthält und parallel zu ha ist.



Die Ebene F, die g enthält und parallel zu zu allen Geraden ha ist, erhält man durch Markieren von g und h4, Wahl des Menüpunktes *Festlegen / durch markierte Objekte / Ebene* und Umbenennung der Ebene in F.

2c) Alle Geraden ha liegen in einer Ebene H. Bestimme diese!
Diese Aufgabe wurde schon bei 2a gelöst.

2d) Zeige, dass die Normalvektoren von E, F und H eine Basis des R^3 bilden, und stelle den Richtungsvektor der Geraden g mit dieser Basis dar.
Erst nach längerem Überlegungen und Diskutieren konnten die Schülerinnen und Schüler einen Lösungsvorschlag erarbeiten, der mit den Mitteln von DreiDGeo realisierbar war. Das Einlassen auf die beschränkten Möglichkieten des Programms erwies sich dabei als Herausforderung an die Kreativität. Ein lineares Gleichungssystem kann einerseits als Schnitt dreier Ebenen, andrerseits als Linearkombination dreier Vektoren interprtiert werden.
Die lineare Unabhängigkeit der Normalvektoren der Ebenen E, F und H ist gleichbedeutend damit, dass die drei Ebenen sich in genau einem Punkt schneiden. E mit F geschnitten ergibt g1 (E, F markieren; *Konstruieren / Schnittgerade bilden*), H mit g1 geschnitten ergibt P1 (H, g1 markieren; *Konstruieren / Schnittpunkt bilden*). Daraus folgt, dass die Normalvektoren der drei Ebenen linear unabhängig sind und somit eine Basis des R^3 bilden.
Außer H, g1 und P1 wird man aus Gründen der Übersichtlichkeit alle anderen Objekte wegblenden.

	vE	vH	vF	-vg
E1	-2	1	7	0
E2	2	2	0	-4
E3	1	-1	0	-1

Nun bestimmt man die Normalvektoren vE, vH und vF der drei Ebenen E, H und F (Ebene markieren; *Festlegen / durch markierte Objekte / Normalvektor*) sowie den Richtungsvektor vg der Geraden g. Die Ergebnisse sieht man in der nebenstehenden Tabelle. In den Spalten sieht man die vier Vektoren vE, vH, vF und -vg.
Die Komponenten der Vektoren können als Koeffizienten von drei Ebenen E1, E2 und E3 in Normalform gedeutet werden. Also

$$\begin{aligned} E1 &: -2x + y + 7z + 0 = 0 \\ E2 &: 2x + 2y - 4 = 0 \\ E3 &: x - y - 1 = 0 \end{aligned}$$

Diese drei Ebenen werden mit Hilfe von *Festlegen / durch Neueingabe / Ebene* eingegeben. Dann schneidet man E1 mit E2 und erhält g2. Nun schneidet man g2 mit E3 und erhält $P2(\frac{3}{2} | \frac{1}{2} | \frac{5}{14})$. Somit ist die gesuchte Linearkombination

$$\frac{3}{2} vE + \frac{1}{2} vH + \frac{5}{14} vF = vg$$

Eine ganz andere Möglichkeit zur Ermittlung der Linearkombination wäre die Konstruktion eines Parallelflachs mit den Kantenrichtungen vE, vH und vF, bei dem der Ortsvektor vg Raumdiagonale ist. Die Länge der Kante in Richtung vE dividiert durch die Länge von vE ist dann der Linearfaktor von vE u.s.w.

Literatur

Rechenberger, K. et al. (2000): DreiDGeo. Ein multifunktionales Windows-Programm zur 3D-Darstellung von Objekten der analytischen Geometrie.- Augsburg: Zentralstelle für Computer im Unterricht. (Das Programm soll 2002 in einer erweiterten Fassung unter dem Namen „Analytische Geometrie“ im Cornelsen Verlag/Berlin erscheinen.)

Schumann, H. (2002): Computerunterstützte Behandlung analytisch-geometrischer Aufgaben im IE³. In: Der Mathematisch-Naturwissenschaftliche Unterricht (MNU) (55) 2002, Heft 2